

Circuitos eléctricos

Jesús Fraile Mora



Circuitos eléctricos

Circuitos eléctricos

Jesús Fraile Mora

Catedrático de Ingeniería Eléctrica

Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Universidad Politécnica de Madrid

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

Circuitos eléctricos

Jesús Fraile Mora

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2012

ISBN: 9788483227954

Materia: 621.3 Ingeniería eléctrica

Formato: 195 × 250 mm

Páginas: 576

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser utilizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y sgts. Código penal).

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos —www.cedro.org), si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Todos los derechos reservados.

© 2012 PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

C/ Ribera del Loira, 28

28042 Madrid (España)

ISBN: 9788483227954

Depósito Legal:

Equipo de edición:

Editor: Miguel Martín Romo

Técnico editorial: Esther Martín

Equipo de diseño:

Diseñadora: Elena Jaramillo

Técnico de diseño: Irene Medina

Equipo de producción:

Directora de producción: Marta Illescas

Jefe de producción: José A. Clares

Diseño de cubierta: Copibook, S.L.

Composición: Copibook, S.L.

Impreso por:

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Nota sobre enlaces a páginas web ajenas: este libro incluye enlaces a sitios web cuya gestión, mantenimiento y control son responsabilidad única y exclusiva de terceros ajenos a PEARSON EDUCACIÓN, S.A. Los enlaces u otras referencias a sitios web se incluyen con finalidad estrictamente informativa y se proporcionan en el estado en que se encuentran en el momento de publicación sin garantías, expresas o implícitas, sobre la información que se proporcione en ellas. Los enlaces no implican el aval de PEARSON EDUCACIÓN S.A. a tales sitios, páginas web, funcionalidades y sus respectivos contenidos o cualquier asociación con sus administradores. En consecuencia, PEARSON EDUCACIÓN S.A., no asume responsabilidad alguna por los daños que se puedan derivar de hipotéticas infracciones de los derechos de propiedad intelectual y/o industrial que puedan contener dichos sitios web ni por las pérdidas, delitos o los daños y perjuicios derivados, directa o indirectamente, del uso de tales sitios web y de su información. Al acceder a tales enlaces externos de los sitios web, el usuario estará bajo la protección de datos y políticas de privacidad o prácticas y otros contenidos de tales sitios web y no de PEARSON EDUCACIÓN S.A.

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos



Contenido

Acerca del autor	ix
Prólogo	xi
Al estudiante	xv
Capítulo 1. Introducción a la teoría de los circuitos eléctricos	1
1.1. Introducción	2
1.2. Variables que intervienen en el estudio de los circuitos eléctricos. Convenio de signos ..	3
1.2.1. Corriente eléctrica	4
1.2.2. Potencial eléctrico. Tensión. Diferencia de potencial	5
1.2.3. Potencia eléctrica	7
1.3. Elementos activos ideales. Fuentes o generadores	9
1.4. Tipos de excitación y formas de onda	12
1.4.1. Clasificación de ondas	12
1.4.2. Ondas periódicas: valores asociados	13
1.5. Elementos pasivos	15
1.5.1. Resistencia	16
1.5.2. Bobina. Inductancia	21
1.5.3. Condensador	23
1.6. Impedancia y admitancia operacional	28
1.7. Topología de redes: conceptos fundamentales	30
1.7.1. Definiciones	30
1.7.2. Propiedades	32
1.8. Lemas de Kirchhoff	32
1.8.1. Primer lema de Kirchhoff	33
1.8.2. Segundo lema de Kirchhoff	34
1.8.3. Elección de las ecuaciones independientes para la aplicación de los lemas de Kirchhoff	36
1.9. Elementos activos reales	41
1.10. Asociación y transformación de fuentes	43
1.11. Asociación de elementos pasivos	48
1.11.1. Conexión en serie	49
1.11.2. Conexión en paralelo	50
1.11.3. Equivalencia estrella-triángulo. Teorema de Kennelly	52

1.12. Análisis de circuitos por el método de las mallas	60
1.12.1. Método de las mallas. Formulación general	60
1.12.2. Método de las mallas con generadores de corriente	66
1.13. Análisis de circuitos por el método de los nudos	71
1.13.1. Formulación general	71
1.13.2. Método de los nudos con generadores de tensión	76
1.14. Principio de superposición	82
1.15. Teoremas de Thévenin y Norton	86
1.16. Otros teoremas de circuitos	94
1.16.1. Teorema de sustitución	94
1.16.2. Teorema de reciprocidad	96
1.16.3. Teorema de Millman	97
1.16.4. Teorema de Tellegen	99
1.17. Cuadripolos	102
1.18. El amplificador operacional	110
1.19. Bobinas con acoplamiento magnético	116
1.19.1. Análisis de los flujos magnéticos en bobinas acopladas	117
1.19.2. Energía magnética almacenada con bobinas acopladas	122
Problemas	124
Biografías	135
Referencias	138

Capítulo 2. Circuitos de corriente alterna sinusoidal 141

2.1. Introducción	142
2.2. Onda sinusoidal: generación y valores asociados	144
2.3. Representación compleja de una magnitud sinusoidal	149
2.4. Derivada e integral de una magnitud sinusoidal	155
2.5. El dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia	156
2.6. Respuesta sinusoidal de los elementos pasivos	161
2.7. Impedancia y admitancia complejas	165
2.8. Análisis de circuitos en régimen permanente sinusoidal	168
2.8.1. Generalidades	168
2.8.2. Asociación de elementos pasivos	175
2.8.3. Método de las corrientes de malla	177
2.8.4. Método de las tensiones de nudo	179
2.8.5. Principio de superposición	183
2.8.6. Teoremas de Thévenin y Norton	187
2.9. Potencia en un circuito eléctrico en régimen de corriente alterna sinusoidal	193
2.10. Potencia compleja	202
2.11. Factor de potencia: su importancia práctica	209
2.12. Corrección del factor de potencia	213
2.13. Medida de la potencia en c.a.	223
2.14. Transferencia máxima de potencia	228
2.15. Resonancia en c.a.	231
2.16. Los filtros eléctricos	237
2.17. Circuitos eléctricos con señales no sinusoidales	241

2.17.1. Introducción	241
2.17.2. Revisión matemática. Series de Fourier	242
2.17.3. Aplicaciones de las series de Fourier a los circuitos eléctricos	247
2.17.4. Circuitos eléctricos con tensión sinusoidal y corriente no sinusoidal	251
Problemas	256
Biografías	275
Referencias	277

Capítulo 3. Circuitos trifásicos 279

3.1. Introducción	280
3.2. Generación de tensiones trifásicas	281
3.3. Conexión en estrella equilibrada	285
3.4. Conexión en triángulo equilibrado	296
3.5. Cargas desequilibradas	305
3.5.1. Cargas desequilibradas conectadas en estrella	305
3.5.2. Cargas desequilibradas conectadas en triángulo	315
3.6. Potencia en sistemas trifásicos	321
3.6.1. Generalidades	321
3.6.2. Potencias en sistemas trifásicos equilibrados	322
3.7. Corrección del factor de potencia en trifásica	329
3.8. Medida de la potencia en sistemas trifásicos	333
3.8.1. Generalidades	333
3.8.2. Medida de la potencia en circuitos equilibrados	335
3.9. Transporte de energía eléctrica: ventaja de los sistemas trifásicos frente a los mono- fásicos	345
3.10. Componentes simétricas	346
3.10.1. Generalidades	346
3.10.2. El operador trifásico «a»	347
3.10.3. Componentes simétricas de fasores desequilibrados	348
3.10.4. Impedancias debidas a las corrientes de diferente secuencia	355
3.10.5. Redes de secuencia	356
3.10.6. Cálculo de faltas en sistemas de potencia	357
Problemas	362
Biografías	387
Referencias	389

Capítulo 4. Régimen transitorio de los circuitos eléctricos 391

4.1. Introducción	392
4.2. La respuesta completa de una red lineal	393
4.3. Condiciones iniciales de los elementos	395
4.3.1. Resistencia	395
4.3.2. Inductancia	395
4.3.3. Capacidad	396
4.4. Análisis clásico de transitorios en sistemas de primer orden	400
4.4.1. Respuesta transitoria de un circuito R - L	400
4.4.2. Respuesta transitoria de un circuito R - C	406

4.5. Solución sistemática de redes de primer orden	409
4.6. Análisis clásico de transitorios en sistemas de segundo orden	423
4.6.1. Respuesta transitoria de un circuito $R-L-C$	423
4.7. Transformada de Laplace	438
4.8. Función de transferencia. Diagrama de polos y ceros	440
4.9. Aplicaciones de la transformada de Laplace en el estudio de transitorios de circuitos eléctricos	444
4.9.1. Respuesta de los elementos pasivos simples en el plano «s»	444
4.10. Análisis de circuitos eléctricos por variables de estado	460
4.10.1. El concepto de estado	460
4.10.2. Planteamiento sistemático de las ecuaciones de estado	463
4.10.3. Solución de las ecuaciones de estado por la transformada de Laplace	466
Problemas	472
Biografías	483
Referencias	486

Apéndice 1. Circuitos eléctricos: Aspectos históricos 489

A.1.1. Ley de Ohm y lemas de Kirchhoff	490
A.1.2. Algunos teoremas de los circuitos eléctricos	491
A.1.3. Circuitos de corriente alterna. El cálculo simbólico	492
A.1.4. La potencia en corriente alterna	494
A.1.5. Los sistemas polifásicos y el método de las componentes simétricas	494
A.1.6. El cálculo operacional de Heaviside	496
A.1.7. Los filtros eléctricos. La síntesis de los circuitos eléctricos	497
A.1.8. La realimentación y otras contribuciones en circuitos	498
A.1.9. Las innovaciones electrónicas y los circuitos activos	500
A.1.10. De la teoría de circuitos a la teoría de sistemas	501
A.1.11. El estudio de los circuitos eléctricos con ayuda de ordenador	503
Referencias	504

Apéndice 2. Transformada de Laplace 509

A.2.1. Introducción histórica	510
A.2.2. Definición de transformada de Laplace	510
A.2.3. Teoremas sobre la transformada de Laplace	511
A.2.4. Desarrollo de pares de transformadas	519
A.2.5. Síntesis de ondas utilizando el operador retardo del tiempo	523
A.2.6. Función impulso. Delta de Dirac	526
A.2.7. Síntesis de ondas utilizando la función impulso	530
A.2.8. Transformada inversa de Laplace. Tablas de transformadas	532
A.2.9. La integral de convolución	538
A.2.10. Interpretación gráfica de la convolución	541
A.2.11. Propiedades de la integral de convolución	544

Índices 549

Índice analítico	551
Índice biográfico	557



Acerca del autor

Natural de Ayerbe (Huesca). Perito Industrial, rama eléctrica, por la Escuela Técnica de Peritos Industriales de Zaragoza, 1965 (en la actualidad: E.U. de Ingeniería Técnica Industrial). Ingeniero de Telecomunicación, rama electrónica, por la E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación de Madrid, 1970. Doctor Ingeniero de Telecomunicación por la Universidad Politécnica de Madrid, 1974. Licenciado en Ciencias, sección de Físicas, por la Universidad Complutense de Madrid, 1976.

Maestro de Laboratorio de Electrotecnia de la E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación de Madrid, 1967-71. Profesor encargado de curso y de clases prácticas de Electrotecnia en la escuela anterior, 1970-72. Profesor encargado de Laboratorio de Electrotecnia de la E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación de Madrid, 1972-74. Profesor adjunto de Laboratorio de Electrotecnia en la misma escuela, 1974-75. Catedrático de Electrotecnia de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica de Obras Públicas de Madrid, 1972-78. Profesor adjunto de Máquinas Eléctricas de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid, 1975-78. Catedrático de Electrotecnia de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Santander, 1978-80. Catedrático de Electrotecnia de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid, desde 1980, continuando en la actualidad. Profesor encargado de la asignatura Instrumentación y Control, de la carrera de segundo ciclo, de Ingeniero de Materiales de la UPM, durante los Cursos 1995 a 1998.

Director del Departamento de Energética de la Universidad de Santander, 1978-80. Secretario General de la Universidad de Santander, 1979-80. Secretario de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, 1981-82. Subdirector de Investigación y Doctorado de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Madrid, 1983-86. *Member* del IEEE (*Institute of Electrical and Electronic Engineers*) desde 1972, recibiendo el grado de *Senior Member* en 1985. Director del Departamento de Ingeniería Civil: Hidráulica y Energética de la UPM, 1994-2004. Premio de la Fundación General de la UPM a la labor docente desarrollada por un profesor en su vida académica, año 1991. Medalla de Oro de la Asociación Española para el Desarrollo de la Ingeniería Eléctrica, año 2005. Premio a la Excelencia Docente de la Universidad Politécnica de Madrid, año 2008.

Autor de diversos libros de texto y artículos en el Área de Ingeniería Eléctrica. Premio de la Fundación General de la Universidad Politécnica de Madrid al mejor libro de texto escrito por un profesor de la UPM por el libro: *Electromagnetismo y Circuitos Eléctricos*, año 1993. Ha impartido gran número de seminarios y cursos de doctorado en diversas uni-

versidades españolas. También ha dirigido o participado en numerosos cursos de formación y de reciclado para diversas empresas e instituciones. La labor investigadora desarrollada incluye los temas de estabilidad de sistemas eléctricos de potencia; comportamiento transitorio de máquinas síncronas; regulación electrónica de velocidad de motores de inducción trifásicos; sistemas de almacenamiento de energía eléctrica mediante bobinas superconductoras SMES; tecnologías de velocidad variable y control inteligente en la generación hidroeléctrica y también sobre historia de la Ingeniería Eléctrica.



Prólogo

Este libro de Circuitos Eléctricos está adaptado a los nuevos Planes de Estudio que se están implantando en España en los últimos años, como consecuencia de la armonización de las enseñanzas universitarias españolas con el Espacio Europeo de Enseñanza Superior. Esta obra es el fruto de más de cuarenta años de experiencia docente en esta materia en diversas Escuelas Técnicas Españolas de Ingeniería Técnica e Ingeniería Superior. Aunque el texto está orientado en principio para que sirva de guía de estudio a los nuevos estudiantes de los diversos grados en Ingeniería Civil, el contenido se orienta a los objetivos docentes de la primera parte de la asignatura Electrotecnia de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid, aunque se han ampliado algunos temas, para que sea útil a un sector universitario más amplio de otras ramas de la ingeniería.

El libro explica los principios de la teoría de los Circuitos Eléctricos como base fundamental para un estudio posterior de las Máquinas Eléctricas e Instalaciones. El Capítulo 1 es una introducción a la teoría de los circuitos eléctricos, en el que se plantean conceptos generales, válidos para circuitos de corriente continua y corriente alterna, lo que representa una gran ventaja de tiempo frente al enfoque tradicional. Se estudian en este capítulo los principales teoremas de circuitos y los ejemplos de aplicación que contiene se realizan con fuentes de c.c. para que sea más fácil la asimilación de los conceptos estudiados. Se han incluido en este capítulo diversas cuestiones adicionales como cuadripolos, el amplificador operacional y las bobinas con acoplamiento magnético. El Capítulo 2 trata de los circuitos de c.a. sinusoidal, que comienza con la representación compleja de este tipo de ondas, introduciendo el concepto de dominio de la frecuencia compleja y aplicando los teoremas estudiados en el capítulo anterior en forma compleja. Se estudian con detalle los conceptos de potencia en c.a., el factor de potencia y su importancia práctica y la forma de corregir el mismo; se incluyen también los circuitos resonantes, los filtros eléctricos y el análisis de los circuitos de c.a. con señales no sinusoidales, para lo cual se incluye un repaso de las Series de Fourier. El Capítulo 3 se refiere a los circuitos trifásicos tanto equilibrados como desequilibrados, la potencia y los circuitos de medida en los circuitos trifásicos, e incluye al final una breve descripción de las componentes simétricas. El Capítulo 4 se dedica al régimen transitorio de los circuitos eléctricos, en el que se hace un doble análisis, tanto el clásico de resolución directa de las ecuaciones integrodiferenciales de la red, como el moderno basado en la técnica de la transformada de Laplace. Se incluyen los conceptos de funciones de transferencia, diagramas de polos y ceros y se incorpora al final un análisis simplificado de circuitos eléctricos utilizando variables de estado.

El texto tiene además dos apéndices adicionales, el primero desarrolla una historia sucinta de los circuitos eléctricos y que consideramos de gran interés para que los estudiantes conozcan la evolución de esta rama de la Ingeniería Eléctrica y completen de este modo su necesaria formación humanística y el segundo que hace un estudio de la transformada de Laplace, que se incluye a modo de anexo para separar su tratamiento matemático de las aplicaciones al estudio del régimen transitorio de los circuitos eléctricos.

Es importante destacar que en este texto se han adaptado tanto la nomenclatura de las magnitudes eléctricas como la simbología de los circuitos a las normas europeas CENELEC (Comité Europeo de Normalización Electrotécnica) y que en España está representada por AENOR (Asociación Española de Normalización y Certificación, que aprueba a su vez las Normas UNE-EN). Estas normas coinciden básicamente con las aprobadas por la Comisión Electrotécnica Internacional (*International Electrotechnical Commission*). Este organismo, fundado en 1904, aprueba y publica estándares internacionales referentes a la tecnología eléctrica y en él están representados casi todos países del mundo.

Cada capítulo del libro contiene una gran variedad de ejemplos de aplicación con su solución completa lo que facilita, por una parte, la labor del profesor que lo utilice, ya que podrá dedicar menos tiempo de la clase a la tediosa manipulación numérica y más a las deducciones básicas y, por otro lado, facilita el autoaprendizaje del alumno, ya que cada nuevo concepto que se introduce tiene su ejemplo de aplicación para que comprenda mejor el significado de la teoría presentada. Al final de cada capítulo se incluyen entre cuarenta y sesenta problemas en los que se da únicamente la respuesta final. Con ello se pretende facilitar la labor del profesor en la preparación de enunciados de ejercicios para desarrollar en clase y el trabajo del alumno de tener que recurrir a buscar libros de problemas para comprobar su nivel de asimilación de conocimientos. La mayor parte de estos problemas corresponden a exámenes que se han propuesto a nuestros estudiantes en las diversas pruebas y evaluaciones. Teniendo en cuenta los ejemplos resueltos a lo largo de cada capítulo y los ejercicios finales, el libro plantea casi trescientos problemas, que facilitan la asimilación de la teoría. En cada capítulo se intercalan con frecuencia anécdotas, comentarios prácticos y secciones de ampliación de conocimientos, que son puntos sugerentes de reflexión, que incentivan la lectura del texto, debido a su curiosidad y a las aplicaciones que tienen en la práctica profesional de la ingeniería. Se incluye también al final de cada capítulo una amplia bibliografía de ampliación de los temas estudiados en la lección, que puede resultar muy beneficiosa para aquellos estudiantes que deseen complementar los conceptos estudiados; son parte de las referencias que ha utilizado el autor en la redacción del libro. También se han escrito las biografías de científicos, ingenieros y profesores que han contribuido directa o indirectamente al desarrollo de la tecnología eléctrica. Sus memorias contribuyen a conocer el momento sociocultural en el que se desarrollaron los descubrimientos y las contribuciones más importantes que realizaron los científicos y a quienes la humanidad les debe por ello homenaje y gratitud.

Se ha intentado en la redacción del texto conseguir la mayor claridad que ha sido posible; para ello el autor ha estado atento a todas las preguntas que le hacían los alumnos dentro y fuera del aula, comprobando qué partes de cada lección encerraban mayores dificultades para ellos y observando con detenimiento los errores que se producían con más frecuencia en los exámenes y evaluaciones. Los profesores de la asignatura prestaron una ayuda valiosísima, dando ideas para modificar los planteamientos iniciales. Todas estas observaciones aconsejaron tener que efectuar diversos cambios; en algunos casos, se prepara-

ron más figuras (el libro contiene más de quinientas figuras preparadas por el propio autor), para facilitar una mejor comprensión; en otros, hubo que incluir más ejemplos de aplicación que ilustrasen con mayor vigor los conceptos teóricos explicados. No sé si la obra que se ofrece al lector merecerá su aprobación, lo único que puede decir el autor es que se ha puesto todo el empeño, para que el texto tuviera una alta calidad didáctica, en el que se combinasen de un modo adecuado la teoría y la práctica, facilitando a los estudiantes su estudio. Consideramos que es un deber de todo educador lograr lo que nuestro gran filósofo Ortega y Gasset denominaba la economía de la enseñanza, es decir hacer fácil lo difícil, para optimizar el tiempo del alumno, haciendo que aprenda en un tiempo más breve. Quienes lleguen a utilizar este libro de texto quizá encuentren que algunas secciones debieran ampliarse o detallarse aún más. Cualquier sugerencia nueva o crítica será bienvenida y se tomará en consideración para futuras ediciones.

Deseo hacer patente mi agradecimiento a aquellas personas que en algún momento de mi vida causaron un gran impacto en mi formación. En primer lugar los recuerdos se dirigen a mis padres: mis primeros y mejores maestros, su ejemplo de dedicación y esfuerzo han sido para mí la guía de mi vida. También quisiera agradecer a mis profesores, compañeros y colaboradores en los centros donde he impartido docencia, por la ayuda prestada en cada momento y por la amistad que nos ha unido desde entonces. Quiero aprovechar esta oportunidad, para dar las gracias colectivamente a muchos profesores de Ingeniería Eléctrica de la Universidad española y de Latinoamérica por las muy útiles sugerencias recibidas, demasiado numerosas para agradecerlas individualmente, aunque no por ello menos apreciadas. Es enorme también la deuda de gratitud a mis alumnos, por ayudarme con sus preguntas a buscar mejores ideas para escribir mejor y hacer más asequible la transmisión de información. A ellos va dirigido especialmente este libro, para que encuentren menos dificultades en el estudio de la asignatura. Representan el público de ese gran teatro que son las aulas, donde el actor desea ser escuchado con interés y cariño. Su actitud favorable y respetuosa en todo momento me proporcionaron el impulso suficiente para llevar a cabo esta ardua tarea.

Deseo agradecer de un modo especial a mi esposa e hijos la paciencia mostrada durante la preparación de este libro y por comprender mi vocación docente, por su aliento y comprensión, y a quienes esta obra les ha restado muchísimas horas de convivencia. En reconocimiento de ello, quisiera dedicar este libro como homenaje a la memoria de mis padres y también a mis hermanas, esposa, hijos y nietos, por su incondicional apoyo y cariño en todas las etapas de mi vida.

Esta edición se publica bajo el patrocinio de la editorial Pearson, y se debe a la tenacidad del editor universitario, Miguel Martín-Romo, que ha puesto un gran empeño para que la obra se confeccionara en un tiempo récord y con una gran calidad de presentación.



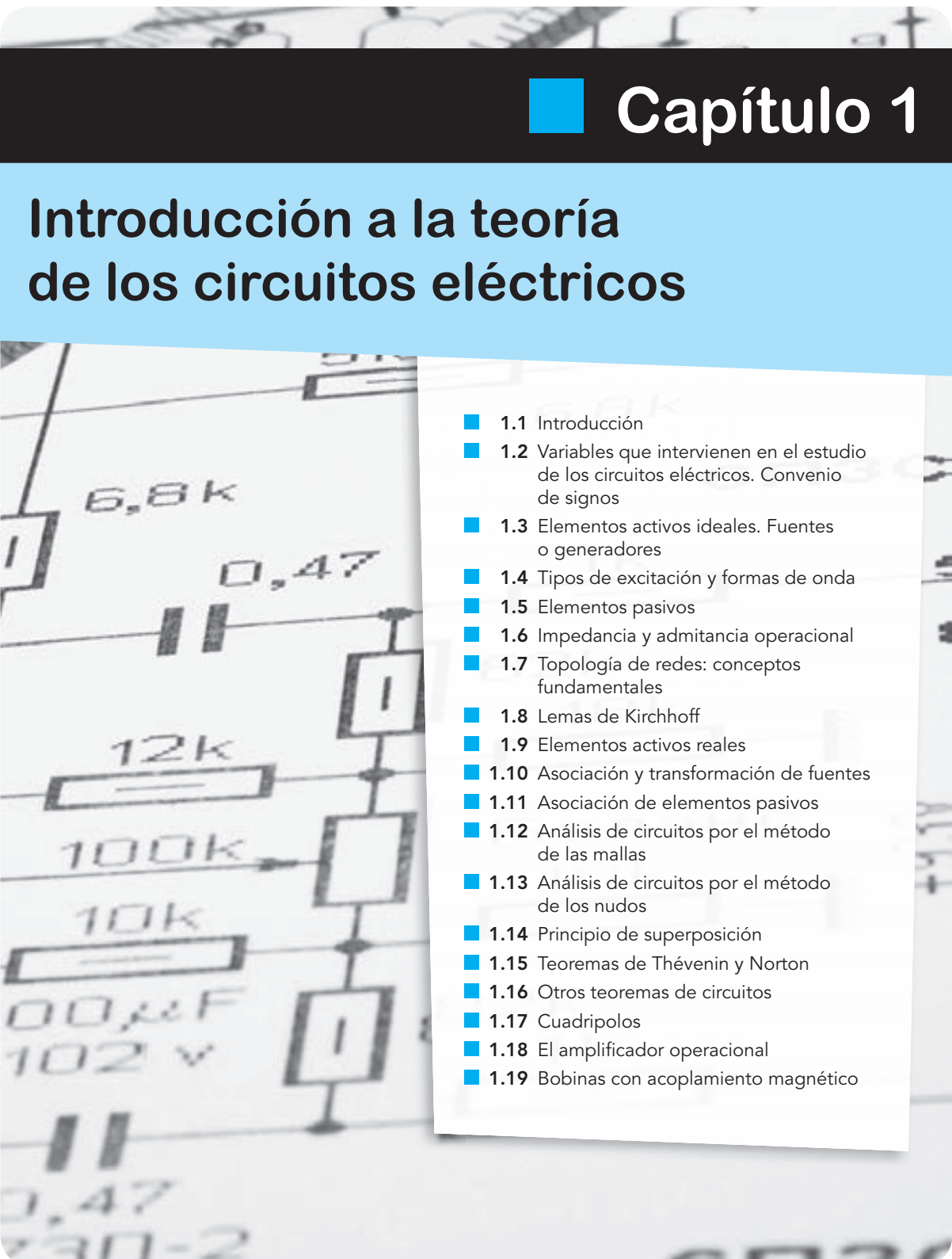
Al estudiante

El objeto de esta obra, pensada y escrita para ti, es ayudarte en el estudio de los Circuitos Eléctricos como preámbulo a una formación en Electrotecnia u otras aplicaciones prácticas de la Ingeniería Eléctrica. Aunque la guía de un profesor experto es muy beneficiosa para ti, eres tú y solamente tú, el único responsable del progreso en tus estudios. El éxito depende completamente de que tomes parte activa en el proceso de aprendizaje. Tú no estás aprendiendo porque estés almacenando en tu mente más conocimientos o más información. Una persona aprende, cuando ha comprendido el significado de lo que estudia, desarrollando una capacidad para enfrentarse con situaciones nuevas y mejorando unas aptitudes de razonamiento. Decía James Clerk Maxwell en su conferencia inaugural en el King's College de Londres en 1860: *Quien se aprende una fórmula, se halla a merced de su memoria, pero aquel que domina un principio puede mantener su cabeza libre de fórmulas, pues sabe que puede fabricar las que le hagan falta, en el momento que quiera. ¿Será necesario añadir que, a pesar del rechazo natural del espíritu ante el duro proceso de pensar, este proceso una vez realizado hace sentir al espíritu un poder y alegría que le animan a seguir adelante, olvidando el trabajo y las angustias que acompañan el paso de un estado de desarrollo a otro?* Querido estudiante, las palabras anteriores resumen un extenso tratado pedagógico, ¡aprende de ellas, transformarán tus hábitos de estudio!

Dada la revolución tecnológica actual, que pone en duda los contenidos tradicionales, se hace cada vez más acuciante el entrenamiento de las facultades intelectuales, mediante un desarrollo equilibrado de la mente. Es importante que tú, estudiante, comprendas esta lección y te ejercites en un aprendizaje anticipador e innovador. Debes estar preparado y ser lo bastante flexible para reeducarte y sintonizar con las nuevas situaciones, acomodándote rápida y fácilmente a la novedad constante y a los numerosos cambios que intervendrán en tu carrera futura. Utiliza este libro diariamente. Un día o dos antes de cada clase, haz un examen preliminar de la lección que vaya a explicar el profesor en el aula, esto despertará tu interés por el tema y te permitirá conocer la organización del capítulo. Es como mirar la imagen de un rompecabezas antes de juntar sus piezas; tener una idea general del capítulo te ayudará considerablemente para ver cómo se relacionan los temas entre sí. Conviene en esta revisión que te formules preguntas y anotes las partes oscuras, para que prestes más atención en las explicaciones de clase en lo concerniente a estos puntos. Esta acción mejorará tu aprovechamiento en el aula y favorecerá tu concentración. Cada día, después de asistir a las clases, conviene que hagas una lectura más detenida de los temas explicados en el aula. El libro contiene muchos ejemplos de aplicación que te ayuda-

rán a comprender mejor las cuestiones expuestas, procura hacer los problemas por tu cuenta y compara los resultados con el libro, este es un método inestimable para comprobar tu propio progreso. Si un problema se te resiste, vuelve a repasar la teoría otra vez e inténtalo resolver nuevamente. Este procedimiento podrá parecerle lento al principio, pero conforme avance el curso verás los resultados: estás mejorando tus facultades intelectuales. Si aún te quedan dudas, aprovecha las horas de tutorías de los profesores para hacerles las consultas correspondientes. Al finalizar cada capítulo, es interesante hacer un repaso general, exponiendo verbalmente, con tus propias palabras, lo que has leído. Te puedes ayudar con resúmenes que hayas preparado con antelación, lo que mejorará tu aprendizaje en lo referente a organización y comprensión. Para concluir, conviene que compruebes tus conocimientos, resolviendo los problemas que consideres más adecuados y que hay preparados al final de cada capítulo; el objetivo es obligarte a que actúes por tu cuenta, sin ayuda, esforzándote en aplicar tus conocimientos. Su resolución te ayudará a desarrollar métodos lógicos de pensamiento, adquiriendo la suficiente práctica y destreza en la aplicación de los conceptos estudiados.

Espero que disfrutes con la lectura de este libro y que sea de gran utilidad en tus estudios. Consérvalo cuando apruebes la asignatura, te servirá en tu carrera profesional. *Bienvenido al maravilloso mundo de la Ingeniería Eléctrica.*



Capítulo 1

Introducción a la teoría de los circuitos eléctricos

- 1.1 Introducción
- 1.2 Variables que intervienen en el estudio de los circuitos eléctricos. Convenio de signos
- 1.3 Elementos activos ideales. Fuentes o generadores
- 1.4 Tipos de excitación y formas de onda
- 1.5 Elementos pasivos
- 1.6 Impedancia y admitancia operacional
- 1.7 Topología de redes: conceptos fundamentales
- 1.8 Lemas de Kirchhoff
- 1.9 Elementos activos reales
- 1.10 Asociación y transformación de fuentes
- 1.11 Asociación de elementos pasivos
- 1.12 Análisis de circuitos por el método de las mallas
- 1.13 Análisis de circuitos por el método de los nudos
- 1.14 Principio de superposición
- 1.15 Teoremas de Thévenin y Norton
- 1.16 Otros teoremas de circuitos
- 1.17 Cuadripolos
- 1.18 El amplificador operacional
- 1.19 Bobinas con acoplamiento magnético

1.1. Introducción

Las bases científicas de la teoría de los circuitos eléctricos, se asientan en las leyes de Ohm y los lemas de Kirchhoff y se aplicaron inicialmente a circuitos recorridos por corrientes estacionarias que no variaban con el tiempo, lo cual era lógico suponer debido a que los únicos generadores de fuerza electromotriz existentes en esa época (mitad del siglo XIX) eran de corriente continua, basados en las pilas eléctricas inventadas por Alessandro Volta en 1800. Más tarde con el desarrollo de la corriente alterna a base de generadores electromecánicos, se dispuso de fuentes de f.e.m. cuya magnitud era una función sinusoidal del tiempo (hacia el año 1880). Estas variaciones aumentaron la complejidad del estudio de los circuitos eléctricos, ya que aparecieron nuevos fenómenos que había que incluir en las ecuaciones básicas. Tratándose de corrientes y tensiones cuyas variaciones con el tiempo eran lentas¹, se pudo realizar una adaptación de las leyes de Ohm y Kirchhoff, utilizando diagramas vectoriales e incluyendo también el cálculo con números complejos, que se denominó inicialmente *método simbólico*.

¿Pero qué es un circuito eléctrico? Un circuito o red eléctrica es un conjunto de elementos combinados de tal forma que existe la posibilidad de que se origine una corriente eléctrica. Existen unos elementos denominados *activos* o también fuentes o generadores que suministran energía eléctrica y otros elementos denominados *pasivos*, que disipan o almacenan este tipo de energía. Podemos simbolizar un circuito eléctrico por el bloque de la Figura 1.1, que está sometido a unos estímulos de entrada denominados excitaciones, debidas a la acción de las fuentes, originando unas respuestas en el circuito, que son las tensiones y corrientes que aparecen en la red.

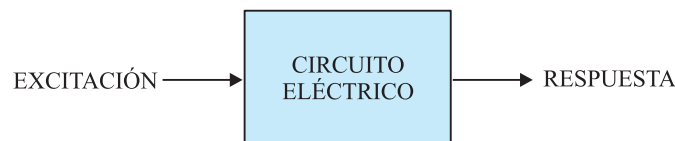


Figura 1.1 Diagrama de bloque de un circuito eléctrico

En el estudio de los circuitos, existen dos ramas bien determinadas; una se denomina *el análisis de redes*, cuya misión es calcular la respuesta, conociendo la excitación y la topología del circuito, y otra da origen a la *síntesis de redes* cuyo objetivo es determinar los componentes de un circuito, cuando se conoce la excitación y la respuesta del mismo. En este texto, solo se estudia el análisis de redes, para ello, es necesario representar un sistema físico por un modelo eléctrico equivalente y consiste en aplicar posteriormente diversos teoremas, que en general utilizan como base los lemas de Kirchhoff.

Según la naturaleza de la función de excitación, se obtienen diversos capítulos interesantes en el estudio de los circuitos eléctricos. Si esta función es invariante en el tiempo se obtienen los *circuitos excitados con corriente continua* (c.c.); si la función excitación

¹ Cuando las tensiones y corrientes varían lentamente, se dice que son de naturaleza cuasiestacionaria, lo que significa, más concretamente, que las dimensiones del circuito son pequeñas comparadas con la longitud de onda de las señales que lo recorren, o de otra forma, la perturbación eléctrica se propaga en el circuito instantáneamente.

es sinusoidal, se obtienen los *circuitos excitados con corriente alterna sinusoidal* (c.a.), que son de gran importancia, ya que en la práctica, la c.a. sinusoidal es la base de la generación, transformación y distribución de la energía eléctrica. En este capítulo se exponen conceptos generales de la teoría de circuitos, válidos para c.c. y c.a., sin embargo los ejemplos tratados se realizan con fuentes invariantes en el tiempo, para que el lector pueda aplicar inmediatamente y de una forma sencilla los teoremas formulados sin la complejidad aparente que supone al principio la c.a., (cuyo estudio particular se realiza en el Capítulo 2).

La representación matemática del comportamiento de un circuito hace uso de ecuaciones diferenciales, cuya solución completa comprende dos partes; una que es la solución del sistema homogéneo, que se denomina respuesta *natural o propia* del circuito y que es independiente del tipo de excitación y otra que es la *solución particular* de la ecuación diferencial, que se denomina *respuesta forzada* y que depende del tipo de excitación. En circuitos pasivos que contienen resistencias, la respuesta natural debe ser necesariamente amortiguada, y viene caracterizada por términos exponenciales decrecientes; mientras que esta respuesta no sea despreciable se dice que el circuito funciona en *régimen transitorio* y cuando al cabo de un cierto tiempo esta respuesta tiende a cero, se dice que el circuito funciona en *régimen permanente*. En lo que sigue se supone que el tiempo transcurrido desde que se conectaron las excitaciones al circuito es lo suficientemente grande para que los términos transitorios no influyan en la respuesta, es decir solo se hará un estudio del régimen permanente del circuito. El Capítulo 4 se dedica al estudio específico del comportamiento transitorio de los circuitos eléctricos cuya base matemática se apoya en el concepto de transformada de Laplace.

■ 1.2. Variables que intervienen en el estudio de los circuitos eléctricos.

Convenio de signos

Las principales variables que intervienen en el estudio de los circuitos eléctricos son: corriente, tensión y potencia. La definición de estas variables ya las conoce el lector de un curso de Física Universitaria, pero consideramos de gran importancia dar un repaso, siquiera somero, para afianzar conceptos que a partir de ahora van a ser de uso vulgar para el estudiante. También, y antes de repasar los lemas de Kirchhoff, se incluirán en este epígrafe los convenios de signos utilizados en el estudio de los circuitos eléctricos. Debe señalarse que los símbolos de las magnitudes eléctricas, así como los de sus unidades en el Sistema Internacional (SI), están normalizados y se encuentran en la Norma UNE-EN 60027-1:2009, *Símbolos literales empleados en electrotecnia. Parte 1: Generalidades*. Esta Norma es la versión oficial, en español, de la Norma Europea EN 60027-1:2006, que a su vez adopta las Normas Internacionales de la Comisión Electrotécnica Internacional CEI 60027-1:1995. Es por ello que en esta obra se seguirán sus recomendaciones en cuanto a la nomenclatura de las magnitudes y sus unidades y que se irán incluyendo progresivamente en el texto. Debe destacarse que para los símbolos de las magnitudes se debe utilizar el tipo de letra itálica (inclinada) y para los símbolos de las unidades se deben emplear caracteres romanos (verticales).

1.2.1. Corriente eléctrica

El origen de todos los fenómenos eléctricos es la existencia de la carga eléctrica $q(t)$ y el movimiento de la misma. La unidad de carga en el sistema SI es el *culombio*, y se representa por la letra C. Las cargas eléctricas pueden ser positivas y negativas. Se demuestra experimentalmente que la carga eléctrica solamente existe en múltiplos enteros positivos o negativos del valor de la carga del electrón $q_e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C; esto implica que la carga está cuantizada.

La corriente eléctrica es el movimiento de las cargas eléctricas a lo largo de caminos específicos y se representa por la letra i o I según que la magnitud dependa o no del tiempo. La corriente eléctrica representa la variación de la carga $q(t)$ con respecto al tiempo que se produce en la sección transversal de un conductor, es decir:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad [\text{A}] \quad (1.1)$$

La unidad de la corriente eléctrica es el *amperio* (A). La corriente eléctrica se considera que es el movimiento de cargas positivas (convenio debido a Benjamín Franklin), aunque sabemos que la conducción en los metales, se debe en realidad al movimiento de los electrones libres.

De acuerdo con la Norma UNE-EN 60375:2004 (CEI 60375:2003) *Convenios relativos a los circuitos eléctricos y magnéticos*, para indicar el sentido de la corriente eléctrica en un conductor, se utiliza una flecha de referencia encima o al lado de aquél, que muestra también el valor o magnitud de la corriente. (Debe destacarse aquí que la corriente eléctrica es una magnitud escalar, el vector adyacente al conductor indica en realidad el sentido vectorial de la velocidad de las *cargas positivas* que se mueven dentro del conductor). En la Figura 1.2a se muestra un tramo de conductor que lleva una corriente que se dirige de A a B y vale 5 amperios. Cuando se invierte la corriente y circula de B a A como se muestra en la Figura 1.2b, entonces su valor cambia de signo, es decir -5 A, siempre que se conserve el sentido de la flecha apuntando de A a B, o podemos poner $+5$ A si se cambia el sentido de la flecha. El mismo criterio se emplea para corrientes que varíen con el tiempo $i(t)$; en este caso si el valor de $i(t)$ para un tiempo definido t_a es positivo, es decir $i(t_a) > 0$, entonces el movimiento de las cargas positivas en ese instante sigue el sentido mostrado por la flecha (Figura 1.2c). Si $i(t_b) < 0$, entonces en $t = t_b$ las cargas positivas (corriente) circulan en sentido opuesto al indicado por la flecha.

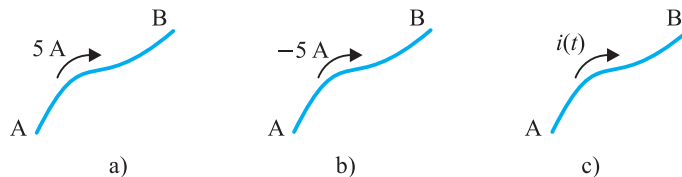


Figura 1.2 Sentidos de referencia de la corriente eléctrica

1.2.2. Potencial eléctrico. Tensión. Diferencia de potencial

El *potencial eléctrico* v en un punto de una red es la energía potencial por unidad de carga, de una carga colocada en ese punto. El potencial eléctrico en un circuito es análogo al potencial gravitatorio. Como en el caso del campo gravitatorio, el nivel cero del potencial

eléctrico es arbitrario; solamente tienen significado físico las diferencias de la energía potencial. Es por ello que se define la *diferencia de potencial (d.d.p.) o tensión* entre dos puntos A y B de un circuito, como el trabajo realizado para mover la carga unidad entre esos puntos. Si se denomina dw el trabajo (en julios, J) para mover un diferencial de carga dq entre dos puntos A y B, cuyos potenciales eléctricos son v_A y v_B respectivamente y se designa u_{AB} a la tensión o diferencia de potencial entre esos dos puntos, que puede escribirse en general como $u(t)$, el valor de esta tensión es:

$$u_{AB} = u(t) = v_A - v_B = \frac{dw}{dq} \quad [\text{V}] \quad (1.2)$$

Tanto el potencial eléctrico $v(t)$ como la tensión $u(t)$ se miden en *voltios* (V) y se representan en el primer caso por las letras v o V , según que sus magnitudes dependan o no del tiempo, y en el segundo por las letras u o U respectivamente.

En la Figura 1.3 se muestra un circuito con dos terminales o accesos A y B que en teoría de circuitos recibe el nombre de **dipolo** y que algunos autores también denominan puerto (del inglés *port*). Dentro del rectángulo puede existir un solo elemento de circuito o una combinación de ellos. Es indiferente su contenido, ya que estamos interesados solamente en lo que sucede en los terminales de acceso externo.

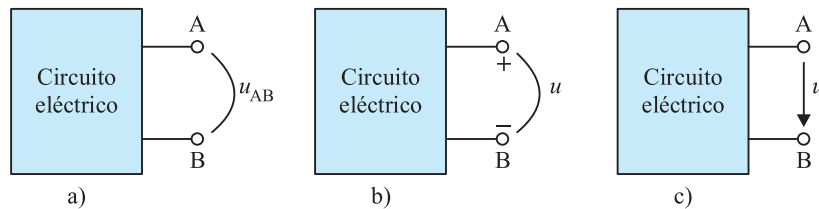


Figura 1.3 Sentidos de referencia de la tensión eléctrica

De acuerdo con la Norma UNE-EN 60375:2004 (CEI 60375:2003) mencionada antes, para indicar la polaridad de referencia de la tensión entre los terminales A y B, se puede hacer de los tres modos equivalentes siguientes:

- Mediante la notación de doble subíndice, con el significado indicado por la ecuación (1.2). El símbolo literal u_{AB} se coloca al lado de una línea, recta o curva, dibujada entre los dos puntos o en su caso terminales A y B cuya tensión se designa, tal como se muestra en la Figura 1.3a.
- Con una línea recta o curva, pero en lugar del doble subíndice en el símbolo literal u , se coloca un signo más (+) junto al primer punto indicado en el subíndice. Si se quiere, para mayor claridad, se puede poner un signo menos (−) en el otro extremo de la línea tal como se indica en la Figura 1.3b. Se puede omitir la línea cuando no exista ambigüedad en la identificación de los puntos terminales.
- Con una flecha dirigida del punto de primer subíndice al del segundo y colocando el símbolo literal que representa la tensión u al lado de la flecha, tal como se señala en la Figura 1.3c.

En general, en este texto se seguirá la notación mostrada en la Figura 1.3b, prescindiendo para mayor sencillez (y siempre que no haya ambigüedad) de dibujar la línea entre los puntos terminales. Algunos autores describen también la tensión entre A y B (o de A

sobre B) en términos de *caídas o elevaciones* de potencial. Así para utilizar un ejemplo concreto, supóngase que en cualquiera de los esquemas mostrados en la Figura 1.3, la d.d.p. entre los terminales o puntos A y B es de 2 voltios. Se puede decir entonces que se tiene una caída de potencial de A a B de 2 V ($u_{AB} = +2$ V), o una elevación de potencial de B a A de 2 V. En términos energéticos, se tiene una caída de potencial entre A y B, cuando la carga unidad *desarrolla* un trabajo al moverse de A hasta B; o al contrario, se tiene una elevación de potencial entre B y A cuando se *requiere* un trabajo externo para mover la carga unidad desde B hasta A.

Teniendo en cuenta la analogía entre el potencial eléctrico y el campo gravitatorio terrestre, podemos comprender mejor estos conceptos. En la Figura 1.4a se muestra una masa de 1 kg situada a una altura $h_A = 7$ m representada por el nivel A, se ha considerado otra altura $h_B = 5$ m representada por el nivel B, por debajo de A. Está claro que el potencial (altura o nivel) de A es más alto que el B ($h_A > h_B$). De este modo de A a B se tiene una *caída de potencial*, o bien de B a A existe una *elevación de potencial*. Si la masa de 1 kg se suelta en el nivel A, la masa caerá atraída por el campo gravitatorio G pasando por el nivel B, *desarrollando* un trabajo y sufriendo una pérdida de energía potencial. Si por el contrario se considera que la masa está inicialmente en el nivel B, entonces para pasar al nivel A que está más alto, será necesario que un agente externo comunique una energía a la masa, en contra de las fuerzas del campo gravitatorio para mover la masa desde B hasta A. Esta energía quedará almacenada como energía potencial de la masa en el nivel A.

En el caso de los circuitos eléctricos, en la Figura 1.4b, se muestra una carga eléctrica de 1 culombio, que en el punto A está a un potencial $V_A = 7$ voltios (respecto a un referencial que se denomina tierra en el punto O) y en el punto B a un potencial $V_B = 5$ voltios. De este modo entre A y B se tiene una *caída de potencial* $U_{AB} = 2$ V, o bien de B a A existe una *elevación de potencial* de 2 voltios. Si la carga de 1 C se deja en el punto A, la carga atraída por el campo eléctrico E pasará al punto B, *desarrollando* un trabajo y sufriendo una caída de potencial eléctrico. Si por el contrario se considera que la carga está inicialmente en el punto B, entonces para pasar al punto A que está a mayor potencial, será necesario que un agente externo comunique una energía a la carga, en contra de las fuerzas del campo eléctrico, para mover la carga desde B hasta A. El agente externo en este caso es el generador eléctrico que debe elevar el potencial de las cargas eléctricas, mientras que en los elementos pasivos se produce una caída de potencial, desarrollándose una energía que debe suministrar el generador.

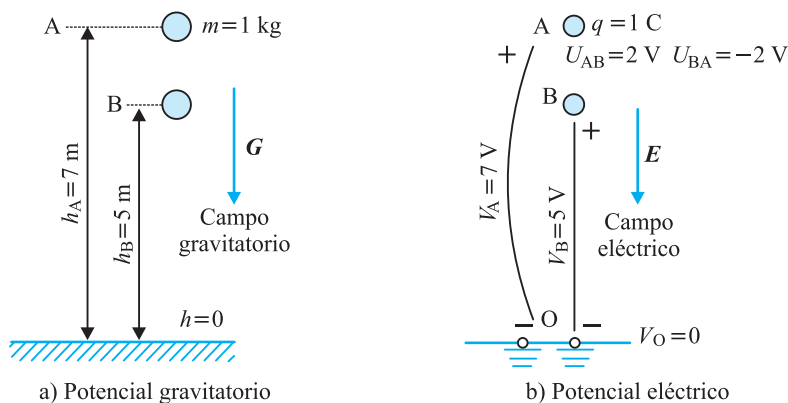


Figura 1.4 Analogía del potencial eléctrico con el gravitatorio

Debe tenerse en cuenta además que la d.d.p. o tensión cumple con la siguiente relación: $U_{ij} = -U_{ji}$. Por ejemplo para el caso de la Figura 1.4b se tiene que $U_{AB} = 2$ V, por lo que la tensión entre los puntos B y A será $U_{BA} = -2$ V (en definitiva da lo mismo decir que el potencial eléctrico de A es 2 voltios más positivo que B, o que el punto B es 2 voltios más negativo que A).

La d.d.p. entre dos puntos extremos de un circuito se obtiene como la suma de las tensiones entre los diferentes puntos intermedios y por consiguiente si se considera por ejemplo que en un circuito se tienen unas tensiones: $U_{AB} = +10$ V; $U_{BC} = -6$ V; $U_{CD} = +11$ V, se tendrá un d.d.p. entre los puntos A y D de valor: $U_{AD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} = +10 - 6 + 11 = 15$ voltios, lo que indica que el punto A está a un potencial de 15 V por encima del punto D. Si se desea calcular la d.d.p. entre los puntos C y A resultará: $U_{CA} = U_{CB} + U_{BA} = -U_{BC} - U_{AB} = -(-6) - (10) = -4$ voltios, lo que indica que el punto C está a 4 V por debajo del potencial del punto A. Es importante escribir correctamente la secuencia de letras de las tensiones para no cometer errores.

■ 1.2.3. Potencia eléctrica

Una carga dq que se mueve desde un potencial v_A hasta un potencial v_B , desarrolla un trabajo que según (1.1) y (1.2) viene expresado por:

$$dw = dq(v_A - v_B) = dq \cdot u_{AB} = (idt) \cdot u_{AB} \quad [\text{J}] \quad (1.3)$$

Como sabemos, la potencia eléctrica es el trabajo realizado por unidad de tiempo. De este modo y teniendo en cuenta (1.3) y designando de una forma general a u_{AB} por $u(t)$ se puede escribir:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = u(t) \frac{dq}{dt} = u(t)i(t) \quad [\text{W}] \quad (1.4)$$

La potencia eléctrica se mide en *vatios* (W). Como quiera que la potencia eléctrica depende de dos variables: tensión y corriente, habrá que tener en cuenta los sentidos de referencia de ambas magnitudes para obtener el sentido de la potencia. En la Figura 1.5a se muestra un dipolo en el que se señalan los signos de la tensión y el sentido de la corriente. La potencia eléctrica que *entra* en el dipolo viene definida por la expresión:

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (1.5)$$

si $p(t) > 0$, entonces el dipolo M recibe o *absorbe* potencia actuando como un consumidor o carga. Si $p(t) < 0$, entonces el dipolo M produce o *entrega* potencia (energía) como una fuente o generador. Comprobemos que estas afirmaciones son correctas: supóngase inicialmente que $u > 0$ e $i > 0$, al ser $u > 0$, entonces de acuerdo con la polaridad de la tensión de la Figura 1.5a, se tiene que $u_A > u_B$ y al ser la corriente $i > 0$, las cargas eléctricas (positivas) irán del terminal A al B, sufriendo una caída de potencial, por lo que dichas cargas perderán energía potencial, la cual será absorbida por el dipolo M, es decir resulta $p(t) > 0$.

Consideremos ahora el caso contrario, supóngase entonces que por ejemplo se tiene $u > 0$, e $i < 0$, entonces las cargas positivas van de B a A, sufriendo una elevación de potencial, por lo que dichas cargas ganan energía potencial, la cual será entregada por el dipolo, es decir resulta $p(t) < 0$; este es el caso representado en la Figura 1.5b (el mismo resul-

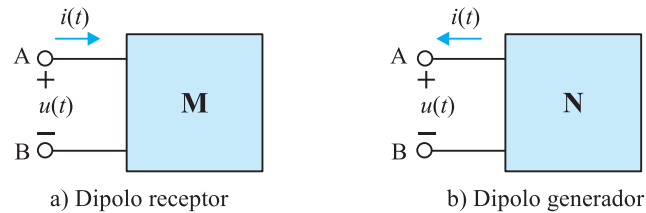


Figura 1.5 Sentido de la potencia eléctrica

tado se obtiene considerando $u < 0$ e $i > 0$). En la práctica, no es conveniente trabajar con potencias negativas, por lo que se prefiere hablar de potencias absorbidas y potencias generadas. Hemos visto que el dipolo M de la Figura 1.5a *absorbe* potencia y trabaja como receptor; en este caso observamos también que la corriente *entra* por el terminal positivo del dipolo. Al contrario, el dipolo N de la Figura 1.5b *suministra* potencia y trabaja como generador; en este caso observamos que la corriente *sale* por el terminal positivo. De este modo se puede decir que la potencia *absorbida* por un dipolo, es el producto de la tensión por la corriente que *entra* por el terminal positivo (dipolo receptor o carga), mientras que la potencia *suministrada* por un dipolo, es el producto de la tensión por la corriente que *sale* por el terminal positivo (dipolo fuente o generador). Veamos ahora cómo se produce la transferencia de energía entre dos dipolos. En la Figura 1.6 se muestran dos dipolos unidos entre sí por un par de terminales con las polaridades indicadas.

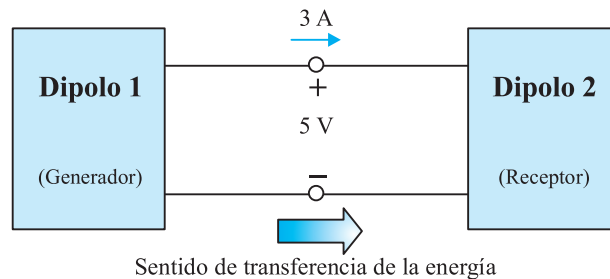


Figura 1.6 Transferencia de energía entre un dipolo generador y otro receptor

El dipolo 1 representa una fuente o generador ya que la corriente sale por su terminal positivo. La potencia *generada* por este dipolo es:

$$P_{\text{generada}} = 5 \cdot 3 = 15 \text{ W}$$

el dipolo 2 representa un receptor o carga, ya que la corriente entra por su terminal positivo. La potencia *absorbida* por este dipolo es:

$$P_{\text{absorbida}} = 5 \cdot 3 = 15 \text{ W}$$

de este modo lo que se cumple en este sistema es que:

$$P_{\text{generada}} = P_{\text{absorbida}}$$

que es simplemente el principio de conservación de la energía. De este modo se produce una transferencia de energía del generador al receptor, como lo muestra el sentido de la flecha.



Comentarios prácticos

Significado del amperio, voltio y vatio

1. El amperio: Para que tenga el lector una idea más concreta de lo que significa el amperio se pueden dar las siguientes cifras: el hombre empieza a sentir la corriente que pasa a través de su cuerpo cuando alcanza los 5 miliamperios (5 mA), si esta asciende a 50 mA resulta peligrosa para su vida; las lámparas incandescentes (bombillas) de uso frecuente en el alumbrado doméstico absorben corrientes entre 0,2 y 0,7 A; los radiadores eléctricos entre 4 y 8 A; una cocina eléctrica entre 5 y 10 A; un motor de un ascensor entre 10 y 20 A; un alternador de una central eléctrica puede suministrar a plena carga una corriente comprendida entre 10 kA y 20 kA. Un rayo puede llegar a tener una intensidad de cresta de 100 kA.

2. El voltio: Las pilas galvánicas en la mayoría de los casos generan una tensión del orden de 1,5 V (aunque hay modelos de 4,5 y 9 V); el acumulador de plomo produce una tensión de cerca de 2 V por celda (como hay seis en serie, resulta un valor total de 12 V); los trenes metropolitanos funcionan con 600 V de corriente continua y las líneas nuevas son de 1.500 V de c.c.; los ferrocarriles españoles funcionan a 3 kV de c.c, pero los trenes de alta velocidad se alimentan a 25 kV de corriente alterna. En los terminales de un enchufe doméstico existe una tensión de 230 V de c.a. La red española de baja tensión está normalizada en los valores de 230 V y 400 V, la red de media tensión cubre los escalones de 3-6-10-15-20-25 y 30 kV, la de A.T. abarca las tensiones de 45, 66 y 132 kV y la de muy alta tensión tiene los valores de 220 y 400 kV. Los alternadores de una central eléctrica generan tensiones entre los 3 kV (pequeños alternadores de centrales hidráulicas) hasta 30 kV en los turboalternadores de las centrales nucleares. La tensión más elevada en las redes de transporte españolas de A.T. es de 400 kV; existen tensiones más elevadas para el transporte de energía eléctrica en líneas de gran longitud; así en EE.UU. hay redes de c.a. de 500 kV y en Canadá de 765 kV; en Rusia existe una línea de 1,2 millones de voltios (1,2 MV) entre Siberia y los Urales. Finalmente un rayo puede desarrollar una tensión que a veces alcanza los 500 MV.

3. El vatio: Las lámparas incandescentes (bombillas) de uso frecuente en el alumbrado doméstico tienen potencias entre 25 y 150 W; los radiadores eléctricos entre 1.000 y 2.000 W; una cocina eléctrica consume entre 1.000 y 2.000 W (y si se incluye el horno, la potencia puede superar los 4 kW); el motor eléctrico de una lavadora tiene una potencia entre 170 y 340 W (lavado o centrifugado respectivamente) y las resistencias de calefacción del agua del lavado tienen una potencia adicional del orden de 2.000 W. Un motor de un ascensor de un edificio común tiene potencias entre 6 y 10 kW. El tren español de alta velocidad AVE (línea Madrid-Barcelona) tiene la tracción eléctrica distribuida con 16 motores asíncronos de 550 kW cada uno, lo que representa una potencia total de 8.800 kW. Los generadores eólicos más grandes tienen potencias unitarias de 2 a 3 MW; los alternadores de una central hidroeléctrica tienen potencias unitarias del orden de 150 MW pero que pueden llegar a 750 MW (la central eléctrica de Itaipú tiene 18 alternadores de 700 MW con una potencia total instalada de 12.600 MW). Los alternadores de las centrales nucleares tienen potencias entre 1.000 y 1.500 MW. Un rayo puede alcanzar una tensión máxima de 500 MV y con corrientes del orden de 100 kA, por lo que desarrolla una potencia instantánea de 50.000 millones de kilovatios, sin embargo teniendo en cuenta que su frente de onda es del orden de 4 μ s y con una duración de 50 μ s (tiempo transcurrido hasta que la tensión se reduce a la mitad del máximo), al integrar la curva de potencia, da lugar a una energía de unos 230 kWh, que es del orden del consumo mensual de una vivienda doméstica. ¡Es decir, el rayo es un ejemplo idóneo para distinguir la potencia de la energía, ya que tiene una potencia destructora enorme, pero con muy poca energía, porque la desarrolla en muy poco tiempo!

1.3. Elementos activos ideales. Fuentes o generadores

Los elementos activos se denominan también fuentes o generadores y son los encargados de suministrar energía eléctrica al circuito. Los dos modelos básicos empleados en el estudio de los circuitos eléctricos son: generadores de tensión y generadores de corriente. Cada uno de los tipos anteriores se pueden subdividir en fuentes independientes o dependientes y también en generadores ideales o reales. En este epígrafe solamente se van a comentar los generadores ideales tanto independientes como dependientes. En el Epígrafe 1.9 se expli-

carán los elementos activos reales, una vez que se hayan estudiado los lemas de Kirchhoff. Vamos a estudiar a continuación los elementos activos ideales.

a) Un generador de tensión ideal, es aquel elemento del circuito que proporciona energía eléctrica con una determinada tensión $u_s(t)$ (que también se suele escribir como $u_g(t)$) que es independiente de la corriente que pasa por él. En la Figura 1.7a se muestran los símbolos normalizados del generador de tensión ideal en el que se indica la tensión $u_s(t)$ del generador con la polaridad del mismo (en este libro se utilizará solo el símbolo de la izquierda de la Figura 1.7a). Así si $u_s(t) > 0$ entonces el terminal A tiene un potencial $u_s(t)$ voltios por encima del terminal B. La tensión u_s puede depender del tiempo o no; cuando depende del tiempo, se representa con minúscula: $u_s(t)$ y cuando no depende del tiempo se representa con mayúscula: U_s . Esta última situación es la que se tiene cuando se trata de un generador de corriente continua, como es el caso de una pila o acumulador. Tratándose de una pila o acumulador ideal también se puede utilizar un símbolo alternativo como es el mostrado en la Figura 1.7b. El terminal más fino y largo representa siempre el borne positivo, mientras que el más corto y grueso representa el terminal negativo (por ello los signos + y - de la Figura 1.7b son redundantes).

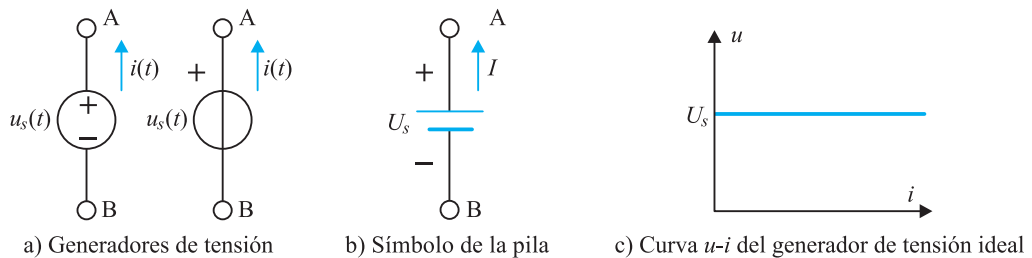


Figura 1.7 Símbolos de generadores de tensión ideales y curva característica u - i

La característica u - i de un generador ideal de tensión es la indicada en la Figura 1.7c, que es simplemente una recta horizontal cuya ordenada representa el valor u_s de la tensión en bornes, ya que de acuerdo con la definición, el valor de u_s no depende de i . Si se conecta una carga al generador de tensión ideal, este suministrará corriente al circuito. El valor de esta corriente dependerá de la magnitud de la impedancia de carga. La potencia eléctrica *suministrada* por el generador de tensión de la Figura 1.7a, si el sentido de la corriente es el indicado, será de acuerdo con el Epígrafe 1.2.3 igual a:

$$p_s(t) = u_s(t)i(t) \quad (1.6)$$

recuérdese que cuando se trata de calcular una potencia *generada*, se toma como corriente positiva la que sale por el terminal positivo del generador.

b) Un generador de corriente ideal, es aquel elemento activo que proporciona energía con una determinada corriente $i_s(t)$ (que también se puede escribir $i_g(t)$) que es independiente de la tensión en bornes. Los símbolos de un generador de corriente son los mostrados en la Figura 1.8a, donde $i_s(t)$ o I_s es la corriente suministrada por el mismo (aquí solo se utilizará el símbolo de la izquierda). El sentido de la corriente se indica por una flecha colocada en el interior del círculo. La característica u - i de un generador de corriente ideal es la mostrada en la Figura 1.8b, que es simplemente una recta vertical cuya abscisa representa el valor de $i_s(t)$ (o I_s para fuentes de c.c.) de la corriente suministrada por el generador, ya que de acuerdo con la definición, el valor de i_s no depende de la tensión en bornes.

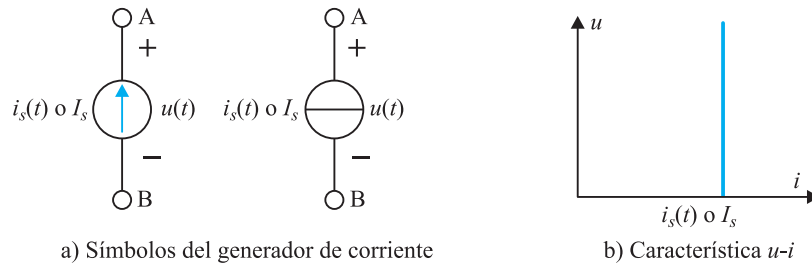


Figura 1.8 Generador de corriente ideal

La tensión del generador depende de la carga conectada externamente y es un error que cometen los principiantes, considerar que la tensión $u(t)$ es cero. Debe quedar claro que $u(t)$ depende del exterior. Consideremos un ejemplo simple: supóngase que $i(t) = 5 \text{ A}$ y que entre A y B se conecta una resistencia de 10Ω ; según la ley de Ohm la d.d.p. U_{AB} será igual a $R i_s$ es decir en este caso 50 V , pero si la resistencia es igual a 20Ω será de 100 V , etc. Es decir U_{AB} depende de la carga externa. Si la tensión que resulta en bornes del generador es $u(t)$ y es $i_s(t)$ la corriente que sale por el terminal positivo, la potencia suministrada por el generador de corriente es:

$$p(v) = u(t) \cdot i_s(t) \quad (1.7)$$

c) Fuentes o generadores dependientes, las fuentes de tensión y corriente que se acaban de describir son elementos en los que la tensión y la corriente tienen valores fijos, y por tanto, no ajustables. Existen otros tipos de fuentes en los que los valores de u o i no son fijos, sino que dependen de la tensión o corriente en otros puntos de la red; este tipo de generadores se conocen con el nombre de generadores dependientes o generadores controlados. Pueden darse cuatro tipos de fuentes controladas, dependiendo de que cada generador suministre una tensión o una corriente y según que la variable de control sea una u o una i . En la Figura 1.9 se muestran esquemáticamente estos generadores, donde el recuadro indica un circuito eléctrico (C.E.).

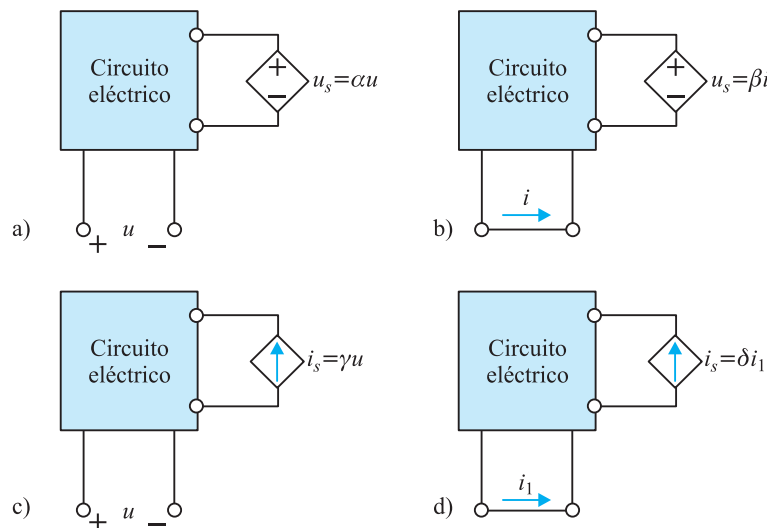


Figura 1.9 Fuentes de tensión y de corriente dependientes

En el caso de la Figura 1.9a se tiene un generador de tensión cuya magnitud depende de la tensión entre otros puntos del circuito, en b) se tiene un generador de tensión cuya magnitud depende de una corriente; en c) existe un generador de corriente cuya intensidad depende de la tensión entre dos puntos del circuito y en d) se tiene un generador de corriente cuya intensidad es función de la corriente en otra parte del circuito. Los generadores dependientes se introdujeron históricamente en la teoría de circuitos para caracterizar el comportamiento de elementos activos electrónicos, como por ejemplo las válvulas y los transistores.

1.4. Tipos de excitación y formas de onda

En el estudio de los circuitos eléctricos, se manejan diferentes funciones de excitación y respuesta que en general pueden variar con el tiempo. La dependencia funcional

$$u = u(t) \quad \text{o} \quad i = i(t)$$

puede darse en forma analítica o gráfica. En ambos casos, se conoce a esa relación funcional con el término de *forma de onda*.

1.4.1. Clasificación de ondas

Las ondas utilizadas en circuitos pueden clasificarse en primer lugar según el signo de la magnitud que la representa, y así se tienen:

- a) **Ondas bidireccionales o de corriente alterna:** son ondas en las que la magnitud toma valores positivos o negativos. En el caso de que la onda represente la fuerza electromotriz (*f.e.m.*) de un generador de tensión, significa que la polaridad de sus terminales va cambiando con el tiempo. En la Figura 1.10 se muestra una onda de este tipo, representada por una función $y = y(t)$.
- b) **Ondas unidireccionales:** son ondas en las que la magnitud que las representa tiene una única polaridad. En especial se tiene la onda de corriente continua de magnitud constante que se representa en la Figura 1.11. Puede realizarse también una clasificación de las ondas según que se repitan o no con el tiempo y así se tienen:

1. Ondas periódicas: son las que se repiten a intervalos iguales de tiempo y en el mismo orden. El tiempo necesario para repetirse el ciclo se llama *periodo* y se representa por T . Si la onda es de la forma $y = f(t)$ se cumple:

$$y = f(t) = f(t + T) \quad (1.8)$$

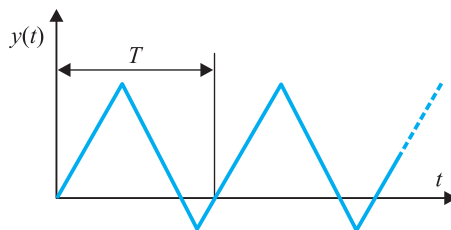


Figura 1.10 Onda periódica

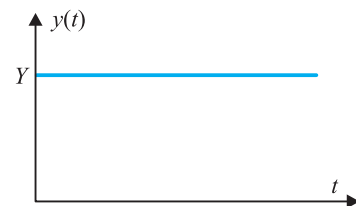


Figura 1.11 Onda de corriente continua

La onda de la Figura 1.10 es, además de alterna, periódica con el periodo indicado en la figura. Una onda alterna periódica de especial importancia la constituye la onda sinusoidal (Figura 1.12) cuya magnitud varía con el tiempo siguiendo una ley seno.

En una onda periódica se denomina ciclo a la parte de la onda comprendida en el intervalo de tiempo de un periodo, por ejemplo en el intervalo $(t, t + T)$. Se denomina *frecuencia* al número de ciclos que tienen lugar por segundo y que se mide en hertz (en español se denomina hercio y su símbolo es Hz) que corresponde a la antigua unidad: ciclo por segundo (c/s).

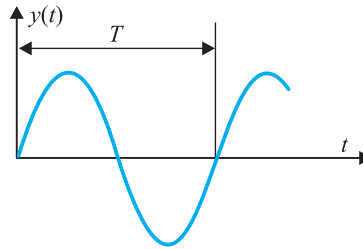


Figura 1.12 Onda periódica sinusoidal

2. Ondas no periódicas: son aquellas ondas que no tienen ciclos de repetición, también se llaman ondas arbitrarias. Un ejemplo de estas ondas se indica en la Figura 1.13. En este capítulo, se va a trabajar fundamentalmente con las ondas de c.c. de magnitud constante y en los Capítulos 2 y 3, con las ondas periódicas alternas sinusoidales. Existen, sin embargo, otro tipo de ondas que son interesantes en el estudio transitorio de circuitos y que se estudiarán en el Capítulo 4 dedicado a los transitorios en los circuitos eléctricos: función rampa, función escalón, pulso rectangular y función impulso o de Dirac (estas ondas tienen también interés en el estudio de las vibraciones mecánicas).

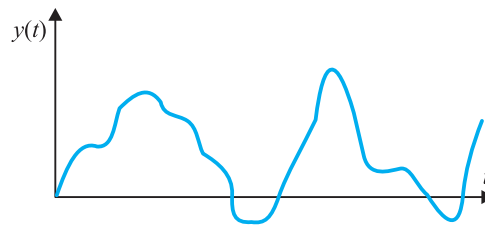


Figura 1.13 Onda aleatoria

■ 1.4.2. Ondas periódicas: valores asociados

Debido a la importancia de estas ondas, van a definirse diversas magnitudes que se emplean en su estudio. Se han visto ya los conceptos de ciclo, periodo y frecuencia; de las definiciones de estas dos últimas magnitudes puede obtenerse la relación:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.9)$$

en la que f representa la frecuencia en hercios y T el periodo en segundos. Si la onda periódica es de la forma: $y = f(t)$ se denomina:

- a) **Valor medio** al promedio integral en un periodo T , o sea, el valor medio en un ciclo, su expresión matemática es:

$$Y_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (1.10)$$

- b) **Valor eficaz** al valor cuadrático medio (conocido también por las iniciales r.m.s. en inglés, *root mean square*) y que significa el valor medio del cuadrado de la función en un periodo T . Su expresión es:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt} \quad (1.11)$$

En el caso de que las ondas que se estudien representen *corrientes*, los conceptos de valor medio y eficaz tienen un significado físico importante, y así puede demostrar el lector que el valor medio indica el valor constante I_{med} de una corriente continua que produce la misma cantidad de electricidad en el periodo T que la onda periódica; mientras que el valor eficaz indica el valor constante I de una corriente continua que produce la misma cantidad de calor en el periodo T que la corriente periódica, al circular por una resistencia R . Al valor máximo que representa la onda periódica se le conoce con el nombre de *valor de cresta* o también *valor de pico*, pudiendo existir dos valores diferentes cuando la onda sea alterna (para valores positivos y negativos).

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.1

Calcular el valor medio y eficaz de la onda representada en la Figura 1.14, determinando previamente el periodo y la frecuencia.

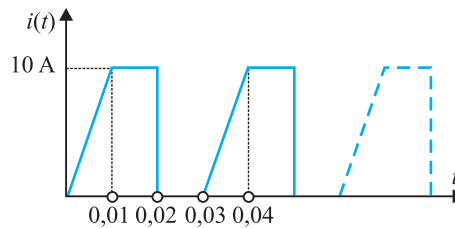


Figura 1.14 Ejemplo de aplicación 1.1

Solución

El periodo es de 0,03 segundos, que corresponde a una frecuencia de:

$$f = \frac{1}{0,03} = 33,3 \text{ Hz}$$

La ecuación de la onda es:

$$\begin{aligned} 0 < t \leq 0,01 & \quad i = \frac{10}{0,01} t = 1.000t \\ 0,01 < t \leq 0,02 & \quad i = 10 \\ 0,02 < t \leq 0,03 & \quad i = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto los valores medio y eficaz son:

$$\begin{aligned} I_{\text{med}} &= \frac{1}{0,03} \left[\int_0^{0,01} 1.000t \cdot dt + \int_{0,01}^{0,02} 10 \cdot dt + \int_{0,02}^{0,03} 0 \cdot dt \right] = 5 \text{ A} \\ I_{\text{ef}} &= \sqrt{\frac{1}{0,03} \left[\int_0^{0,01} (1.000t)^2 \cdot dt + \int_{0,01}^{0,02} 10^2 \cdot dt + \int_{0,02}^{0,03} 0 \cdot dt \right]} = \frac{20}{3} \text{ A} \end{aligned}$$

1.5. Elementos pasivos

Son aquellos componentes de los circuitos que disipan o almacenan energía eléctrica y constituyen por ello los receptores o cargas de una red. Estos elementos son modelos matemáticos lineales e ideales de los elementos físicos del circuito que individualmente pueden presentar las siguientes propiedades: a) *disipación de energía eléctrica* (R : resistencia); b) *almacenamiento de energía en campos magnéticos* (L : coeficiente de autoinducción); c) *almacenamiento de energía en campos eléctricos* (C : capacidad). Las tres propiedades pueden darse en mayor o menor grado en el comportamiento de un componente de un circuito real, por ello las características de los componentes prácticos pueden sintetizarse por medio de una adecuada combinación de R , L y C .

El término *resistencia* o *resistor* se utiliza para caracterizar un componente de un circuito cuyo comportamiento se aproxima idealmente a un elemento R puro. El término *bobina* o *inductor* se refiere a un componente de un circuito cuya principal característica es la inductancia. El condensador indica un componente de un circuito cuyo comportamiento se aproxima idealmente a una capacidad C pura. Los elementos R , L y C se suponen *ideales*, lo cual quiere decir que cada uno tiene unas propiedades únicas e independientes de las características de los otros, y además implica que las relaciones existentes entre la tensión y corriente en cada uno de ellos son lineales y bilaterales, es decir, las relaciones $u = f(i)$ consisten en ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y el *sentido de la corriente* en un elemento pasivo no modifica su *respuesta*. Los valores R , L y C se suponen también independientes de la frecuencia y de las amplitudes de la tensión y de la corriente.

El término *pasivo* significa que los elementos no contienen generadores y en consecuencia no puede aparecer ninguna tensión y corriente en sus terminales si no se aplica una fuente de energía externa. La propiedad eléctrica asociada con cada elemento R , L y C se considera como una *unidad concentrada* individual localizada en un punto del circuito, aunque de hecho en un componente práctico como es el caso de una resistencia, la disipación de energía se produzca a lo largo de toda su longitud física. *La suposición de elemen-*

tos concentrados implica que el efecto que se produce al conectar una fuente, se propaga instantáneamente a todo el circuito y la corriente resultante en un componente determinado es la misma en todas sus partes en cualquier instante de tiempo. Tal suposición simplifica enormemente el análisis de redes y es válida siempre que las dimensiones de los elementos individuales y de todo el circuito sean muy pequeñas (campos cuasiestacionarios); en caso contrario se ha de reconocer la limitación del término elemento concentrado y se debe tener en cuenta la naturaleza real de *parámetros distribuidos* (en la técnica de la Electrotecnia, solo aparecen circuitos con parámetros distribuidos al estudiar líneas de transporte de energía eléctrica *largas* de longitud superior a 300 km). Cuando se estudian sistemas que trabajan a altas frecuencias como ocurre en el caso de las microondas no pueden aplicarse los conceptos de circuito desarrollados en esta lección y se deben emplear directamente las ecuaciones de Maxwell como expresiones más generales que describen los fenómenos electromagnéticos. Se van a estudiar ahora las propiedades fundamentales de los elementos pasivos R , L y C .

1.5.1. Resistencia

Como ya se ha indicado en los párrafos anteriores, la resistencia es el elemento del circuito, en el que se *disipa* energía eléctrica. En la Figura 1.15a se muestra el símbolo de la resistencia eléctrica, en el que se incluye el valor de la misma en ohmios y los sentidos de referencia asociados de tensión y corriente. En el caso de que la resistencia sea variable se emplea el símbolo de la Figura 1.15b (indicando el rango de variación de la misma). En el mercado se encuentra una gran variedad de tipos de resistencias: fijas y variables que pueden estar hechas de carbón, de hilo bobinado, líquidas, etc., las hay también especiales: variables con la tensión (VDR), variables con la luz (fotorresistores), resistencias que disminuyen con la temperatura (NTC o termistores) etc. Las resistencias regulables de pequeña potencia se denominan *potenciómetros* y las de gran potencia reciben el nombre de *reóstatos* que pueden ser a su vez de arranque, de regulación y de carga.

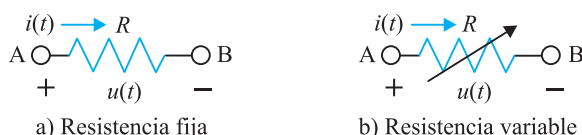


Figura 1.15 Símbolos de la resistencia eléctrica

En el caso de resistencias bobinadas hay que tener en cuenta además del efecto de R , el efecto de la inducción, que será tanto más importante cuanto mayor sea la frecuencia de la corriente. En este caso el circuito equivalente de la resistencia real, teniendo en cuenta el efecto de inducción, es el indicado en la Figura 1.16 (mientras que no se diga lo contrario se supone que se trabaja con resistencias ideales).

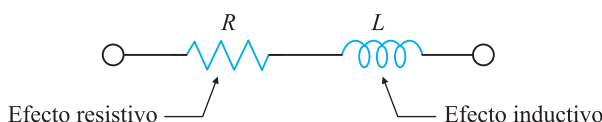


Figura 1.16 Circuito equivalente de una resistencia real

A la hora de especificar una resistencia no es suficiente indicar su valor óhmico, sino que es necesario detallar la máxima potencia que es capaz de transformar en calor por efecto Joule sin calentarse (también puede indicarse la máxima corriente admisible). El valor de la resistencia puede indicarse directamente escribiendo su valor en la superficie o puede emplearse como se hace en electrónica, un código de colores como se muestra en la Figura 1.17, en este caso la resistencia presenta cuatro bandas de colores, numerados a partir de la banda más cercana a uno de los extremos. La 1ª y 2ª banda constituyen las cifras significativas, la 3ª banda indica el factor multiplicador o número de ceros que hay que añadir a las cifras significativas y la 4ª banda indica la tolerancia dentro de la cual el fabricante garantiza el valor de la resistencia. El significado de los colores es el que se indica en la Tabla 1.1

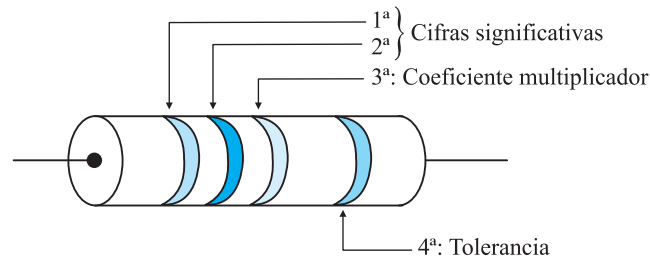


Figura 1.17 Ejemplo de resistencia eléctrica empleada en electrónica. Código de colores

Por ejemplo, si los colores de las bandas son: blanco-violeta-negro-oro, el valor de la resistencia es:

Blanco	Violeta	Negro	Oro
↓	↓	↓	↓
9	7	10	$\pm 5\%$

$\rightarrow 97\ \Omega \pm 5\%$

Tabla 1.1. Código de colores de resistencias eléctricas empleadas en electrónica

Color	Dígito	Multiplicador	Tolerancia
Negro	0	10^0	—
Marrón	1	10^1	—
Rojo	2	10^2	—
Naranja	3	10^3	—
Amarillo	4	10^4	—
Verde	5	10^5	—
Azul	6	10^6	—
Violeta	7	10^7	—
Gris	8	10^8	—
Blanco	9	10^9	—
Oro	—	10^{-1}	$\pm 5\%$
Plata	—	10^{-2}	$\pm 10\%$
Sin color	—	—	$\pm 20\%$

La resistencia eléctrica se mide en *ohmios* (símbolo Ω). La resistencia R de un conductor de resistividad ρ , longitud l y sección transversal uniforme S , es:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad [\Omega] \quad (1.12)$$

el valor de ρ para el cobre recocido a 20°C es: $1,7241 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Además la resistencia varía con la temperatura de acuerdo con la siguiente expresión:

$$R_2 = R_1[1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1)] \quad (1.13)$$

siendo R_1 la resistencia a la temperatura θ_1 , y R_2 la resistencia a la temperatura θ_2 , α indica el coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura, que para el caso del cobre vale $3,93 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. De acuerdo con la ley de Ohm, la relación entre la tensión y la corriente en una resistencia vale:

$$u(t) = Ri(t) \quad (1.14)$$

la relación matemática anterior es únicamente válida para las polaridades mostradas en la Figura 1.15. De este modo se observa que si $i(t) > 0$ (la corriente entra por el terminal A), entonces $u(t) > 0$, lo que significa que la corriente entra por el terminal de mayor potencial A y se traslada al de menor potencial B. Si suponemos que $i(t) < 0$ (corriente entra por el terminal B), entonces $u(t) < 0$ y el terminal B tiene mayor potencial que el terminal A. De nuevo, otra vez, la corriente entra por el terminal cuyo potencial es mayor. Como quiera que la corriente circula por la resistencia de mayor a menor potencial, de acuerdo con el Epígrafe 1.2.3 se tendrá un consumo de potencia en este elemento cuyo valor, teniendo en cuenta (1.4) y (1.14), será:

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{u^2(t)}{R} \quad (1.15)$$

expresión que representa la potencia disipada por efecto Joule. La inversa de la resistencia se denomina **conductancia** y se designa por la letra G , de tal forma que se cumple:

$$G = \frac{1}{R} \quad [\text{S}] \quad (1.16)$$

la unidad de conductancia es el *siemens* (S). (En EE.UU. a la unidad anterior le dan el nombre de *mho*, que es la palabra ohm escrita al revés, y también la simbolizan con la letra griega omega impresa boca abajo Ω^{-1}). Una expresión alternativa de la ley de Ohm en función de la conductancia es:

$$i(t) = \frac{1}{R} u(t) = Gu(t) \quad (1.17)$$

de tal modo que $p(t)$ toma la forma:

$$p(t) = \frac{1}{G} i^2(t) = Gu^2(t) \quad (1.18)$$

El concepto de resistencia se utiliza también para definir dos términos muy comunes en teoría de circuitos: *cortocircuito* y *circuito abierto*. **Un cortocircuito es un conductor ideal que se une entre dos puntos, haciendo de este modo que su resistencia sea cero ohmios.**

El cortocircuito puede llevar cualquier corriente cuyo valor depende del resto del circuito, pero la tensión entre sus terminales es siempre de cero voltios. Al contrario, **un circuito abierto representa una ruptura del circuito en ese punto, por lo que no puede circular corriente**. Se puede considerar como un circuito con resistencia infinita (o conductancia cero) y que puede tener cualquier tensión que depende del resto de la red. En la Figura 1.18 se ilustran estos conceptos.

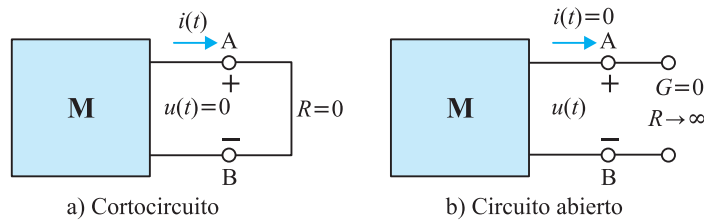


Figura 1.18 Cortocircuito y circuito abierto en un dipolo

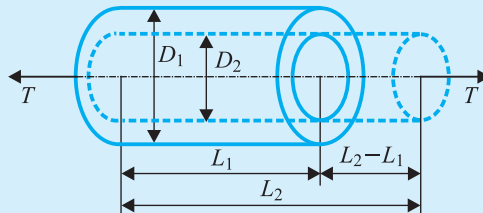


Comentarios prácticos

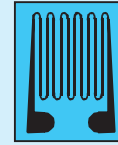
1. Sensores de temperaturas resistivos: De acuerdo con la ecuación (1.13), la resistencia de un conductor es función lineal de la temperatura. Esta ecuación es aproximada y en general la variación de la resistencia de un conductor con la temperatura sigue una ley parabólica de la forma $R = R_0 [1 + \alpha\theta + \beta\theta^2]$, en la que R representa la resistencia del conductor a la temperatura θ y R_0 la resistencia a la temperatura de cero grados. Los valores de los parámetros α y β para el caso del platino son: $\alpha = 3,9 \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}$; $\beta = -5,8 \cdot 10^{-7}/^\circ\text{C}$, lo que significa $\beta \ll \alpha$ por lo que la variación de resistencia con la temperatura sigue prácticamente una ley lineal. Esta propiedad se utiliza para construir detectores de temperatura resistivos (RTD: *Resistance Temperature Detectors*) que consisten en un hilo de platino de alta pureza bobinado sobre un núcleo de cerámica. El elemento sensor se protege habitualmente con una envoltura o pantalla de acero inoxidable, vidrio o cerámica. La envoltura es estanca para proteger la resistencia de los efectos corrosivos de la humedad y el medio a medir. Generalmente estos tipos de transductores se sumergen en el medio fluido en el que se desea medir la temperatura. El tiempo de respuesta de estos termómetros de inmersión es relativamente grande (se requieren de 1 a 5 segundos para alcanzar la temperatura de régimen). Las sondas de platino se construyen con hilos de $25 \mu\text{m}$ de diámetro (cubriendo el rango de temperaturas entre -150°C a 500°C) y presentan una resistencia de 100Ω a 0°C y $138,5 \Omega$ a 100°C . Para obtener estos valores se requiere por consiguiente un hilo de aproximadamente 50 cm de longitud. Para rangos de temperatura entre -180°C y $+1.000^\circ\text{C}$ el hilo de platino tiene un diámetro de $250 \mu\text{m}$.

2. Galga extensométrica, galga de deformación o banda extensométrica (strain gage): La resistencia eléctrica de un hilo conductor no solamente cambia con la temperatura sino también cuando se le somete a una fuerza de tracción. Este efecto se basa en un descubrimiento realizado por Lord Kelvin en 1856, que observó que al cargar mecánicamente unos hilos de hierro y cobre, se producía una variación de resistencia eléctrica, siendo mayor la variación en el hierro que en el cobre. La medida se realizó con la ayuda de un puente de Wheatstone, utilizando un galvanómetro como indicador. Pese a la antigüedad del descubrimiento, hubo que esperar más de 80 años para que se hiciera una aplicación práctica del mismo. En 1938, Ruge y Simmons desarrollaron independientemente un extensómetro eléctrico para estudiar las relaciones tensión mecánica-deformación en un material sometido a impacto y se hicieron sus primeras aplicaciones para fines aeronáuticos. Su difusión y desarrollo se hizo después de la Segunda Guerra Mundial. Se sabe de un Curso de Resistencia de Materiales que al aplicar a un hilo metálico de diámetro D_1 y longitud L_1 , una fuerza de tracción T se produce un cambio en su longitud, que pasa a valer L_2 y una reducción en su diámetro que pasa a valer D_2 , según se aprecia en la Figura 1.19a. El alargamiento absoluto es $\Delta L = L_2 - L_1$ y su valor, por unidad de longitud, se denomina deformación axial o longitudinal: $\varepsilon_a = \Delta L/L_1$, mientras que la contracción en el diámetro es $\Delta D = D_2 - D_1$ y su valor, por unidad, se denomina deformación transversal: $\varepsilon_t = \Delta D/D_1$. Al cociente entre la deformación transversal y la deformación axial, se le conoce como módulo de Pois-

son $\nu = -\varepsilon_t/\varepsilon_a$ (el signo negativo en la expresión anterior se debe a que ambas deformaciones tienen signos contrarios). El valor del coeficiente de Poisson se debe determinar experimentalmente, pero tiene un valor típico de 0,3 para muchos materiales.



a) Deformación de un sólido a tracción



b) Aspecto de una banda

Figura 1.19 Principio de funcionamiento de una banda extensométrica

Cuando un hilo conductor se somete a una fuerza de tracción se produce un cambio no solo en las dimensiones, como se acaba de señalar, sino que además cambia su resistividad (efecto piezorresistivo). La variación de la resistencia eléctrica por unidad de resistencia y por unidad de deformación (alargamiento unitario) se denomina factor de galga. La expresión del factor de galga K es de la forma:

$$K = \frac{\frac{dR}{R}}{\frac{dL}{L}} = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\varepsilon_a} \quad (1)$$

Como quiera que $\varepsilon_a = \Delta L/L$, de la expresión anterior, se deduce la deformación axial del hilo:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{K} \frac{\Delta R}{R} \quad (2)$$

Este efecto se utiliza en la ingeniería civil para medir deformaciones en estructuras. Es teóricamente posible medir deformaciones con un solo hilo como elemento sensible, sin embargo, para no sobrecargar el circuito eléctrico de alimentación y reducir lo más posible el calor generado por la corriente que circula por el hilo, es necesario una resistencia mínima de 100 ohmios, por lo que si se emplea un conductor de constantán (aleación con 45 % de níquel y 55 % de cobre) de 0,025 mm de diámetro, que tiene una resistencia del orden de 1.000 Ω /m, se necesitaría una longitud de 10 cm; esta longitud es prohibitiva si se desean realizar medidas precisas y muy localizadas. El problema fue resuelto por Simmons y Ruge en 1938, que desarrollaron una banda metálica de conductor muy delgado, formando una rejilla plana con el hilo, tal como se muestra en la Figura 1.19b. Estas bandas se pegan con un adhesivo sobre la estructura a ensayar, según se muestra en la Figura 1.20, de tal modo que las deformaciones de la estructura se transmiten a la banda, y al medir con un puente de Wheatstone la variación de la resistencia de la banda, se puede determinar mediante la ecuación (2) la deformación correspondiente de la estructura. Las bandas extensométricas se emplean en ingeniería civil no solamente para medir deformaciones, sino que también constituyen el sensor primario de otro tipo de transductores; por ejemplo para la medida de fuerzas se utiliza un cuerpo elástico cuyo módulo de elasticidad es conocido y constante, sobre el que se pega una banda extensométrica; al aplicar una fuerza a este cuerpo elástico se produce una deformación proporcional a la fuerza, que se traduce según (2) en una variación de la resistencia eléctrica proporcional a la fuerza. Este transductor recibe el nombre de célula de carga (*load cell*). También se utilizan bandas pegadas a pequeños diafragmas para medir presiones de fluidos.

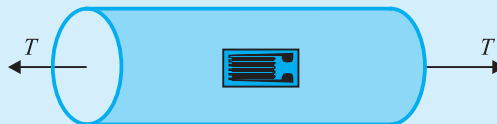


Figura 1.20 Colocación de una banda extensométrica para medir una deformación

La mayoría de los extensómetros eléctricos se fabrican con constantán y el factor de galga K se mantiene constante dentro de un amplio margen de deformaciones y es prácticamente igual a 2. Si se considera por ejemplo una banda típica con $K = 2$ y $R = 120 \Omega$, que detecte una deformación de 10^{-6} m/m (que se denomina microdeformación) se

producirá una variación de resistencia $\Delta R = KR_\varepsilon = 2 \cdot 120 \cdot 10^{-6} = 0,00024 \Omega$, lo que supone un cambio en la resistencia de 0,0002 %. Obviamente para medir cambios tan pequeños, se deberán utilizar circuitos de medida muy sensibles, teniendo especial cuidado en compensar las magnitudes de influencia: interferencia electromagnética, temperatura, etc. Los cables suelen ser apantallados para evitar inducciones externas y el puente de medida dispone de la conexión a tres hilos, para reducir los efectos de las resistencias de los cables de unión.

NOTA: En los comentarios prácticos que se incluyen después del epígrafe dedicado a los lemas de Kirchhoff en este capítulo, se explica el puente de Wheatstone como circuito de medida utilizado para medir deformaciones de estructuras con bandas extensométricas.

■ 1.5.2. Bobina. Inductancia

Es el elemento del circuito capaz de almacenar energía magnética. Las bobinas se construyen arrollando un conductor alrededor de un núcleo, que puede ser o no de material ferromagnético, tal como se muestra en la Figura 1.21.

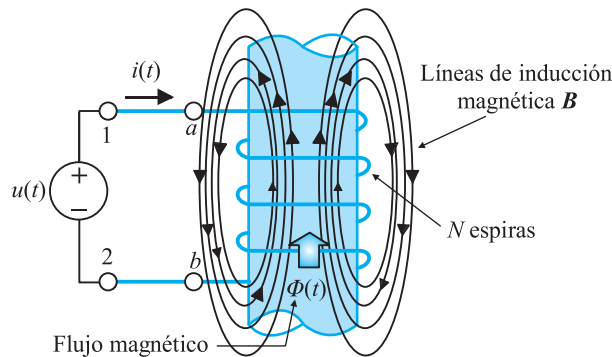


Figura 1.21 Bobina

Cuando fluye una corriente por la bobina se establecen líneas de campo magnético (inducción $\mathbf{B}$) y el número total de estas líneas que atraviesan la sección del núcleo se denomina flujo magnético y se representa por $\Phi(t)$ y en el sistema SI se mide en *webers* (Wb). El flujo magnético total concatenado por la bobina completa se representa por $\Psi(t)$ y si se tienen N espiras se cumple que $\Psi(t) = N\Phi(t)$, y si el circuito magnético es lineal, el flujo total $\Psi(t)$ concatenado por la bobina es proporcional a la corriente que la recorre $i(t)$:

$$\Psi(t) = N\Phi(t) = Li(t) \quad (1.19)$$

La constante L de la ecuación anterior se denomina coeficiente de autoinducción de la bobina o simplemente *inductancia* y se mide en *henrios* (H). Por otro lado si el flujo magnético $\Phi(t)$ varía con el tiempo, se genera en la bobina, de acuerdo con la *ley de Faraday*, una tensión inducida $u_i(t)$ (o *fuerza contraelectromotriz*), que en ausencia de resistencia eléctrica de la bobina coincide con la tensión externa aplicada y que obedece a la expresión:

$$u(t) = u_i(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = N \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (1.20)$$

Que al tener en cuenta (1.19), la relación (1.20) se puede expresar de un modo más útil en el campo de la teoría de circuitos:

$$u(t) = N \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (1.21)$$

La relación (1.21) es únicamente válida para las polaridades mostradas en la Figura 1.21. La d.d.p. en bornes de la bobina es directamente proporcional a la variación de la corriente respecto del tiempo. La inductancia se representa por el símbolo de las Figuras 1.22a o 1.22b según sea el valor del coeficiente de autoinducción fijo o variable.

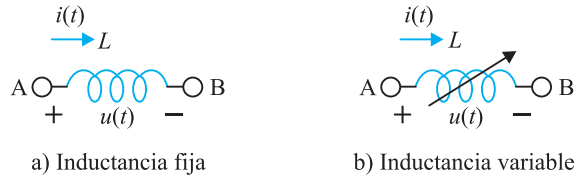


Figura 1.22 Símbolos de la inductancia

Con el convenio de signos de la Figura 1.22 (que coincide con el de la Figura 1.21) y teniendo en cuenta la expresión (1.21), podemos comprobar que un aumento de la corriente corresponde a una tensión positiva y una reducción de la corriente da lugar a una tensión negativa. Se observa también, según indica la ecuación (1.21), que si la corriente $i(t)$ es constante, entonces la tensión $u(t)$ es cero. De este modo, **una bobina alimentada con una corriente continua (estacionaria) actúa como un cortocircuito**. Si en cambio la corriente $i(t)$ cambia con rapidez, se obtendrá una fuerte tensión entre los terminales.

Asociado con el valor de L , la bobina presenta también una resistencia debido a que está realizada por un conductor arrollado sobre un núcleo (incluso a determinadas frecuencias, puede aparecer un efecto de capacidad entre espiras), resultando un circuito equivalente de una bobina real como el indicado en la Figura 1.23. Mientras que no se diga lo contrario se supone que se trabaja con bobinas ideales.

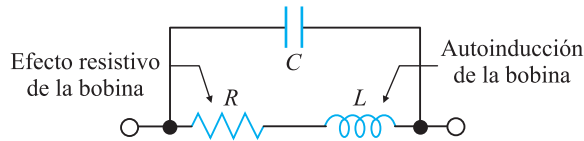


Figura 1.23 Circuito equivalente de una inductancia real

La relación inversa a (1.21) se puede obtener por integración entre un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t , lo que da lugar a:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} u(t) \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(t) dt \quad (1.22)$$

que al integrar nos da:

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(t) dt \quad (1.23)$$

de donde se deduce:

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(t) dt \quad (1.24)$$

o tomando $t_0 = 0$ resulta:

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt \quad (1.25)$$

la expresión anterior indica que la corriente en la bobina en un tiempo $t > 0$ es igual a la corriente inicial $i(0)$ más la corriente que se desarrolla a partir de $t = 0$. Como quiera que la tensión está relacionada con el flujo $\psi(t)$ concatenado por la bobina por la ley de Faraday (1.20), entonces la integral de (1.25) representa el flujo concatenado por la bobina, que al dividir por L nos da la corriente. Analizando la ecuación (1.25) se observa que *la bobina tiene un efecto de memoria*, ya que la corriente (salida o respuesta) en un tiempo $t = t_1$ depende no solamente de la tensión (entrada o excitación aplicada) en el tiempo actual $t = t_1$ sino también del valor pasado de la entrada ($t < t_1$).

Otro aspecto a considerar y que se deduce de la ecuación (1.21), es que la corriente en una bobina no puede variar bruscamente, ya que la tensión se haría infinita, lo que es físicamente imposible. Por ello la corriente en una bobina no puede tener discontinuidades. En particular se cumple:

$$i(0^-) = i(0^+) \quad (1.26)$$

que indica que la corriente inicial justo antes de $t = 0$ es la misma que justo después de $t = 0$. Este concepto es útil en el estudio del régimen transitorio de los circuitos.

Para establecer un flujo en una bobina se requiere una energía de entrada, que queda almacenada después en el campo magnético. La potencia absorbida por la bobina es igual a:

$$p(t) = u(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} \quad (1.27)$$

y la energía almacenada en un intervalo de tiempo comprendido entre 0 y t vale:

$$w(t) = \int_0^t ui dt = \int_0^t L \frac{di}{dt} i dt = \int_0^i Li di = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (1.28)$$

La energía magnética almacenada $w(t)$ se mide en *julios* (J). La corriente $i(t)$ de la bobina constituye una *variable de estado* porque determina el estado energético de la misma.

■ 1.5.3. Condensador

El condensador es un dispositivo o el elemento del circuito capaz de almacenar energía eléctrica. La forma más simple de condensador está formada por dos placas metálicas paralelas de sección S , denominadas armaduras, separadas una distancia d en las que existe un dieléctrico o aislante de permitividad ϵ , tal como se muestra en la Figura 1.24.

Al aplicar una d.d.p. entre las placas $u(t)$ se produce un campo eléctrico en el interior del condensador E , que provoca una separación de las cargas $q(t)$ que aparecen en las pla-

cas y que son iguales y de sentidos opuestos (la carga es positiva/negativa para la placa unida al terminal positivo/negativo del generador de alimentación). En un condensador, el valor de la carga almacenada $q(t)$ es proporcional a la tensión aplicada $u(t)$, es decir:

$$q(t) = Cu(t) \quad (1.29)$$

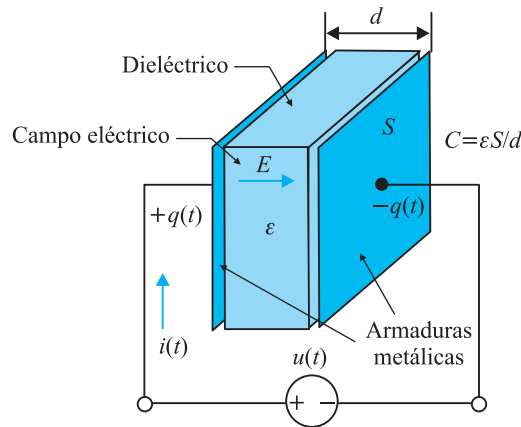


Figura 1.24 Condensador de placas paralelas

La constante de proporcionalidad C es la **capacidad del condensador** y se mide en *faradios* (F). Como quiera que esta unidad es muy elevada se suelen emplear en la práctica submúltiplos de la misma como el microfaradio ($1 \mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$), el nanofaradio ($1 \text{nF} = 10^{-9}\text{F}$) y el picofaradio ($1 \text{pF} = 10^{-12}\text{F}$). El valor de la capacidad de un condensador depende de sus dimensiones y de la permitividad del dieléctrico incluido entre las placas y su expresión para un condensador plano es $C = \epsilon S/d$.

En la Figura 1.25a se muestra el símbolo del condensador, en el que se incluye el valor de la capacidad en faradios y los sentidos asociados de tensión y corriente. En el caso de que el condensador sea variable se empleará el símbolo de la Figura 1.25b.

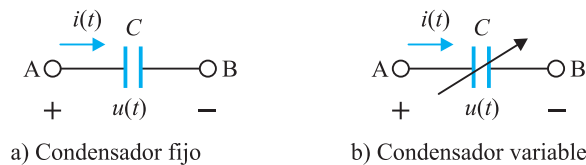


Figura 1.25 Símbolos del condensador

En un condensador debe definirse el valor de la capacidad en faradios y también la tensión máxima que es capaz de soportar entre sus terminales sin que se perfora el dieléctrico. (En los condensadores empleados para corregir el factor de potencia de las instalaciones industriales, en vez de señalar la capacidad, se suele dar el valor de la potencia reactiva, conceptos que se estudiarán en el Capítulo 2). En la práctica el condensador suele presentar unas pérdidas representadas por medio de una resistencia en paralelo con el condensador como indica la Figura 1.26 (mientras no se diga lo contrario, se supone que se trabaja con condensadores ideales).

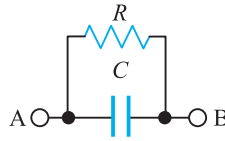


Figura 1.26 Circuito equivalente de un condensador real

La relación entre la tensión aplicada y la corriente en un condensador es de acuerdo con (1.29):

$$C = \frac{q(t)}{u(t)} = \frac{\int i \, dt}{u(t)} \Rightarrow i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (1.30)$$

es decir la corriente en un condensador es directamente proporcional a la variación de la tensión respecto del tiempo. Un aumento de la tensión corresponde a una corriente positiva y una reducción de la tensión aplicada al condensador corresponde a una corriente negativa. Se observa que si $u(t)$ es constante, entonces la corriente $i(t)$ es igual a cero. De este modo, **un condensador alimentado con una tensión continua (estacionaria) se comporta como un circuito abierto**. La relación inversa a (1.30), se puede obtener integrando entre un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t :

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{du}{dt} dt = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt \quad (1.31)$$

que al integrar nos da:

$$u(t) = u(t_0) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt \quad (1.32)$$

de donde se deduce:

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt \quad (1.33)$$

o tomando el instante inicial en $t_0 = 0$ resulta:

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (1.34)$$

la expresión anterior indica que la tensión en el condensador en un tiempo $t > 0$ es igual a la tensión inicial $u(0)$ más la tensión desarrollada a partir de $t = 0$. *El condensador tiene un efecto de memoria* ya que la tensión (salida) que adquiere en un tiempo $t = t_1$ depende del valor de la corriente (entrada) en el tiempo actual $t = t_1$ y de los valores anteriores de la corriente ($t < t_1$). Otro aspecto a considerar y que se deduce de (1.30) es que la tensión en un condensador no puede variar bruscamente, ya que la corriente se haría infinita, lo que es físicamente imposible. De este modo la tensión en un condensador no puede tener discontinuidades. En particular se cumple:

$$u(0^-) = u(0^+) \quad (1.35)$$

lo que indica que la tensión inicial justo antes de $t = 0$ es la misma que justo después de $t = 0$. Este concepto es útil en el estudio del régimen transitorio de los circuitos. Al aplicar

una tensión a un condensador se produce una separación de cargas entre ambas placas o armaduras, lo que produce un campo eléctrico, quedando almacenada una energía de este tipo. La potencia absorbida por el condensador es:

$$p(t) = u(t)i(t) = Cu(t) \frac{du(t)}{dt} \quad (1.36)$$

y la energía almacenada entre 0 y t segundos es igual a:

$$w(t) = \int_0^t ui \, dt = \int_0^t C \frac{du}{dt} u \, dt = \int_0^u Cu \, du = \frac{1}{2} Cu^2 \quad (1.37)$$

La tensión $u(t)$ del condensador constituye una *variable de estado* porque determina el estado energético del mismo.



Comentarios prácticos

Analogías electromecánicas

Existe una gran analogía entre las ecuaciones que relacionan la tensión con la corriente (o la carga eléctrica) en los elementos pasivos eléctricos: resistencia, inductancia y capacidad, con las ecuaciones que relacionan la fuerza aplicada y el desplazamiento en los elementos mecánicos: masa, muelle y amortiguador. Para comprobar esta similitud, recordemos que las relaciones $u = f(i)$ en los elementos pasivos eléctricos son:

$$\text{Bobina: } u(t) = L \frac{di(t)}{dt}; \text{ Resistencia: } u(t) = Ri(t); \text{ Capacidad: } u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \, dt \quad (1)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar en función de la carga eléctrica $q(t)$, teniendo en cuenta que se cumple $i(t) = dq(t)/dt$, lo que da lugar respectivamente a:

$$\text{Bobina: } u(t) = L \frac{d^2q(t)}{dt^2}; \text{ Resistencia: } u(t) = R \frac{dq(t)}{dt}; \text{ Capacidad: } u(t) = \frac{q(t)}{C} \quad (2)$$

En mecánica se dispone de tres elementos análogos a los anteriores y que son: masa, muelle y amortiguador y cuyas relaciones fuerza-desplazamiento se demuestran a continuación.

a) Masa: La masa se considera como una indicación de la propiedad de un elemento de almacenar la energía cinética en el movimiento de traslación. En la Figura 1.27 se muestra el símbolo correspondiente.

De acuerdo con las leyes de Newton, al aplicar una fuerza $f(t)$ a una masa m se obtiene una aceleración $a(t)$ y un desplazamiento $x(t)$, que están relacionados por la ecuación:

$$f(t) = ma(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (3)$$

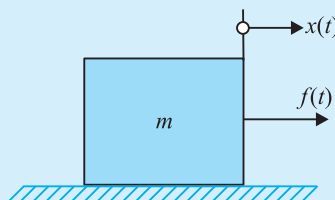


Figura 1.27 Masa de traslación

b) Muelle o resorte: En la práctica un muelle lineal, puede ser un muelle real o la deformación de un cable. En general un muelle se considera como un elemento que almacena energía potencial. En la Figura 1.28 se muestra el símbolo del muelle, en el que el parámetro k es la constante del muelle o simplemente su rigidez. En la práctica, todos los muelles presentan una cierta no linealidad. Sin embargo, si la deformación del muelle es pequeña, su comportamiento puede representarse aproximadamente mediante una relación lineal:

$$f(t) = kx(t) \quad (4)$$

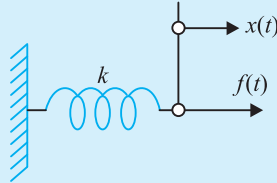


Figura 1.28 Muelle de traslación

c) Amortiguador: Cuando existe un movimiento o tendencia de movimiento entre dos elementos, aparecen fuerzas de rozamiento. En las aplicaciones prácticas, las fuerzas de rozamiento se dividen en tres categorías: rozamiento viscoso, rozamiento estático y rozamiento de Coulomb. El rozamiento viscoso es la fuerza de fricción entre superficies móviles separadas por un fluido viscoso o la fuerza entre un cuerpo sólido y un medio fluido. Esta fuerza es aproximadamente proporcional a la velocidad, dentro de un rango de velocidades. En la Figura 1.29 se representa este tipo de amortiguador en que el parámetro b representa la constante viscosa. Básicamente el amortiguador consiste en un pistón que se mueve dentro de un cilindro de aceite. La expresión matemática del amortiguador es:

$$f(t) = b \frac{dx(t)}{dt} \quad (5)$$

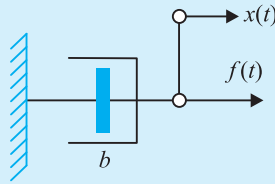


Figura 1.29 Amortiguador de traslación

En resumen, las ecuaciones que relacionan la fuerza con el desplazamiento en los sistemas mecánicos son:

$$\text{Masa: } f(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}; \text{ Muelle: } f(t) = kx(t); \text{ Amortiguador: } f(t) = b \frac{dx(t)}{dt} \quad (6)$$

Si se comparan las ecuaciones eléctricas (2) con las ecuaciones mecánicas (6) se observan las analogías entre las variables mecánicas y las variables eléctricas señaladas en la Tabla 1.2.

Es decir, la masa en los sistemas mecánicos de traslación es equivalente a la inductancia en los circuitos eléctricos; en una masa cualquier variación de velocidad está ligada a la aparición de una fuerza de inercia $f(t) = -mdv/dt$ y por analogía en una bobina cualquier variación de la corriente está vinculada a la aparición de una f.e.m. de autoinducción $e = -Ldi(t)/dt$. En una masa se almacena energía cinética $mv^2/2$ y en una inductancia se almacena energía magnética $Li^2/2$. El muelle en un sistema mecánico es equivalente al condensador en un circuito eléctrico. Y así como el muelle al deformarse almacena una energía potencial $kx^2/2$, en un condensador se almacena energía eléctrica $q^2/2C$. El amortiguador en un sistema mecánico, es un elemento que disipa energía por rozamiento y su valor es bv^2 y es equivalente a una resistencia eléctrica, en la que se disipa una energía Ri^2 .

Estas analogías entre los sistemas mecánicos de traslación y los sistemas eléctricos pueden extenderse a sistemas hidráulicos, térmicos, etc. El concepto de analogía es útil para el modelado y comportamiento de los sistemas físicos. Si se obtiene una solución en un sistema, esta respuesta se puede extender a todos sus sistemas análogos.

Antes de existir el ordenador digital o computador, era muy frecuente simular los sistemas mecánicos mediante ordenadores analógicos, para lo cual se sustituía la red mecánica por una red eléctrica análoga, en la que era mucho más simple proceder a un estudio experimental.

Tabla 1.2. Analogías mecánicas-eléctricas

Sistema mecánico de traslación	Sistema eléctrico
Fuerza $f(t)$	Tensión $u(t)$
Desplazamiento $x(t)$	Carga $q(t)$
Masa m	Inductancia L
Coefficiente de fricción viscosa b	Resistencia R
Rigidez del muelle k	Inversa de la capacidad $1/C$
Velocidad $dx(t)/dt$	Corriente $di(t)/dt$

1.6. Impedancia y admitancia operacional

Las relaciones tensión-corriente en los elementos pasivos simples estudiados en el epígrafe anterior, pueden escribirse de nuevo empleando los operadores:

$$D \equiv \frac{d}{dt} \quad ; \quad \frac{1}{D} \equiv \int \quad (1.38)$$

considerando que las condiciones iniciales son nulas, las expresiones (1.14), (1.21) y (1.34) se transforman en:

Resistencia: $u_R(t) = Ri(t)$

Bobina: $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = LDi(t) \quad (1.39)$

Condensador: $u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} \frac{1}{D} i(t)$

las ecuaciones anteriores indican que la tensión puede expresarse como un producto de una cierta expresión del operador D , que en el caso de una resistencia se reduce a una constante por la variable corriente eléctrica. Representamos esa expresión por $Z(D)$ y se denomina **impedancia operacional**. En la Figura 1.30 se muestra el símbolo de la impedancia y los sentidos asociados de tensión y corriente. Este símbolo general puede representar un único elemento pasivo simple (R , L o C) o una combinación de ellos.

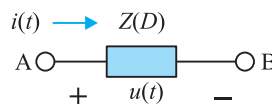


Figura 1.30 Símbolo de la impedancia y su relación tensión-corriente

De acuerdo con la definición de impedancia y teniendo en cuenta las polaridades de la Figura 1.31, se puede escribir:

$$u(t) = Z(D)i(t) \quad (1.40)$$

la relación anterior engloba las tres expresiones (1.39), cumpliéndose para cada elemento:

$$\begin{aligned} \text{Resistencia:} \quad & Z(D) = R \\ \text{Bobina:} \quad & Z(D) = LD \\ \text{Condensador:} \quad & Z(D) = \frac{1}{CD} \end{aligned} \quad (1.41)$$

la impedancia es según (1.40) un cociente entre tensión y corriente, y por ello se mide en ohmios (símbolo Ω), igual que la resistencia eléctrica. En definitiva lo que sucede es que la impedancia es una magnitud más general que la resistencia y se utiliza cuando las tensiones y corrientes varían con el tiempo. En el Capítulo 2 dedicado a la corriente alterna se tendrá una idea más física del significado de las relaciones (1.41). En principio lo que se pretende en este capítulo es dar formulaciones generales de la teoría de circuitos que sean válidas para cualquier tipo de excitación. Los ejemplos de este capítulo se realizarán con fuentes de corriente continua donde no existen variaciones con el tiempo. De este modo se conseguirá comprender la corriente alterna (c.a.) con más facilidad, evitándose repetir conceptos innecesarios que en los textos tradicionales sobre circuitos eléctricos se han estado produciendo.

En el caso de que se tomen las tensiones como variables independientes, las relaciones corriente-tensión en los elementos pasivos simples, se obtienen a partir de (1.17), (1.25) y (1.30), que en el supuesto de valores iniciales nulos dan lugar a:

$$\begin{aligned} \text{Resistencia:} \quad & i(t) = Gu(t) \\ \text{Bobina:} \quad & i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt = \frac{1}{L} \frac{1}{D} u(t) \\ \text{Condensador:} \quad & i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = CDu(t) \end{aligned} \quad (1.42)$$

Las ecuaciones anteriores nos dicen que podemos expresar la intensidad $i(t)$ como un producto, no conmutativo, de una cierta expresión del operador D , que en el caso de una resistencia se reduce a una constante por la variable $u(t)$. Representamos esa expresión por $Y(D)$, y se denomina *admitancia operacional*, cuyo símbolo es el mismo que el de la Figura 1.30 de la impedancia. De este modo se cumple:

$$i(t) = Y(D)u(t) \quad (1.43)$$

que aplicada a (1.42) nos indica el valor de la admitancia para cada elemento pasivo simple:

$$\begin{aligned} \text{Resistencia:} \quad & Y(D) = G \\ \text{Bobina:} \quad & Y(D) = \frac{1}{LD} \\ \text{Condensador:} \quad & Y(D) = CD \end{aligned} \quad (1.44)$$

la admitancia, es según (1.43) un cociente entre corriente y tensión, y por ello se mide en *siemens*, igual que la conductancia eléctrica (1.16). En definitiva, la admitancia es una magnitud más general que la conductancia y se emplea en circuitos en los que las tensiones y corrientes varían con el tiempo.

Los conceptos de impedancia y admitancia operacional son muy útiles para desarrollar los principales teoremas de circuitos desde un punto de vista general. En el caso de que las fuentes de excitación o generadores de la red no varíen con el tiempo (corriente continua), solo tiene sentido hablar de resistencia y conductancia; obsérvese que en este caso, al ser $D = d/dt = 0$, la impedancia de una bobina es cero, lo que está de acuerdo con la segunda relación de (1.39), mientras que para un condensador se observa que la impedancia es infinita; lo anterior significa que una bobina alimentada con corriente continua se comporta como un *cortocircuito* (impedancia cero), mientras que un condensador se comporta como un *circuito abierto* (impedancia infinita); de otra forma si se analiza la expresión (1.40), puede decirse que una corriente continua que circule por una bobina produce una d.d.p. en sus bornes nula, mientras que si se aplica una d.d.p. continua a un condensador, este no dejará pasar la corriente. Si se comparan las expresiones (1.40) y (1.43), se observa que los conceptos de impedancia y admitancia son inversos y se cumple:

$$Y(D) = \frac{1}{Z(D)} \quad (1.45)$$

■ 1.7. Topología de redes: conceptos fundamentales

La topología es una rama de la geometría dedicada al estudio de las figuras que permanecen invariantes, cuando son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas y que inventó el gran matemático Leonhard Euler en 1736 para dar solución al famoso *problema de los siete puentes de Könisberg*², y que es muy útil para estudiar los circuitos eléctricos (Kirchhoff ya la empleó en 1.847). Una de las aplicaciones más importantes de la topología en el análisis de redes, es poder seleccionar el número correcto y más apropiado de tensiones o corrientes incógnitas para la resolución de un circuito eléctrico. Vamos a dar en este epígrafe una serie de definiciones útiles que se van a utilizar a lo largo del texto.

■ 1.7.1. Definiciones

1. Nudo: Es un punto de unión entre tres o más elementos de un circuito. En topología, el concepto de nudo se aplica también al punto donde confluyen dos o más elementos de un circuito. En nuestro caso cuando se tenga un punto de unión entre dos elementos de un circuito, denominaremos a este punto: nudo secundario, y cuando existan tres o más elementos se conocerá simplemente por el nombre de nudo. En la Figura 1.31a, los puntos A y B son nudos, mientras que en la Figura 1.31b, los puntos A y B son nudos secundarios.

² Los habitantes de Könisberg (en la actualidad Kaliningrado) se preguntaban si era posible recorrer esta ciudad, pasando una vez y solo una, por cada uno de los puentes sobre el río Pregel, y volviendo al punto de partida. La ciudad tenía cuatro partes distintas unidas por siete puentes. Euler resolvió el problema usando un grafo.

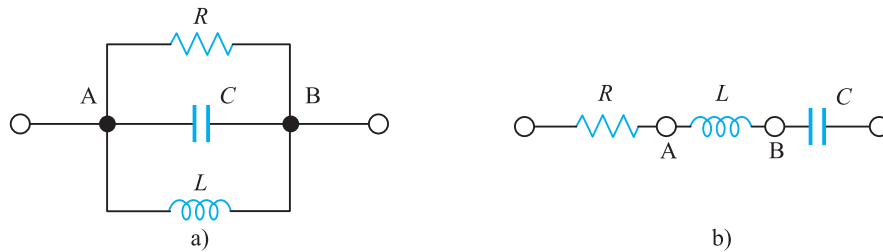


Figura 1.31 Nodos de una red eléctrica

2. Rama: Es un elemento o grupo de elementos conectado entre dos nudos. (En topología el término también es válido para nudos secundarios pero no se aplicará aquí). La red de la Figura 1.31a, tiene tres ramas.

3. Red plana: Es una red que puede dibujarse sobre una superficie plana sin que se cruce ninguna rama. En caso contrario se dice que la red es *no plana*. La Figura 1.32a presenta una red en puente que aparentemente es no plana, sin embargo dibujándola como se muestra en la Figura 1.32b, se observa que realmente es plana. (En este texto solamente se estudiarán las *redes planas*).

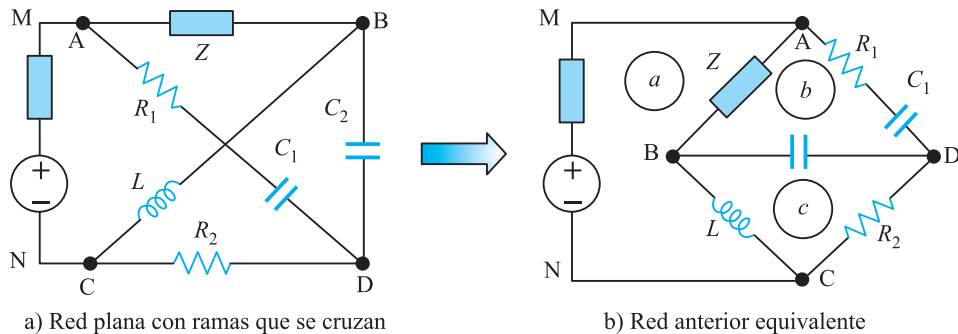


Figura 1.32 Ejemplo de red plana dibujada de dos formas distintas

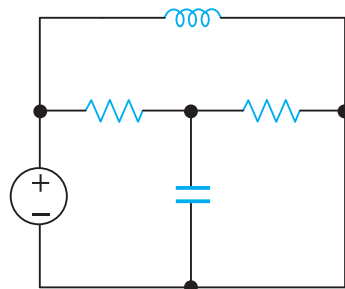
4. Lazo: Es un conjunto de ramas que forman una línea cerrada, de tal forma que si se elimina cualquier rama del lazo, el camino queda abierto. (Este concepto es válido tanto para redes planas como para las no planas). En la Figura 1.32b, los caminos *a*, *b* y *c* son lazos, pero también son lazos los caminos MADCNM, ADCBA, MABCNM y MABDCNM.

5. Malla: Este concepto se aplica solamente a **circuitos planos** y es un lazo que no contiene ningún otro en su interior. En un circuito plano existen obviamente tantas mallas, como *ventanas* tiene la red. En la Figura 1.32b se tienen de esta forma 3 mallas: *a*, *b* y *c*. Sin embargo no son mallas los caminos MADCNM, ADCBA, MABCNM y MABDCNM. Es decir todas las mallas son lazos, pero no todos los lazos son mallas.

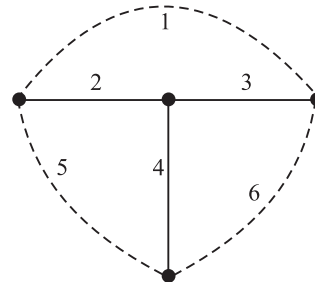
6. Grafo: Es un dibujo simplificado de un circuito en el que cada rama se representa por un segmento. Si también se indica con una flecha el sentido de la corriente para cada línea del grafo, se dice que se tiene un grafo orientado. En la Figura 1.33b se muestra el grafo de la Figura 1.33a.

7. Árbol: Es la parte de un grafo formado por ramas que contengan a todos los nudos, sin que se formen lazos. En la Figura 1.33b se muestra con líneas gruesas un árbol del

grafo, constituido por las ramas 2, 3 y 4, pero se hubieran podido elegir otros como los formados por las ramas 1, 2, 5; 1, 3, 6 y también 4, 5 y 6.



a) Red eléctrica



b) Grafo con las ramas del árbol y los eslabones

Figura 1.33 Circuito eléctrico y grafo correspondiente

8. Eslabones: Son las ramas del grafo no incluidas en el árbol. Se conocen también con el nombre de cuerdas y también ramas de enlace. Para el grafo y árbol de la Figura 1.33b, las ramas dibujadas en línea discontinua 1, 5 y 6 son eslabones.

1.7.2. Propiedades

De la definición de árbol, se deduce que si se tiene una red de r ramas y n nudos, el número de ramas del árbol es igual al de nudos menos 1.

$$\text{Número de ramas del árbol} = \text{Número nudos} - 1 = n - 1 \quad (1.46)$$

por otra parte el número de eslabones es igual al número de ramas del grafo menos el número de ramas del árbol, es decir:

$$\text{Número de eslabones} = r - (n - 1) = r - n + 1 \quad (1.47)$$

Las ecuaciones (1.46) y (1.47) son muy útiles para la elección de las variables independientes de una red en el estudio de los circuitos eléctricos.

1.8. Lemas de Kirchhoff

Las ecuaciones básicas de los circuitos se formularon a partir de dos lemas sencillos que fueron expresados por primera vez por Gustav Kirchhoff en 1845. El primer lema se aplica a las corrientes que entran o salen de un nudo y constituye la versión en teoría de circuitos del principio de conservación de la carga eléctrica. El segundo lema se aplica a las tensiones a lo largo de un circuito cerrado (lazo o malla) y representa la versión en la teoría de circuitos del principio de conservación de la energía. Vamos a ver a continuación la formulación y explicación de cada uno de estos lemas.

1.8.1. Primer lema de Kirchhoff

Este lema es el resultado directo del principio de conservación de la carga. En los textos sajones se conoce con el nombre de *ley de las corrientes de Kirchhoff*, y se aplica a los nudos de una red. Consideremos un nudo cualquiera de un circuito, como el mostrado en la Figura 1.34, en el que se muestran los sentidos de referencia de las corrientes en las distintas ramas (las corrientes en general pueden depender del tiempo y por ello se escriben con minúscula). Como quiera que en un nudo no se puede almacenar carga, en cualquier instante de tiempo, la corriente total que *entra* en el nudo debe ser igual a la corriente total que *sale* del mismo. En otras palabras y con formulación matemática, en el nudo de la Figura 1.34 se cumple:

$$i_1(t) + i_3(t) + i_5(t) = i_2(t) + i_4(t) \quad (1.48)$$

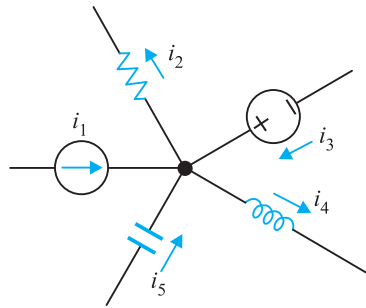


Figura 1.34 Primer lema de Kirchhoff aplicado a un nudo

o de otro modo:

$$i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) - i_4(t) + i_5(t) = 0 \quad (1.49)$$

que se puede expresar diciendo:

En cualquier instante de tiempo, la suma algebraica de todas las corrientes que entran en un nudo es igual a cero:

$$\sum i(t) = 0 \quad (1.50)$$

en la definición anterior, la palabra *algebraica* significa que las corrientes tienen signo, una corriente $i_2(t)$ que sale del nudo es equivalente a una corriente $-i_2(t)$ que entra en el nudo. De este modo para aplicar (1.50) se debe asignar el signo $+$ a las corrientes que entran en el nudo y signo $-$ a las corrientes que salen del nudo. Como quiera que la ecuación (1.50) conserva su validez si se multiplican ambos miembros por (-1) , la ecuación equivalente indicaría que la suma de las corrientes que salen de un nudo es, en todo instante, igual a cero.

Cualquier versión es buena, lo importante es establecer los signos de las corrientes claramente. El primer lema de Kirchhoff tiene un símil hidráulico: si se considera una red de tuberías llevando agua que confluyeran en un punto, el caudal total (m^3/s) que llega al nudo debe ser igual a cero.

El primer lema de Kirchhoff se puede generalizar utilizando lo que en topología se denomina *grupo de corte*. Considérese una red que se puede separar (cortar) en dos partes N_1 y N_2 como se muestra en la Figura 1.35a. La línea discontinua representa la *superficie de*

corte que divide al circuito en una parte externa N_1 (no dibujada) y una parte interna N_2 en la que se muestran los elementos componentes. Las dos partes están conectadas por los hilos a, b, c, d que llevan las corrientes indicadas.

Como quiera que la corriente que entra en cada elemento es igual a la que sale de él, ya que la carga neta almacenada es siempre nula, entonces se cumple:

$$i_a(t) - i_b(t) + i_c(t) - i_d(t) = 0 \quad (1.51)$$

El lector puede comprobar la veracidad de esta ecuación aplicando el primer lema de Kirchhoff a los nudos A, B, C y D de la Figura 1.35a y observando que al sumar las ecuaciones resultantes se obtiene el resultado (1.51). En definitiva esta ecuación es una generalización del primer lema de Kirchhoff y que se enuncia así: **La suma algebraica de las corrientes que entran en cualquier superficie cerrada es igual a cero.**

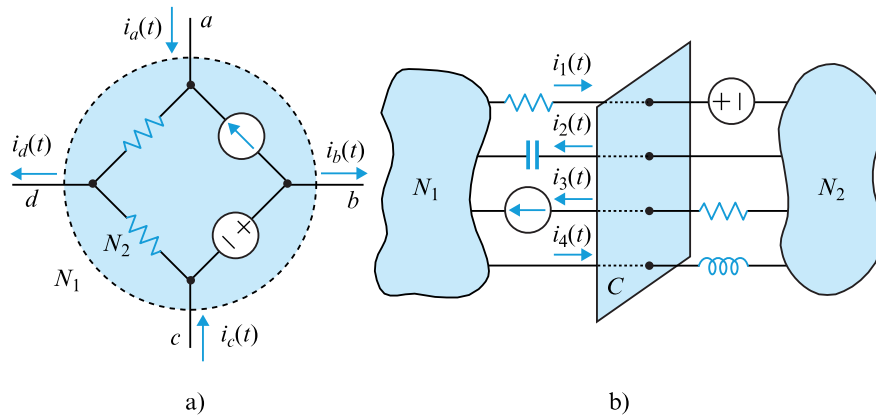


Figura 1.35 Primer lema de Kirchhoff y grupos de corte

La superficie de corte también puede ser abierta, siempre que separe el circuito original en dos partes. En la Figura 1.35b se muestran dos circuitos N_1 (izquierda) y N_2 (derecha) que se han separado por medio de un plano de corte C . Si se consideran como corrientes positivas las que salen por la parte derecha del plano de corte se cumple:

$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) = 0 \quad (1.52)$$

que expresa en definitiva que $\sum i(t) = 0$ en cualquier *superficie de corte*.

■ 1.8.2. Segundo lema de Kirchhoff

Este lema es, como ya se ha indicado antes, consecuencia directa del principio de conservación de la energía. En los textos sajones se denomina: *ley de las tensiones de Kirchhoff*, y se aplica a los lazos o mallas de una red. Recuérdese que la d.d.p. o tensión entre dos puntos 1 y 2 es el trabajo (energía) por unidad de carga que adquiere o pierde la misma al moverse desde 1 hasta 2. Si al ir de 1 a 2, la carga adquiere o gana energía entonces 2 es positivo respecto a 1, hay por consiguiente una elevación de potencial de 1 a 2 (o una caída de potencial de 2 a 1) o, al contrario, si la carga pierde o gasta energía para ir de 1 a 2, entonces 2 es negativo respecto a 1, lo que significa una caída de potencial de 1 a 2 (o una

elevación de potencial de 2 a 1). Consideremos ahora el circuito de la Figura 1.36, que muestra un camino cerrado de la red. Supóngase una carga $q = 1 \text{ C}$, que se sitúa en el nudo A y que se mueve en el sentido indicado, del nudo A al B, del B al C, etc. hasta volver al nudo de partida A. Se han señalado en la Figura 1.36 las polaridades de las tensiones.

Según el principio de conservación de la energía, la energía perdida por la carga al efectuar este recorrido cerrado, deberá ser igual a la energía ganada por la misma. Como quiera que las caídas de potencial son pérdidas de energía y las elevaciones de potencial son ganancias de energía, se tendrá una energía gastada de valor: $u_3(t) + u_4(t)$ y una energía ganada por la carga igual a $u_1(t) + u_2(t) + u_5(t)$ y en consecuencia se cumple:

$$u_3(t) + u_4(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_5(t) \quad (1.53)$$

o de otro modo, si se ponen todas las tensiones a la izquierda de la ecuación, se tiene:

$$u_3(t) + u_4(t) - u_1(t) - u_2(t) - u_5(t) = 0 \quad (1.54)$$

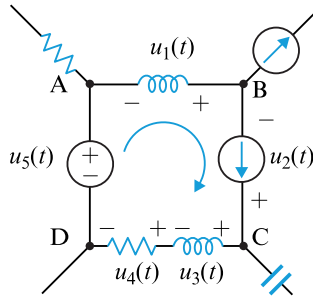


Figura 1.36 Segundo lema de Kirchhoff y lazo correspondiente

que se puede expresar diciendo:

En cualquier instante de tiempo, la suma algebraica de todas las tensiones a lo largo de un camino cerrado es igual a cero;

$$\sum u(t) = 0 \quad (1.55)$$

en la definición anterior, la palabra algebraica significa que las tensiones tienen signo. Una tensión en un elemento se toma con signo positivo cuando al recorrer el circuito vamos de $+$ a $-$ (mayor a menor potencial) y se toma con signo negativo cuando vamos de $-$ a $+$ (menor a mayor potencial). Indudablemente se obtiene el mismo resultado tomando el criterio contrario, es decir que la suma de las elevaciones de potencial son cero, pero conviene ceñirse a un único procedimiento.

En definitiva los dos lemas de Kirchhoff se expresan así:

$$\begin{aligned} 1.^\circ \text{ Nudos} & \quad \sum i(t) = 0 \\ 2.^\circ \text{ Lazos (mallas)} & \quad \sum u(t) = 0 \end{aligned} \quad (1.56)$$

que nos indica que lo que se cumple en una ecuación para las corrientes, se cumple en la otra para las tensiones; lo que se aplica en un caso para los nudos, se aplica en el otro para los lazos o mallas. Estas semejanzas aparecen con frecuencia en la teoría de circuitos y se

conoce con el nombre de *dualidad*. En este caso los términos duales son: corriente-tensión y nudo-malla; extendiendo la dualidad a otras magnitudes, se consigue simplificar mucho el estudio de ciertos circuitos.

■ 1.8.3. Elección de las ecuaciones independientes para la aplicación de los lemas de Kirchhoff

La resolución de un circuito eléctrico consiste en calcular las corrientes de las diversas ramas del mismo, ya que determinadas estas se pueden evaluar las diferentes tensiones y potencias en cada elemento del circuito. Si el circuito tiene r ramas, existen r incógnitas. Para resolver la red es preciso preparar entonces r ecuaciones que sean independientes y que se definen al aplicar los dos lemas de Kirchhoff al circuito. ¿Pero cómo elegir estas ecuaciones, teniendo la seguridad de que formen un sistema independiente? Para analizar esta situación consideremos por ejemplo el circuito de la Figura 1.37.

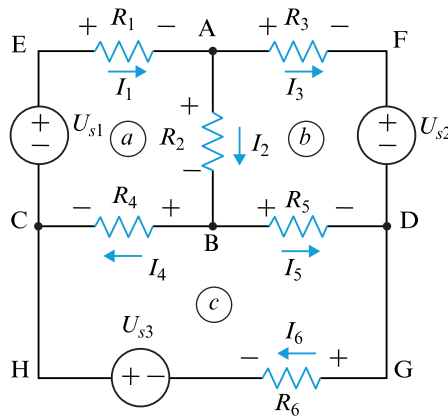


Figura 1.37 Circuito eléctrico plano con tres mallas

Existen seis ramas ($r = 6$), a las que se les ha asignado unas corrientes en unos sentidos tomados arbitrariamente. De acuerdo con estos sentidos se ha determinado la polaridad de las tensiones en cada una de las resistencias del circuito (la corriente se dirige, en los elementos pasivos, de mayor a menor potencial) de este modo en cada una de las resistencias se escribe la ley de Ohm como $u_i = R_i i_i$. El circuito tiene 4 nudos ($n = 4$) a los que puede aplicarse el primer lema de Kirchhoff, y cuyo resultado, de acuerdo con (1.50), es:

$$\begin{aligned}
 \text{Nudo A: } I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\
 \text{Nudo B: } I_2 - I_4 - I_5 &= 0 \\
 \text{Nudo C: } I_4 + I_6 - I_1 &= 0 \\
 \text{Nudo D: } I_3 + I_5 - I_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

Observamos que cada corriente de rama aparece exactamente dos veces en las ecuaciones anteriores, una vez con signo positivo y otra con signo negativo, lo que era de esperar ya que como una rama une a dos nudos, si la corriente es positiva respecto de un nudo, se torna negativa respecto del otro. Se puede comprobar por ello que cada una de las ecuacio-

nes se obtiene como la suma de las restantes cambiada de signo. Por ejemplo, al sumar las ecuaciones de los nudos A, B y D resulta:

$$I_1 - I_4 - I_6 = 0 \quad (1.58)$$

que como ya se ha indicado, es la ecuación del nudo C cambiada de signo. Por consiguiente la ecuación del nudo n -ésimo, está realmente incluida en las $n - 1$ ecuaciones restantes (es decir es linealmente dependiente), y es por ello redundante. De este modo para aplicar el primer lema de Kirchhoff y conseguir un conjunto de ecuaciones independientes se deben elegir $n - 1$ nudos de los n totales disponibles. Desde un punto de vista topológico lo anterior se expresa diciendo que el número de nudos independientes es igual al *número de ramas del árbol del grafo de la red*, ver ecuación (1.44). En el caso de la Figura 1.37, se tiene $n = 4$ y por consiguiente hay $n - 1 = 3$ ecuaciones de nudo, a las que se aplica el primer lema de Kirchhoff.

Ahora bien, como existen r incógnitas (r ramas), se necesitarán: $r - (n - 1)$ ecuaciones adicionales que se obtendrán aplicando el segundo lema de Kirchhoff al circuito. Para la red de la Figura 1.37 suponen $6 - (4 - 1) = 3$ ecuaciones nuevas, que es en definitiva, según la ecuación (1.47), *el número de eslabones del grafo* o ramas de enlace del circuito. Ahora bien, el segundo lema de Kirchhoff se aplica a los lazos de la red, que son los diferentes circuitos cerrados que se pueden formar. El lector puede comprobar que en el caso de la Figura 1.37 existen siete lazos, a saber: ABCEA; AFDBA; CBDGHC; EAFDBCE; EABDGHCE; AFDGHCBA y EAFDGHCE. Está claro que de estos siete lazos, solamente debe haber tres independientes ¿pero cómo elegirlos? La respuesta es fácil ya que lo más simple es tomar aquellos lazos que coincidan con las *mallas* (ventanas) que tiene la red y que se han señalado en la Figura 1.37 por a , b , y c (y que se corresponden con los tres primeros lazos enumerados anteriormente). El lector puede comprobar que los demás lazos son combinación lineal de estas mallas. Así el cuarto lazo es la suma de las mallas a y b , el quinto de la suma de a y c , el sexto de b y c , y el séptimo de a , b y c . Se pueden buscar otras combinaciones, pero esta es la más simple. (En redes espaciales, no planas, los lazos más simples, son los correspondientes a los circuitos cerrados que se forman al cerrar las ramas del árbol por los eslabones, de tal modo que cada lazo que se forme contenga un solo eslabón, es por ello que se obtienen tantos lazos independientes como eslabones tiene la red, es decir: $r - n + 1$). Por consiguiente la respuesta del circuito de la Figura 1.37, se obtiene de las soluciones de las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{Nudos (Primer Lema)} & \begin{array}{l} \text{A) } I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ \text{B) } I_2 - I_4 - I_5 = 0 \\ \text{C) } I_4 + I_6 - I_1 = 0 \end{array} \end{array} \quad (1.59)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Mallas (Segundo Lema)} & \begin{array}{l} \text{a) } R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_4 I_4 - U_{s1} = 0 \\ \text{b) } R_3 I_3 + U_{s2} - R_5 I_5 - R_2 I_2 = 0 \\ \text{c) } -R_4 I_4 + R_5 I_5 + R_6 I_6 - U_{s3} = 0 \end{array} \end{array} \quad (1.60)$$

donde se ha aplicado el segundo lema de Kirchhoff (1.53) a las tres mallas del circuito. De cualquier modo, el procedimiento aplicado aquí es poco eficiente porque utiliza un gran número de ecuaciones e incógnitas. Más adelante se ofrecerán métodos que emplean un número mínimo de incógnitas y ecuaciones, y que, por consiguiente, son más eficaces.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.2

En el circuito de la Figura 1.38, calcular: a) corrientes I_1 , I_2 e I_3 ; b) potencias eléctricas suministradas por los generadores; c) potencias eléctricas disipadas en las resistencias. Compruébese el balance de potencias del circuito.

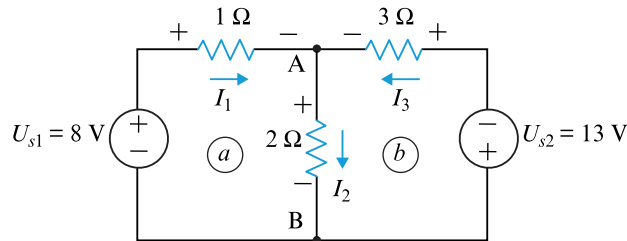


Figura 1.38 Ejemplo de aplicación 1.2

Solución

a) La red tiene tres ramas y en consecuencia existen tres incógnitas. Hay dos nudos A y B. Como se ha indicado en el Epígrafe 1.8.3, el primer lema de Kirchhoff se debe aplicar a $n - 1$ nudos, es decir a un nudo, y el segundo lema se aplicará a las dos mallas que tiene la red. Las ecuaciones correspondientes son:

$$\text{Nudo A: } I_1 + I_3 - I_2 = 0$$

$$\text{Malla a: } 1I_1 + 2I_2 - 8 = 0$$

$$\text{Malla b: } +2I_2 + 3I_3 + 13 = 0$$

de donde se deducen los valores:

$$I_1 = 6 \text{ A}; \quad I_2 = 1 \text{ A}; \quad I_3 = -5 \text{ A}$$

que indica que la corriente real de circulación I_3 es contraria a la señalada en el gráfico de la Figura 1.38.

b) Las potencias eléctricas suministradas por generadores, de acuerdo con (1.6) son:

$$P_1 = 8 \cdot I_1 = 8 \cdot 6 = 48 \text{ W}$$

$$P_2 = -13 \cdot I_3 = -13 \cdot (-5) = +65 \text{ W}$$

el signo menos colocado en la expresión de P_2 procede de que la corriente I_3 considerada en la Figura 1.38 entra por el terminal positivo del generador y que a su vez vale -5 A (recuérdese que la potencia suministrada por un generador de tensión es el producto de la u_s por la corriente que sale por el terminal positivo). Las potencias suministradas por los dos generadores son por consiguiente:

$$P_{\text{gen}} = P_1 + P_2 = 48 + 65 = 113 \text{ W}$$

c) Las potencias disipadas en las resistencias son:

$$P(1 \Omega) = RI^2 = 1 \cdot 6^2 = 36 \text{ W}; \quad P(2 \Omega) = 2 \cdot 1^2 = 2 \text{ W}; \quad P(3 \Omega) = 3 \cdot (-5)^2 = 75 \text{ W}$$

que representa una potencia absorbida total:

$$P_{\text{abs}} = 36 + 2 + 75 = 113 \text{ W}$$

se observa que se cumple el *balance de potencia en el circuito*, es decir:

$$\sum P_{\text{gen}} = \sum P_{\text{abs}}$$



Comentarios prácticos

1. El puente de Wheatstone: Los circuitos **tipo puente** se utilizan ampliamente para la medida de las magnitudes de los componentes pasivos: resistencia, inductancia y capacidad. Estos circuitos determinan el valor del parámetro buscado por comparación con patrones regulables y se emplean cuando se requiere una medida con alta precisión. Se basan en la obtención del cero por un medidor al equilibrar el puente (método de cero). La gran precisión obtenida se debe a que el equilibrado no es afectado por los errores de calibración del instrumento de medida, su exactitud depende únicamente de la sensibilidad del instrumento (y por supuesto de la precisión de los componentes del puente). Un puente es una red con cuatro terminales de entrada/salida (que también se llama cuadripolo), en la cual se ha conectado la fuente a un par de bornes y el indicador de equilibrio, que suele ser un galvanómetro, al otro par. Según el tipo de alimentación los puentes se dividen en puentes de c.c. y puentes de c.a. Los puentes de c.c. más importantes son el de Wheatstone que se emplea para la medida de resistencias medianas y el de Lord Kelvin o Thomson especialmente diseñado para mediciones de resistencias muy pequeñas. Entre los puentes de c.a. destacan los siguientes: a) puente de Maxwell que se utiliza para medir una inductancia desconocida en comparación con un condensador patrón, b) puente de Hay que es una modificación del anterior, c) puente de Schering que se emplea para medir la capacidad de condensadores, d) puente de Wien, que mide también capacidades e incluso frecuencias.

El puente de Wheatstone es el primer tipo de puente que se utilizó y que fue introducido en 1843 por C. Wheatstone (realmente el inventor fue Christie, quien lo inventó en 1833) y es el origen de los demás puentes. El puente de Wheatstone, está formado por cuatro resistencias dispuestas en forma de cuadrilátero (Figura 1.39), cuyas diagonales están formadas respectivamente por un generador o fuente de f.e.m. U_s y un galvanómetro; R_1 , R_3 y R_4 son tres resistencias de valor conocido y R_2 es la resistencia incógnita cuyo valor se desea determinar.

La corriente a través del galvanómetro (que es un miliamperímetro o milivoltímetro en algunos casos) depende de la diferencia de potencial entre los nudos A y B a los que está conectado. Se dice que el puente está equilibrado cuando la d.d.p. en bornes del galvanómetro es de cero voltios de tal forma que no circula corriente por él. Esta condición ocurre cuando la d.d.p. entre los nudos A y D es igual a la que existe entre B y D. Al tomar el nudo D como referencia, y suponer que no está conectado el galvanómetro, las tensiones de los nudos A y B respecto del nudo D, son respectivamente:

$$U_A = U_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad ; \quad U_B = U_s \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad (1)$$

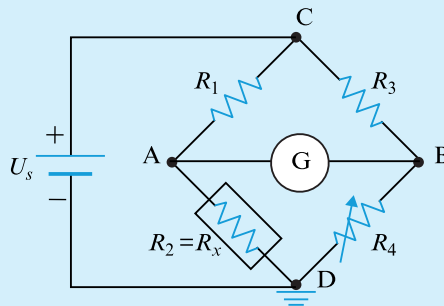


Figura 1.39 Puente de Wheatstone

y al igualar ambas tensiones se obtiene:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \Rightarrow R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (2)$$

que es la condición de equilibrio del puente de Wheatstone y que es fácil de recordar, porque deben coincidir el producto de las resistencias enfrentadas de un lado del puente con las del otro lado. Si R_2 es la resistencia desconocida, de acuerdo con la expresión anterior, se deduce:

$$R_2 = R_4 \frac{R_1}{R_3} \quad (3)$$

la resistencia R_4 constituye el brazo patrón del puente o lado de comparación y las resistencias R_1, R_3 se denominan brazos de relación. La medida se efectúa colocando la resistencia desconocida R_2 en el puente y regulando los brazos y el lado de comparación, constituidos por resistencias variables, hasta que el galvanómetro central marque cero. La resistencia R_4 suele ser de variación continua (potenciómetro de alta precisión), mientras que las R_1 y R_2 son resistencias cuyos valores son potencias de 10, quedando la fórmula (3) de la siguiente forma:

$$R_2 = R_x = R_4 \cdot 10^{(n-n')} \quad (4)$$

ya que $R_1 = 10^n$; $R_3 = 10^{n'}$. La condición de mayor sensibilidad del puente se obtiene haciendo que R_1 y R_x que es igual a R_2 sean iguales entre sí y que también R_3 y R_4 , tengan aproximadamente el mismo valor; la condición ideal sería que las cuatro resistencias fuesen de igual valor o al menos muy parecido. La tensión de alimentación U_s oscila entre 2 y 20 voltios.

2. Medida de deformaciones con el puente de Wheatstone: El circuito de medida básico empleado en la medida de deformaciones es el puente de Wheatstone cuya disposición se muestra en la Figura 1.40, donde existe una banda extensométrica R_2 que se ha colocado sobre una probeta para medir la deformación cuando se somete esta probeta a tracción. Generalmente las cuatro resistencias del puente tienen la misma resistencia, (cuando la probeta no está sometida a deformación), si denominamos esta resistencia común R_0 , es evidente que el puente está inicialmente equilibrado y la tensión que se mide entre A y B es $U_m = 0$ (en la práctica, debido a las tolerancias de las resistencias, el puente se debe equilibrar con potenciómetros externos).

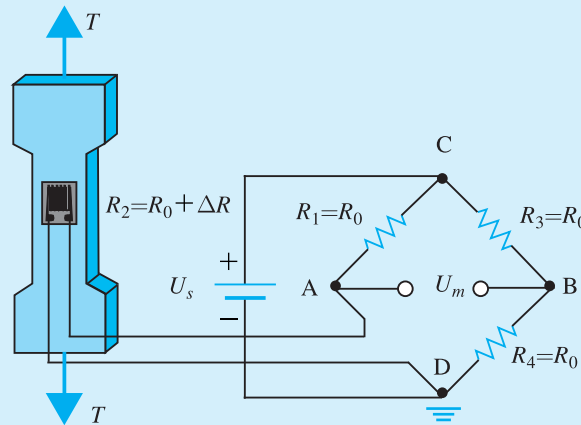


Figura 1.40 Medida de deformaciones con el puente de Wheatstone

Al aplicar una fuerza de tracción a la probeta, la banda extensométrica R_2 sufre un aumento de resistencia y pasa de valer R_0 a $R_0 + \Delta R$, lo que provoca una tensión en el medidor que es la d.d.p. entre A y B. Si se tienen en cuenta las expresiones (1), esta tensión vale:

$$U_m = U_A - U_B = U_s \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right] = U_s \left[\frac{R_0 + \Delta R}{R_0 + R_0 + \Delta R} - \frac{R_0}{R_0 + R_0} \right] \approx U_s \frac{\Delta R}{4R_0} \quad (5)$$

donde la última aproximación es válida siempre que $\Delta R \ll R_0$. El montaje anterior se conoce en instrumentación como circuito en 1/4 de puente, ya que solamente una de las cuatro resistencias del puente es activa (la banda extensométrica).

Como quiera, que según se explicó en los comentarios prácticos incluidos a continuación del Epígrafe 1.5.1, la deformación de una banda y por lo tanto de la probeta a la que está adherida en función del cambio en la resistencia es igual a:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{K} \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{K} \frac{\Delta R}{R_0} \quad (6)$$

al sustituir el valor del incremento de resistencia unitario de la banda, en función de la tensión de medida (5), se obtiene finalmente:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{K} \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{1}{K} \frac{4U_m}{U_s} \quad (7)$$

es decir la deformación axial de la probeta es proporcional a la tensión de medida U_m . Si por ejemplo consideramos una probeta de acero con un módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^6$ kp/cm², con una banda de resistencia nominal 120 Ω y factor de galga $K = 2$, que es parte de un puente de Wheatstone alimentado por una fuente de 2 V, y se supone una tensión de medida de 0,5 mV, la deformación medida es:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{K} \frac{4U_m}{U_s} = \frac{1}{2} \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{2} = 500 \cdot 10^{-6} \text{ m/m} \quad (8)$$

y los ingenieros civiles suelen decir que la deformación producida es de 500 microdeformaciones. Si se tiene en cuenta además la ley de Hooke, que relaciona el módulo de elasticidad E con la tensión mecánica unitaria $\sigma = T/S$ y la deformación ε_a , es decir:

$$\text{Ley de Hooke:} \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_a} \quad (9)$$

la tensión mecánica correspondiente es:

$$\sigma = E\varepsilon_a = 2 \cdot 10^6 \cdot 500 \cdot 10^{-6} = 1.000 \text{ kp/cm}^2 \quad (10)$$

Si la probeta fuera de sección uniforme, se podría determinar posteriormente la fuerza de tracción a la que está sometida la misma, constituyendo de este modo una **célula de carga** (que es en definitiva el método de pesaje electrónico que se encuentra en cualquier tienda de ultramarinos).

NOTA ADICIONAL: Debe señalarse que para evitar variaciones de resistencia con la temperatura (que provocaría falsas lecturas en las deformaciones), las bandas extensométricas se construyen con constantán, que tiene un factor de variación de la resistencia con la temperatura muy reducido). Aún así, para evitar errores por variaciones de temperatura, en el circuito de medida de la Figura 1.40, la resistencia R_1 no es fija, sino que es una banda inactiva (*dummy*) que se sitúa físicamente al lado de la banda activa R_2 (pero sin pegar a la estructura) para que varíe solamente su resistencia con la temperatura y no con la deformación, por lo que al tener en cuenta la ecuación (5) de la tensión de medida del puente, las variaciones de la resistencia con la temperatura de R_1 y R_2 son iguales y además tienen signos contrarios, por lo que se compensan entre sí. ¡Es verdaderamente difícil medir deformaciones con buena precisión y se requiere una gran experiencia!

1.9. Elementos activos reales

En el Epígrafe 1.3 se explicaron los elementos activos ideales, que son generadores que mantienen constante su tensión (generadores de tensión) o su corriente (generadores de corriente), independientemente de la carga que se conecta en sus terminales. Sin embargo, los elementos activos reales no pueden mantener esta constancia de tensión o corriente debido a las pérdidas en las impedancias internas que ofrecen los mismos. Los generadores reales independientes pueden ser de tensión y de corriente.

a) Un **generador de tensión real** es aquel elemento activo del circuito que proporciona energía eléctrica con una determinada tensión $u(t)$ que depende de la corriente que pasa por él. La relación $u-i$ en estos generadores es una línea recta, de pendiente negativa, como se muestra en la Figura 1.41a; esto es debido a que el generador real de tensión presenta en general una cierta impedancia (que en el caso de c.c. se convierte en una resistencia), en la

que se produce una caída de potencial. Por ello el símbolo de un generador real de tensión está representado, como se muestra en la Figura 1.41b, por un generador ideal más una impedancia en serie.

De acuerdo con el segundo lema de Kirchhoff, la ecuación que expresa la tensión del generador en función de la corriente es de la forma: $u(t) = U_s - Zi(t)$. La tensión U_s corresponde al punto en el que la recta característica corta al eje de ordenadas, se denomina tensión de vacío, es decir con $i(t) = 0$. Si se comparan los símbolos de las Figuras 1.7a y 1.41b, se observa que un *generador ideal de tensión tiene una impedancia Z en serie igual a cero*.

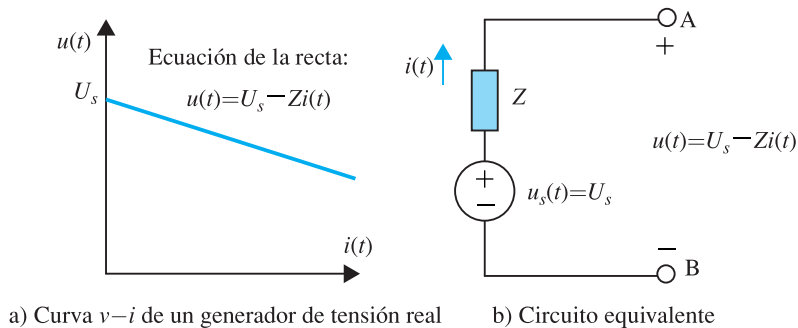


Figura 1.41 Generador de tensión real

Un acumulador de un coche es un generador real de tensión de corriente continua (unidireccional). La tensión U_s es igual a 12 V y si suministra pequeñas corrientes (al conectar una carga entre terminales), la tensión en bornes será sensiblemente igual a 12 V, es decir trabajaría como un generador ideal de tensión. Ahora bien, si la carga conectada consume mucha corriente, la tensión en bornes disminuirá debido a la resistencia interna que tiene el acumulador. El lector lo puede comprobar fácilmente midiendo la tensión en bornes del acumulador cuando conecta el motor de arranque de su coche (que en ese momento tan breve puede ascender a una corriente superior a 200 amperios). Se dará cuenta que la tensión baja a 8 o 9 voltios³. La potencia eléctrica *suministrada* por un generador de tensión real, con el convenio de tensiones y corrientes de la Figura 1.41b, será:

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (1.61)$$

b) Un generador de corriente real es un elemento activo que proporciona energía eléctrica con una determinada $i(t)$ que depende de la tensión en bornes. La relación $u-i$ en estos generadores es una línea recta de pendiente negativa, como se muestra en la Figura 1.42a; esto es debido a que el generador real de corriente presenta en general una admitancia en paralelo (que en el caso de c.c. se convierte en una conductancia), en la que se produce una derivación de corriente i_1 (ver Figura 1.42b). De acuerdo con el primer lema de Kirchhoff, la ecuación que expresa la tensión del generador de corriente en función de la

³ El envejecimiento de un acumulador hace que disminuya no solamente su fuerza electromotriz o tensión en vacío, sino sobre todo que aumente su resistencia interna, por lo que la caída de tensión para un mismo consumo de corriente es más elevada. ¡Es por ello un grave error comprobar el estado de la batería midiendo únicamente la tensión en vacío entre sus terminales!

tensión es de la forma: $i(t) = I_s - Yu(t)$. La corriente I_s corresponde al punto en el que la recta característica corta al eje de abscisas y se denomina corriente de vacío, es decir con $u(t) = 0$. Si se comparan los símbolos de las Figuras 1.8a y 1.42b, se observa que un generador ideal de corriente tiene una admitancia Y en paralelo que es igual a cero (o impedancia infinita). La potencia eléctrica *suministrada* por un generador de corriente real, con los sentidos de tensiones y corrientes mostrados en la Figura 1.42b es:

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (1.62)$$

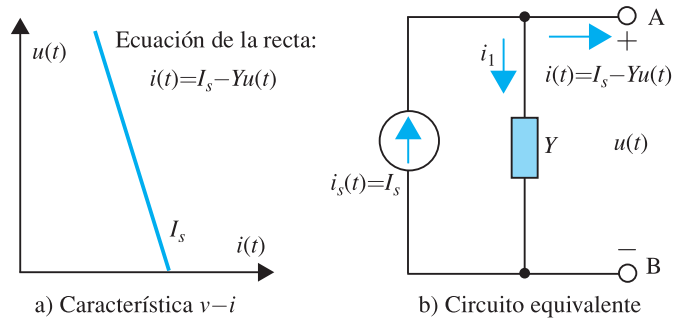


Figura 1.42 Generador de corriente real

Hay que destacar aquí que el concepto de generador de corriente real o ideal, es un término teórico que se introduce en teoría de circuitos para explicar el comportamiento de ciertas redes. Un generador eléctrico: acumulador, pila, etc., es un dispositivo físicamente real, que equivale a un generador real de tensión; lo que sucede es que este generador en ciertas condiciones de funcionamiento puede estar suministrando una corriente que no dependa de la tensión por lo que equivale a un generador de corriente.

1.10. Asociación y transformación de fuentes

Los elementos activos o generadores, sean ideales o reales, se pueden conectar entre sí en serie y en paralelo. Cuando se tienen estas conexiones en un circuito eléctrico, es conveniente simplificar la red a base de sustituir estas combinaciones de elementos activos por generadores equivalentes. Por otro lado, dependiendo del tipo de análisis utilizado para estudiar un circuito, es a veces conveniente emplear únicamente generadores de tensión y en otros casos solamente generadores de corriente, por lo que si en una determinada red, existen ambos tipos de generadores, conviene conocer las reglas de transformación de un tipo de generadores al otro. El objetivo de este epígrafe es demostrar estas reglas de transformación de elementos activos.

a) Fuentes de tensión ideales en serie

Si se tienen generadores ideales de tensión conectados en serie, como indica la Figura 1.43a, pueden sustituirse aplicando el segundo lema de Kirchhoff por otro generador cuya tensión total es igual a la *suma algebraica* de todos ellos, es decir $u_{sT} = \sum u_{si}$ tal como señala la Figura 1.43b.

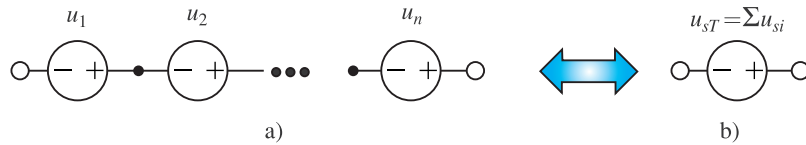


Figura 1.43 Fuentes de tensión conectadas en serie

b) Fuentes de corriente ideales en paralelo

Si se dispone de varias fuentes ideales de corriente conectadas en paralelo, como indica la Figura 1.44a, se pueden sustituir, teniendo en cuenta el primer lema de Kirchhoff por otra fuente ideal de corriente, cuyo valor es la suma algebraica de todos los generadores: $i_{sT} = \sum i_{si}$ tal como se muestra en la Figura 1.44b.

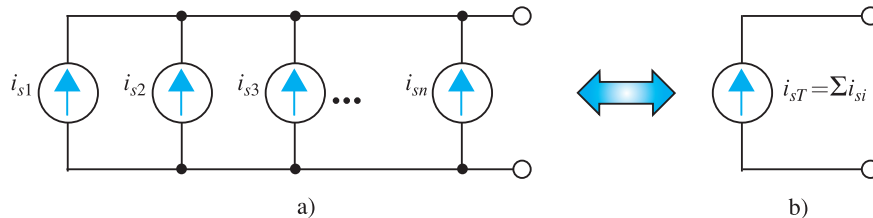


Figura 1.44 Fuentes de corriente conectadas en paralelo

c) Combinaciones no válidas

Las fuentes ideales de tensión no pueden conectarse en paralelo, de no ser que tengan sus tensiones iguales y de forma análoga (dual), las fuentes ideales de corriente no se pueden conectar en serie, a menos que sean idénticas, lo contrario conduciría a una indeterminación en la red. En la práctica, si se conectan en paralelo generadores reales de tensión, con magnitudes distintas, se pueden producir fuertes corrientes de circulación internas, sobre todo trabajando en vacío, es decir sin alimentar una carga externa, de tal modo que la fuente de mayor f.e.m. se descargaría sobre las demás.

d) Fuente de tensión ideal en paralelo con un elemento

En la Figura 1.45a se muestra una fuente ideal de tensión que tiene una impedancia en paralelo. La corriente que circula por la impedancia depende únicamente de la tensión de la fuente $u_s(t)$ que es la que en definitiva está fijando la d.d.p. entre los terminales A y B. En lo que respecta a los cálculos en el resto de la red (es decir, a efectos externos) la presencia o no de la impedancia en paralelo es indiferente y por ello puede omitirse, como así se indica en la Figura 1.45b. Ambos circuitos entregan a la red externa que pueda conectarse entre A y B, tanto la misma tensión $u(t)$ entre terminales como la misma corriente $i(t)$ (esta dependerá por supuesto de la red). Esta equivalencia permite a menudo simplificar redes que a primera vista parecen complicadas. Téngase precaución en esta equivalencia, que es válida solamente a efectos externos de este circuito.

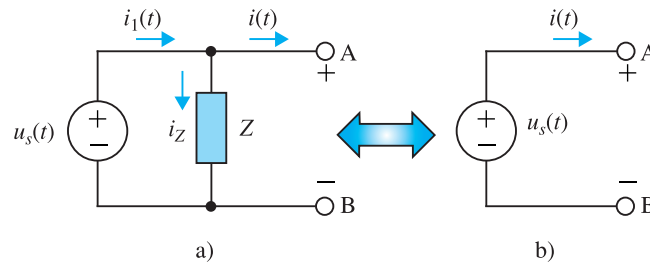


Figura 1.45 Fuente de tensión en paralelo con una impedancia

Obsérvese que ambas redes entregan la misma $u_s(t)$ e $i(t)$ y por lo tanto la misma potencia al circuito que se conecte entre A y B. Sin embargo si se solicita un valor interno de esta red, *debe volverse al circuito original* (Figura 1.45a). Para comprobar esto en un ejemplo simple, supóngase que el circuito de la Figura 1.45a tiene los siguientes parámetros: $u_s(t) = 10$ V; $Z = 10\ \Omega$ y que se conecta externamente una resistencia $R = 2\ \Omega$ (no dibujada en la figura). Ambos circuitos dan una tensión entre terminales igual a 10 V, con una corriente $i(t) = u_s/R = 5$ A, lo que representa una potencia de 50 W. Sin embargo si se solicita el valor de la corriente $i_1(t)$ y la potencia que suministra el generador de tensión, teniendo en cuenta que $i_z = 10/10 = 1$ A, la corriente del generador es $i_1(t) = 5 + 1 = 6$ A por lo que suministra al circuito una potencia $p_i(t) = 60$ W. El elemento en paralelo podría incluso ser un generador de corriente ideal como el que se muestra en la Figura 1.46a. En este caso ocurre una equivalencia análoga. Para el circuito exterior que pueda conectarse entre A y B es indiferente la colocación del generador de corriente. Ambas redes dan al exterior la misma tensión $u_s(t)$, y la misma potencia $p(t) = u_s(t)i(t)$. Sin embargo la corriente *interna* y la potencia *interna* del generador de tensión serían respectivamente: $i_1(t)$ y $u_s(t)i_1(t)$.

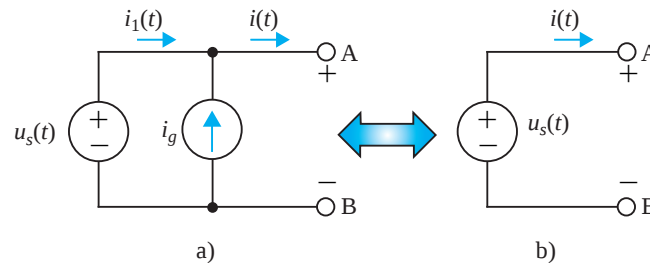


Figura 1.46 Fuente de tensión ideal en paralelo con un generador de corriente

e) Fuente de corriente ideal en serie con un elemento

En la Figura 1.47a se muestra una fuente de corriente ideal en serie con una impedancia que es un *caso dual* al señalado en la Figura 1.46a (donde antes se colocaba una fuente de tensión, ahora se pone una fuente de corriente, donde antes se conectaba una impedancia en paralelo ahora se conecta en serie). En lo que respecta *al resto de la red*, el circuito de la Figura 1.47a se puede sustituir por el de la Figura 1.47b. Ambos circuitos dan la misma corriente $i_s(t)$ que impone el generador de corriente, con la misma tensión externa $u(t)$ (que vendrá determinada por la red que se conecte entre A y B). Sin embargo la equivalencia no

es válida a efectos internos. Obsérvese que la tensión $u_s(t)$ que tendrá el generador de corriente dependerá del valor de la impedancia Z , ya que en esta se produce una tensión de $Zi_s(t)$. Para ver este efecto más claramente, supóngase que $i_s(t) = 2$ A, $Z = 1 \Omega$ y que se conecta entre A y B una resistencia de 10Ω . Se forma de este modo una malla por la cual circula una corriente $i_s(t) = 2$ A, de este modo la d.d.p. en los bornes A y B es igual a $u(t) = U_{AB} = R i_s = 10 \cdot 2 = 20$ V, comunicándose a la resistencia externa una potencia de $u(t) i_s = 40$ W para ambos circuitos de la Figura 1.47. Sin embargo *internamente* el generador de corriente tiene una tensión $u_s(t)$ igual a $u(t) + Zi_s(t) = 20 + 1 \cdot 2 = 22$ V, lo que representa una potencia de $22 \cdot 2 = 44$ W. En definitiva lo que sucede es que el generador de corriente entrega al circuito externo una potencia de 40 W y se disipa en la resistencia interna de 1Ω una potencia $Ri^2 = 4$ W.

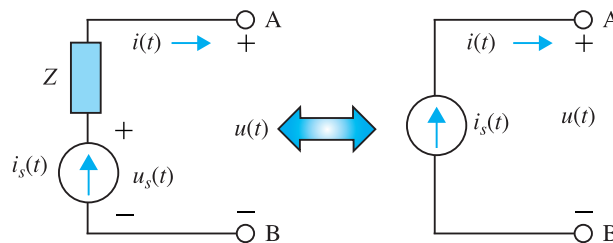


Figura 1.47 Generador de corriente en serie con una impedancia

f) Equivalencia generador de tensión real-generador de corriente real

Un generador real de tensión se puede sustituir a *efectos externos* por un generador real de corriente. Para demostrar las reglas de equivalencia, consideremos los circuitos de la Figura 1.48a y b, que muestran respectivamente un generador de tensión real y un generador de corriente real que suministran al circuito externo, que se conectará entre A y B, la misma tensión $u(t)$ entre terminales y la misma corriente de carga $i(t)$. Imponiendo la igualdad de $u(t)$ e $i(t)$ hacia el circuito externo, se observa que para el generador de tensión, al aplicar el segundo lema de Kirchhoff, se cumple:

$$u_s(t) = u(t) + Zi(t) \quad (1.63)$$

de donde resulta:

$$i(t) = \frac{u_s(t)}{Z} - \frac{u(t)}{Z} \quad (1.64)$$

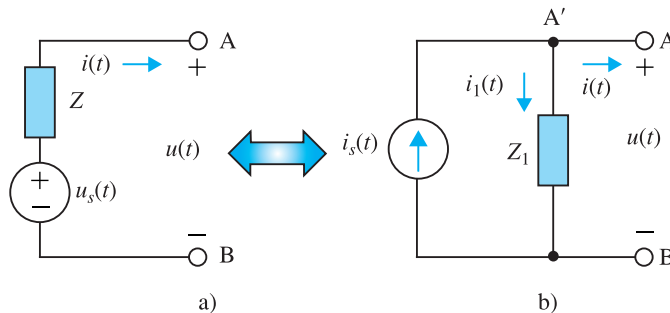


Figura 1.48 Equivalencia generador de tensión real-generador de corriente real

si de una forma dual se aplica el primer lema de Kirchhoff al generador de corriente real, se tiene en el nudo A':

$$i(t) = i_s(t) - i_1(t) = i_s(t) - \frac{u(t)}{Z_1} \quad (1.65)$$

las ecuaciones (1.64) y (1.65) coinciden cuando se cumple la doble igualdad siguiente:

$$i_s(t) = \frac{u_s(t)}{Z} \quad ; \quad Z_1 = Z \quad (1.66)$$

las ecuaciones (1.66) representan de este modo las reglas de transformación e indican, en este caso, los valores de los parámetros del generador de corriente en función de los valores del generador de tensión. Inversamente, si se parte de un generador de corriente real, de la ecuación (1.66) se deduce:

$$u_s(t) = Z_1 i_s(t) \quad ; \quad Z = Z_1 \quad (1.67)$$

que nos dan los valores de los parámetros del generador de tensión equivalente al de corriente. Debe advertirse al lector al hacer estos cambios, de cuáles deben ser los sentidos y polaridades de los generadores. Si el generador de tensión tiene el polo + al lado del terminal A, el generador de corriente bombeará corriente hacia este borne A y viceversa. Se vuelve también a recalcar que esta equivalencia es válida solamente a efectos externos, es decir para analizar el comportamiento del circuito que se conecte entre A y B. Si se solicita en un problema específico, un parámetro interior de los circuitos de la Figura 1.48 debe volverse al esquema original. Otro aspecto a considerar es la imposibilidad de sustituir un generador *ideal de tensión* por otro de *corriente ideal* o a la inversa. Recuérdese que en un generador de tensión ideal, la impedancia Z es igual a cero, por lo que si se intentara transformarlo en generador de corriente, de acuerdo con las reglas de equivalencia indicadas en (1.66), daría lugar a una corriente i_s de valor infinito y además con $Z_1 = Z = 0$, es decir con los terminales en cortocircuito, lo que no tiene sentido físico. Análogamente se puede demostrar la relación inversa, que conduce a resultados similares.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.3

Sustituir la red de la Figura 1.49 por un generador real de tensión o de corriente.

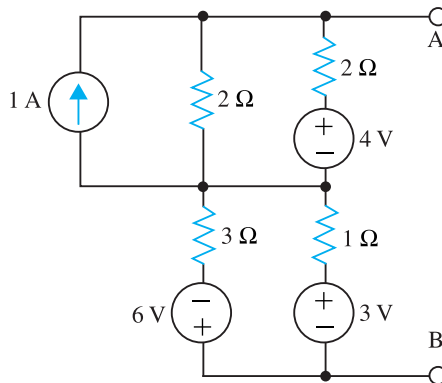


Figura 1.49 Ejemplo de aplicación 1.3

Solución

Pasando los generadores reales de tensión a corriente, aplicando las equivalencias dadas en (1.66) se obtiene el circuito de la Figura 1.50a que a su vez se convierte en el de la Figura 1.50b, al transformar los generadores de corriente por sus equivalentes y habiendo sustituido también las resistencias en paralelo por sus resultantes.

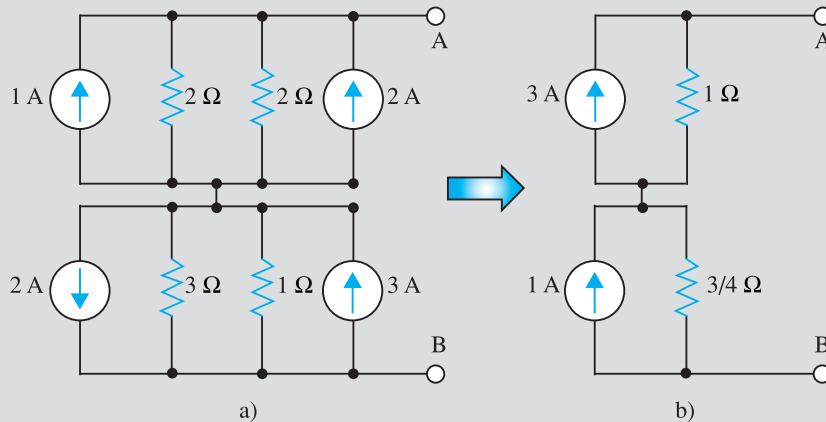


Figura 1.50 Circuito equivalente de la Figura 1.49

El circuito último puede simplificarse más, pasando los generadores de corriente a tensión (Figura 1.51a), que a su vez al sumar los elementos en serie dan el circuito de la Figura 1.51b, en forma de generador real de tensión o el de la Figura 1.51c en forma de generador de corriente real.

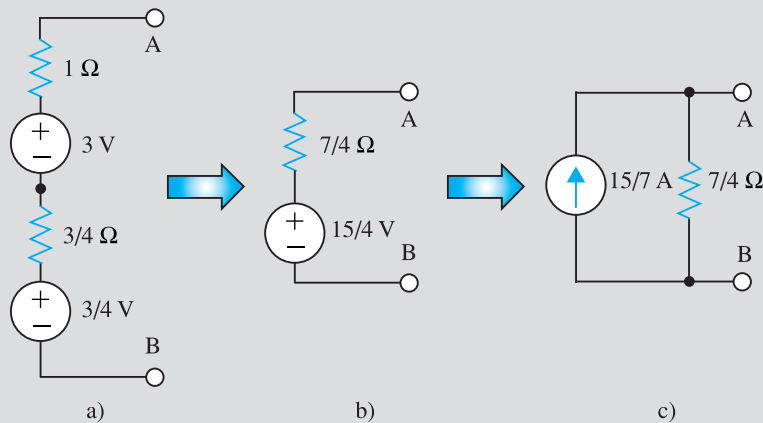


Figura 1.51 Circuito equivalente de la Figura 1.50

1.11. Asociación de elementos pasivos

Los elementos pasivos, al igual que los activos, pueden conectarse entre sí, de tal forma que una combinación de ellos puede sustituirse por un valor equivalente. Las principales combinaciones que se realizan son las que explicamos a continuación.

1.11.1. Conexión en serie

Varios elementos pasivos se dice que están conectados en serie cuando circula por ellos la misma corriente eléctrica. Consideremos los elementos pasivos conectados en serie de la Figura 1.52a representados por sus impedancias operacionales $Z_1(D)$, $Z_2(D)$, etc. Si llamamos $u_1, u_1, \dots, u_n$ a la d.d.p. en los bornes de cada impedancia y u_T a la tensión total, de acuerdo con el segundo lema de Kirchhoff se cumple:

$$u_T = \sum_{j=1}^n u_j = Z_1 i + Z_2 i + \dots + Z_n i = (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) i \quad (1.68)$$

es decir:

$$u_T = Z_T i \quad (1.69)$$

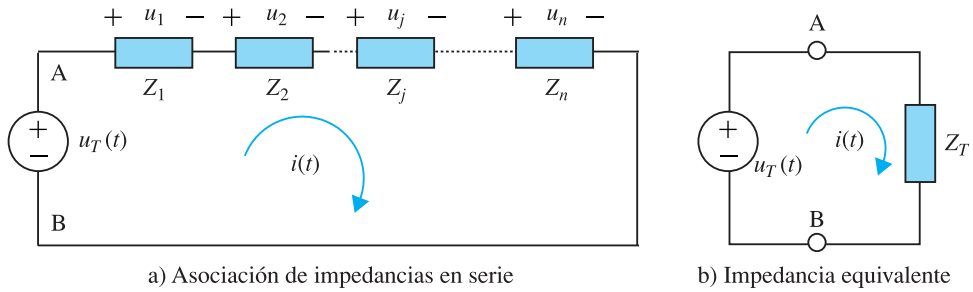


Figura 1.52 Impedancias en serie y su impedancia equivalente

Lo que indica que la relación entre u_T e i no se modifica, si el grupo de los n elementos se sustituye por uno solo de impedancia total Z_T igual a:

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_j + \dots + Z_n = \sum_{j=1}^n Z_j \quad (1.70)$$

que da el valor resultante de la asociación de impedancias en serie. En la Figura 1.52b se muestra el circuito equivalente correspondiente. Si la tensión en una impedancia intermedia Z_j , de la Figura 1.52a, es u_j se puede escribir:

$$u_j = Z_j i; \quad u_T = Z_T i \Rightarrow u_j = \frac{Z_j}{Z_T} u_T \quad (1.71)$$

que se denomina *regla del divisor de tensión*. La aplicación de la expresión (1.70) a los diferentes elementos pasivos, si se tienen en cuenta las expresiones (1.41), nos da:

1. Resistencias:

En este caso se cumple:

$$u_T = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) i = R_T i \quad (1.72)$$

lo que indica que la resistencia equivalente a un conjunto de resistencias en serie es igual a las sumas de las resistencias:

$$R_T = R_1 + R_2 + \dots + R_j + \dots + R_n = \sum_{j=1}^n R_j \quad (1.73)$$

2. Bobinas:

La aplicación de (1.68) conduce a lo siguiente:

$$u_T = (L_1 + L_2 + \dots + L_n)Di \quad (1.74)$$

que llamando L_T a la inductancia equivalente resulta:

$$u_T = L_T Di \quad (1.75)$$

es decir:

$$L_T = L_1 + L_2 + \dots + L_j + \dots + L_n = \sum_{j=1}^n L_j \quad (1.76)$$

que indica que la inductancia de varias bobinas en serie es la suma de las inductancias.

3. Condensadores:

En este caso (1.68) da:

$$u_T = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \frac{1}{D} i = \frac{1}{C_T D} i \quad (1.77)$$

por lo que la capacidad equivalente cumple la siguiente expresión:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \quad (1.78)$$

Es decir, la inversa de la capacidad total es igual a la suma de las inversas de las capacidades individuales.

■ 1.11.2. Conexión en paralelo

Se dice que varios elementos pasivos están conectados en paralelo cuando están sometidos todos a la misma tensión. Consideremos los elementos conectados en paralelo de la Figura 1.53a representados por sus *admitancias*: $Y_1(D)$, $Y_2(D)$, ..., $Y_n(D)$. Cada uno de ellos deriva corrientes i_1 , i_2 , ..., i_n , de tal forma que teniendo en cuenta el primer lema de Kirchhoff y la relación (1.43) se cumple:

$$i_T = \sum_{j=1}^n i_j = Y_1 u + Y_2 u + \dots + Y_n u = (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) u \quad (1.79)$$

es decir:

$$i_T = Y_T u \quad (1.80)$$

cuyo equivalente es el mostrado en la Figura 1.53b. Y_T representa la admitancia total que consume la misma corriente total i_T que todas las admitancias conectadas en paralelo, resultando que:

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_j + \dots + Y_n = \sum_{j=1}^n Y_j \quad (1.81)$$

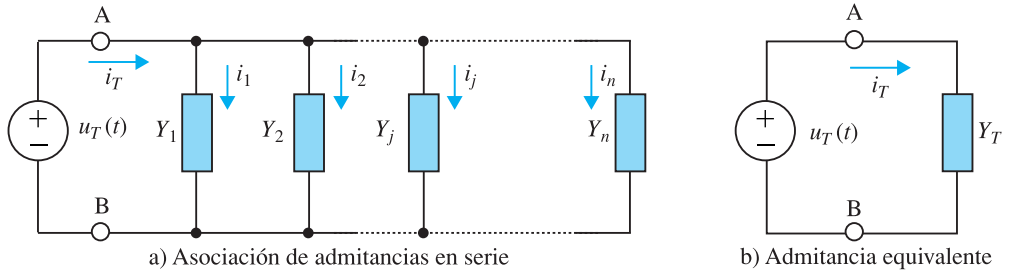


Figura 1.53 Admitancias en paralelo y su valor equivalente

Si la corriente en la admitancia Y_j intermedia de la Figura 1.53a, es i_j se tiene:

$$i_j = Y_j u; \quad i_T = Y_T u \Rightarrow i_j = \frac{Y_j}{Y_T} i_T \quad (1.82)$$

que se denomina *regla del divisor de corriente*. La aplicación de (1.81) al cálculo de la admitancia total de una conexión de elementos pasivos, si se tienen en cuenta las expresiones (1.44), conducen a los resultados siguientes:

1. Resistencias:

En este caso la admitancia de una resistencia es su conductancia ($G = 1/R$) de tal forma que se cumple de acuerdo con (1.81)

$$G_T = G_1 + G_2 + \dots + G_j + \dots + G_n = \sum_{j=1}^n G_j \quad (1.83)$$

o en función de las resistencias:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \quad (1.84)$$

Es decir, la inversa de la resistencia total es igual a la suma de las inversas de las resistencias individuales. En el caso más simple, de que se conecten solamente dos resistencias en paralelo, la expresión anterior nos da:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.85)$$

Es decir, la resistencia total es el producto de las resistencias dividido por su suma. Y las corrientes que se derivan por cada rama en función de la corriente total, de acuerdo con la regla del divisor de corriente (1.82) aplicada a conductancias, son:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{G_1}{G_T} i_T = \frac{1/R_1}{(1/R_1) + (1/R_2)} i_T = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_T \\ i_2 &= \frac{G_2}{G_T} i_T = \frac{1/R_2}{(1/R_1) + (1/R_2)} i_T = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_T \end{aligned} \quad (1.86)$$

Lo que señala que cuando solamente se tienen dos resistencias, el valor de la corriente que pasa por una de ellas es igual a la corriente total multiplicada por el valor de la otra resistencia y dividido por la suma de las resistencias.

2. Inductancias o bobinas:

De forma análoga a las resistencias se obtiene:

$$\frac{1}{L_T} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_j} \quad (1.87)$$

Que indica que la inversa de la inductancia total es igual a la suma de las inversas de las inductancias individuales.

3. Condensadores:

En este caso la admitancia de un condensador es $C_i D$; llamando $C_T D$ a la admitancia total, se tiene:

$$i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) Du \quad ; \quad i = C_T Du \quad (1.88)$$

de donde:

$$C_T = C_1 + C_2 + \dots + C_j + \dots + C_n = \sum_{j=1}^n C_j \quad (1.89)$$

Lo que indica que la capacidad equivalente a varios condensadores conectados en paralelo es igual a la suma de las capacidades de los condensadores individuales.

■ 1.11.3. Equivalencia estrella-triángulo. Teorema de Kennelly

Hay ciertas asociaciones de elementos pasivos que aparecen frecuentemente en la Ingeniería Eléctrica y que no se pueden simplificar directamente ya que no corresponden a simples asociaciones de impedancias en serie o paralelo. Estas redes generalmente requieren una transformación de una red *estrella* a una red *triángulo* o viceversa. En la Figura 1.54 se muestran estas redes pasivas, cuyos terminales de acceso exterior se han denominado 1, 2 y 3 y que tienen la misma situación geométrica en ambos montajes.

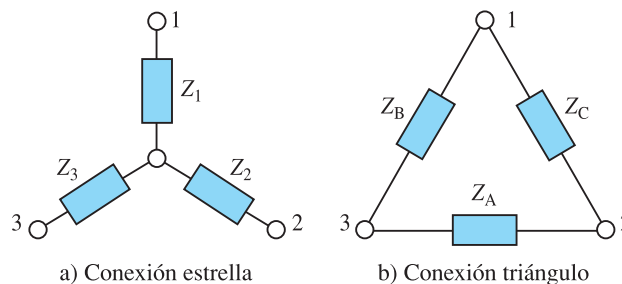


Figura 1.54 Equivalencia estrella-triángulo. Teorema de Kennelly

La conexión estrella está formada por tres impedancias Z_1 , Z_2 y Z_3 , que parten de los tres terminales de acceso externo 1, 2 y 3 y que se unen en un punto común. La conexión triángulo se compone de tres impedancias Z_A , Z_B y Z_C , unidas a los tres terminales externos, dando la apariencia geométrica de un triángulo.

Es preciso ahora buscar las leyes de transformación de una red en la otra, de tal modo que ambos circuitos sean equivalentes desde un punto de vista externo, es decir desde los nudos 1, 2 y 3. Está claro que si las dos redes son equivalentes, deben consumir las mismas corrientes cuando se aplican las mismas tensiones externas, lo que equivale a decir, en términos de impedancia, que las impedancias que se observan entre los diferentes terminales 1-2, 2-3 y 3-1 deben ser idénticas para ambos montajes, y por consiguiente se deben satisfacer las siguientes igualdades:

Impedancia entre los nudos 1 y 2:

$$\text{a)} \quad Z_1 + Z_2 = Z_C \parallel (Z_A + Z_B) = \frac{Z_C(Z_A + Z_B)}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (1.90)$$

Impedancia entre los nudos 2 y 3:

$$\text{b)} \quad Z_2 + Z_3 = Z_A \parallel (Z_B + Z_C) = \frac{Z_A(Z_B + Z_C)}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (1.91)$$

Impedancia entre los nudos 3 y 1:

$$\text{c)} \quad Z_3 + Z_1 = Z_B \parallel (Z_C + Z_A) = \frac{Z_B(Z_C + Z_A)}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (1.92)$$

El símbolo $\parallel$ en las expresiones anteriores significa la conexión en paralelo de la impedancia que tiene delante con la que tiene detrás. Para escribir las igualdades anteriores, se ha tenido en cuenta que, en la conexión en estrella de la Figura 1.54a, la impedancia que se observa desde cada par de terminales, es la conexión en serie de las dos impedancias existentes entre esos dos nudos; mientras que para la disposición en triángulo de la Figura 1.54b, la impedancia equivalente vista desde cada par de terminales, es la asociación en paralelo de la impedancia única que une esos nudos con la combinación en serie de las otras dos. Las ecuaciones anteriores se pueden resolver para obtener los valores de Z_1 , Z_2 , Z_3 en función de Z_A , Z_B , Z_C o a la inversa. Resultando:

1. Transformación triángulo-estrella

En este caso se conocen los valores de Z_A , Z_B y Z_C del triángulo y se desean calcular los equivalentes Z_1 , Z_2 , Z_3 de la estrella. El proceso de resolución es simple a partir de las ecuaciones (1.90), (1.91) y (1.92). Obsérvese por ejemplo que Z_1 se puede obtener sumando la ecuación (1.90) con (1.92) y restando la (1.91) y de un modo análogo se calculan Z_2 y Z_3 dando lugar a los siguientes resultados:

$$Z_1 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}; \quad Z_2 = \frac{Z_C Z_A}{Z_A + Z_B + Z_C}; \quad Z_3 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (1.93)$$

Cada una de las ecuaciones anteriores responde a la forma:

$$Z_i = \frac{\text{producto de las dos impedancias del triángulo conectadas al nudo } i}{\text{suma de las tres impedancias del triángulo}} \quad (1.94)$$

que nos da una regla mnemotécnica simple para recordar la equivalencia triángulo-estrella.

2. Transformación estrella-triángulo

En este caso se conocen los valores de las impedancias Z_1, Z_2, Z_3 de la estrella y se desean calcular los valores equivalentes de Z_A, Z_B, Z_C del triángulo. El proceso de resolución consiste en dividir dos a dos las ecuaciones (1.93) lo que da lugar a:

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{Z_A}{Z_B} \quad ; \quad \frac{Z_3}{Z_1} = \frac{Z_A}{Z_C} \quad ; \quad \frac{Z_3}{Z_2} = \frac{Z_B}{Z_C} \quad (1.95)$$

y al sustituir en la tercera ecuación (1.93) nos da:

$$Z_3 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{Z_A}{\frac{Z_A}{Z_B} + 1 + \frac{Z_C}{Z_B}} = \frac{Z_A}{\frac{Z_2}{Z_1} + 1 + \frac{Z_2}{Z_3}} \quad (1.96)$$

de donde se deduce ya Z_A :

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \quad (1.97)$$

y de un modo análogo para Z_B y Z_C :

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \quad ; \quad Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \quad (1.98)$$

cada una de las ecuaciones anteriores responden a la expresión:

$$Z_i = \frac{\text{suma de los productos binarios de todas las impedancias de la estrella}}{\text{impedancia de la estrella conectada al nudo opuesto a } Z_i} \quad (1.99)$$

Las transformaciones anteriores, que constituyen el *Teorema de Kennelly*, se utilizan con gran frecuencia en el análisis de circuitos, ya que permiten simplificar ciertas redes en las que las impedancias no están conectadas de forma simple: en serie o en paralelo.

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.4

Calcular la resistencia entre los terminales A y B de la red de la Figura 1.55, donde todas las cifras indican el valor de las resistencias en ohmios.

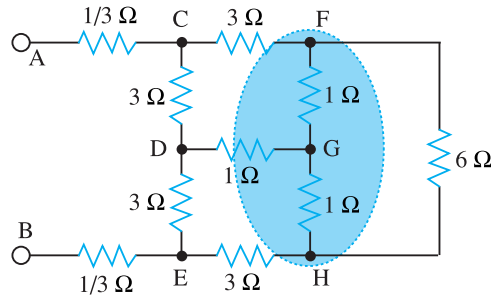


Figura 1.55 Ejemplo de aplicación 1.4

Solución

Transformando la conexión estrella de las resistencias de $1\ \Omega$ conectadas entre los terminales DFH a la conexión triángulo (ver zona sombreada de la Figura 1.55), se obtiene el siguiente valor de las tres resistencias del triángulo:

$$R_{\Delta} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{1} = 3\ \Omega$$

lo que da lugar al circuito de la Figura 1.56. Existen ahora dos triángulos CDF y DEH que pueden transformarse en estrella (ver zonas sombreadas de la Figura 1.56). El valor de cada resistencia de las estrellas equivalentes es:

$$R_Y = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3 + 3} = 1\ \Omega$$

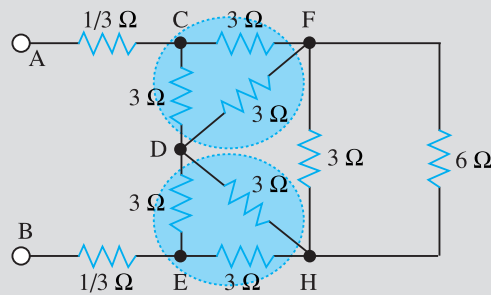


Figura 1.56 Circuito transformado 1

Lo que da lugar al circuito de la Figura 1.57. En esta red pueden sumarse las resistencias en serie comprendidas entre los terminales:

$$\text{AC y CM:} \quad R = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\ \Omega$$

$$\text{BE y EN:} \quad R = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\ \Omega$$

$$\text{MD y DN:} \quad R = 1 + 1 = 2\ \Omega$$

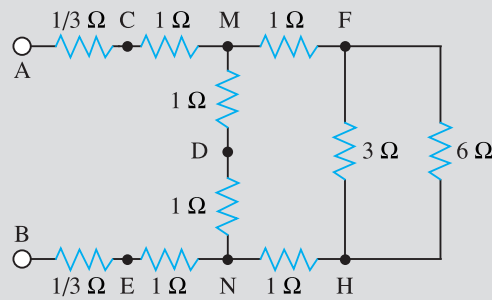


Figura 1.57 Circuito transformado 2

Y por otra parte las resistencias de $3\ \Omega$ y $6\ \Omega$ conectadas directamente a los nudos F y H están en paralelo, resultando un valor equivalente, de acuerdo con la expresión (1.85):

$$R = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2\ \Omega$$

y la red de la Figura 1.57 se transforma en la red de la Figura 1.58. En esta red se tienen en serie las resistencias comprendidas entre MF, FH y HN, resultando un valor equivalente:

$$R = 1 + 2 + 1 = 4\ \Omega$$

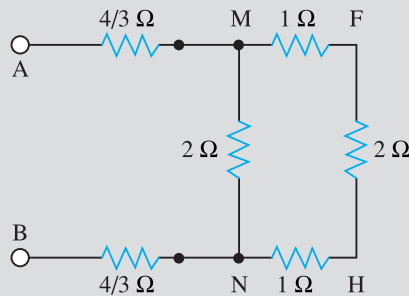


Figura 1.58 Circuito transformado 3

que está en paralelo con la resistencia de $2\ \Omega$ comprendida entre los nudos M y N, dando lugar a una resistencia equivalente:

$$R = \frac{2 \cdot 4}{2 + 4} = \frac{4}{3}\ \Omega$$

y así se obtiene el circuito de la Figura 1.59, donde se observa que las tres resistencias están en serie, resultando una resistencia total entre los terminales A y B:

$$R_{AB} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4\ \Omega$$

que es el valor solicitado en el problema.

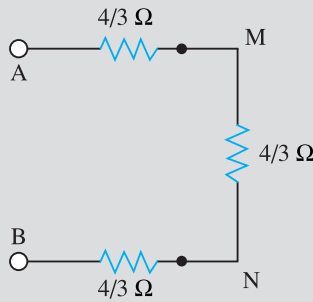


Figura 1.59 Circuito transformado 4

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.5: Red en escalera

La Figura 1.60 muestra una red eléctrica que aparece en ciertas aplicaciones de las líneas de transmisión, y que se denomina **red en escalera**. Las ramas horizontales se han expresado en forma de impedancias, mientras que las ramas verticales se expresan en admitancias. Calcular: a) expresión de la ley de recurrencia que se obtiene para determinar la impedancia equivalente de entrada de la red; b) si la red es infinita y los valores de las impedancias son todos resistivos e iguales a 1 ohmio y las admitancias son de 1 siemens, determinar el valor de Z_{eq} . (*Nota histórica:* La red en escalera fue estudiada con profundidad por A. C. Barlett).

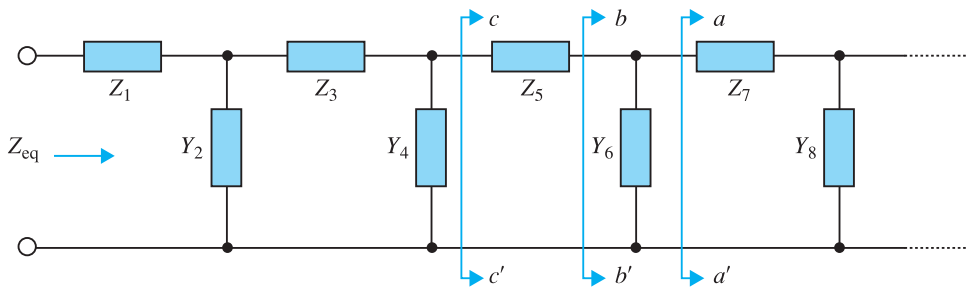


Figura 1.60 Red en escalera

Solución

a) Para determinar la Z_{eq} de la red, comenzaremos por la derecha (final de la red) y se irá de atrás a adelante. En la sección aa' se tiene la conexión en serie de Z_7 con Y_8 que da lugar a un valor:

$$Z_{aa'} = Z_7 + \frac{1}{Y_8 + \dots}$$

Ahora bien la admitancia Y_6 está en paralelo con $Z_{aa'}$ y por consiguiente la admitancia total entre bb' es igual a:

$$Y_{bb'} = Y_6 + Y_{aa'} = Y_6 + \frac{1}{Z_7 + \frac{1}{Y_8 + \dots}}$$

A continuación Z_5 está en serie con $Z_{bb'}$ y por ello la impedancia que se tiene entre c y c' es:

$$Z_{cc'} = Z_5 + Z_{bb'} = Z_5 + \frac{1}{Y_6 + \frac{1}{Z_7 + \frac{1}{Y_8 + \dots}}}$$

continuando de este modo se obtiene una impedancia equivalente de la red:

$$Z_{eq} = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \dots}}}}$$

la expresión anterior se conoce con el nombre de *fracción continua*. Conociendo los valores numéricos de las impedancias y admitancias se puede calcular la impedancia equivalente de la red de un modo simple. Por ejemplo si la red tiene 6 elementos de valor 1 ohmio y 1 siemens resulta:

$$Z_{eq} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8} = 1,625 \, \Omega$$

b) En el caso de que se tenga una red infinita tal como se muestra en la Figura 1.61a, para calcular la impedancia equivalente se debe determinar en principio el límite a que tiende la fracción continua calculado en el apartado anterior. Sin embargo el problema es más simple, si se cae en la cuenta de que al añadir a la red de la Figura 1.61a, la *célula* que se repite, se obtiene la red de la Figura 1.61b, donde la resistencia que se observa entre aa' debe ser la misma que la que se observa entre b y b' , es decir R_{eq} . En la red de la Figura 1.61b se debe cumplir por lo tanto lo siguiente:

$$R_{bb'} = 1 + 1 \parallel R_{aa'}$$

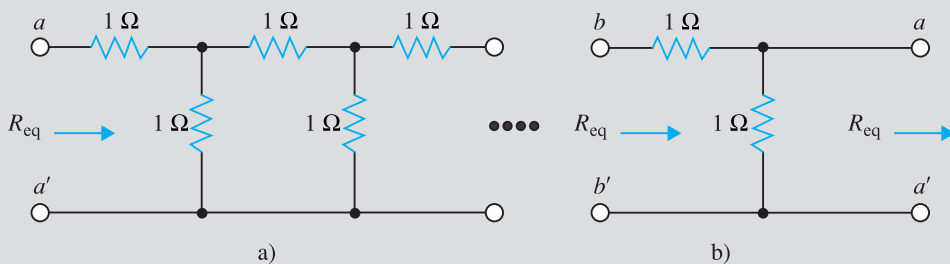


Figura 1.61 Cálculo de la resistencia equivalente de una red en escalera

es decir:

$$R_{eq} = 1 + \frac{1 \cdot R_{eq}}{1 + R_{eq}}$$

que da lugar a la siguiente ecuación y resultado final:

$$R_{eq}^2 - R_{eq} - 1 = 0 \Rightarrow R_{eq} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \, \Omega$$



Amplíe sus conocimientos

Teorema de Rosen: Las transformaciones estrella-triángulo definidas por las ecuaciones (1.97) y (1.98) son para la impedancia Z_A de la forma:

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \quad (a)$$

lo que corresponde a una admitancia:

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = \frac{Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} = \frac{1/Y_1}{(1/Y_1 Y_2) + (1/Y_2 Y_3) + (1/Y_3 Y_1)} \quad (b)$$

es decir:

$$Y_A = \frac{1}{(1/Y_2) + (Y_1/Y_2 Y_3) + (1/Y_3)} \frac{Y_2 Y_3}{Y_2 Y_3} = \frac{Y_2 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad (c)$$

que es una expresión equivalente a la (a) pero expresada en forma de admitancias. De un modo análogo, las ecuaciones (1.98) se pueden escribir así:

$$Y_B = \frac{Y_3 Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad ; \quad Y_C = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad (d)$$

Se observa que las ecuaciones (b) y (c) son duales a las (1.93) que definen la transformación triángulo-estrella. Se debe a Rosen una ampliación del teorema de Kennelly para transformar una red en estrella de n ramas por un contorno poligonal de n lados, incluyendo a todas sus diagonales, es decir con $n(n-1)/2$ elementos. En la Figura 1.62 se muestran las redes específicas para $n = 5$.

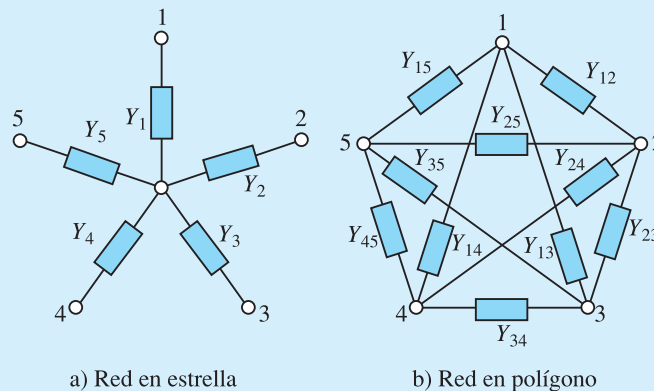


Figura 1.62 Teorema de Rosen

Si se denominan $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$, las admitancias de la red en estrella, las admitancias Y_{ij} entre los nudos i y j del polígono son de la forma:

$$Y_{ij} = \frac{Y_i Y_j}{\sum Y}; \quad \text{donde} \quad \sum Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n \quad (e)$$

que para $n = 3$ coincide obviamente con las ecuaciones (c) y (d) calculadas anteriormente. Debe señalarse que esta equivalencia no es recíproca, es decir, un esquema poligonal (incluyendo sus diagonales) no puede transformarse en una estrella equivalente, ya que el número de admitancias del polígono es mayor que el de admitancias de la estrella, por lo que resultaría un sistema incompatible. La única posibilidad de poder realizar esta transformación, es imponer ciertas restricciones en los valores de las admitancias de la red poligonal, para obtener una solución única.

■ 1.12. Análisis de circuitos por el método de las mallas

En lo explicado hasta ahora se han formulado los teoremas y métodos fundamentales que se utilizan en teoría de circuitos. En este epígrafe y en el siguiente se van a describir dos métodos sistemáticos: método de las corrientes de malla (o simplemente método de las mallas) y método de las tensiones de nudo (o simplemente método de los nudos), que permiten resolver los circuitos de un modo ordenado, escribiendo las ecuaciones independientes de la red en función de un pequeño número de variables (el mínimo necesario), lo que da lugar a procedimientos metódicos, fáciles de aplicar, y también rápidos, que utilizan como base los lemas de Kirchhoff.

■ 1.12.1. Método de las mallas. Formulación general

El método de las mallas (en general, método de las corrientes de lazo para circuitos no planos) consiste en aplicar el segundo lema de Kirchhoff a las mallas del circuito, de tal forma que el primer lema de Kirchhoff queda aplicado implícitamente. Antes de empezar a resolver un circuito por el método de las mallas, se debe intentar, siempre que sea posible, sustituir los generadores de corriente existentes en la red por generadores de tensión equivalentes, con las técnicas analizadas en el apartado f) del Epígrafe 1.10. Esto siempre será factible en el caso de que los generadores de corriente presentes en la red sean *reales* (es decir tengan una impedancia en paralelo) pero no en el caso de que los generadores de corriente sean *ideales*, y esta situación se analizará más tarde en el Epígrafe 1.12.2. Consideraremos por consiguiente que en la red, se han podido sustituir todos los generadores de corriente por tensión. Recordemos también que el número de mallas m que tiene una red plana es según lo estudiado en el Epígrafe 1.8.3 igual a:

$$m = r - n + 1 \quad (1.100)$$

siendo r el número de ramas y n el número de nudos del circuito. Sabemos también que al aplicar el 2º lema de Kirchhoff a estas m mallas se obtiene un conjunto de ecuaciones linealmente independientes. Por otro lado, las mallas de un circuito plano, se identifican como las *ventanas* que tiene la red. Para comprender la forma en que se aplica el método de las mallas, vamos a considerar el circuito de la Figura 1.63, formado por las dos mallas, que ya tienen generadores de tensión. El método de las mallas consiste en asignar a cada malla una corriente desconocida, que en la Figura 1.63 se han denominado i_1 e i_2 , de tal forma que tengan *todas* el mismo sentido, por ejemplo el de movimiento de las agujas del

reloj. La elección idéntica del sentido de estas corrientes permitirá obtener un sistema de ecuaciones cuya descripción es muy metódica y simple. Las intensidades de rama quedan fácilmente identificadas, en función de las corrientes de malla, ya que se cumple:

1. Las ramas externas pertenecen a una sola malla, por lo que la intensidad de rama será igual a $\pm$ la intensidad de la malla a la que pertenece; se tomará el signo más si coinciden las referencias de polaridad de las intensidades de rama y malla y signo menos en caso contrario.
2. Toda la rama interna pertenece a dos mallas, de tal forma que si todas las corrientes de malla tienen el mismo sentido, la intensidad de esa rama es la diferencia entre las corrientes de dichas mallas, el resultado vendrá afectado de signo $+$ o $-$ según que su referencia de polaridad coincida o no con la de rama.

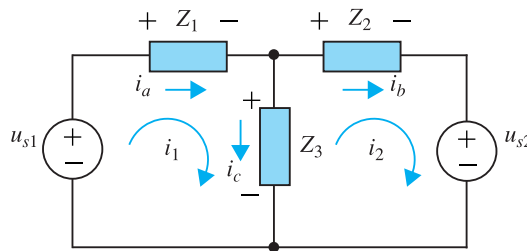


Figura 1.63 Aplicación del método de las corrientes de malla

De acuerdo con lo anterior, las corrientes de rama i_a , i_b e i_c de la Figura 1.63 están relacionadas con las corrientes de malla i_1 e i_2 por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} i_a &= i_1 \\ i_b &= i_2 \\ i_c &= i_1 - i_2 \end{aligned} \quad (1.101)$$

si se aplica ahora el segundo lema de Kirchhoff a cada una de las mallas, siguiendo el sentido dextrógiro se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Malla 1: } & -u_{s1} + Z_1 i_a + Z_3 i_c = 0 \\ \text{Malla 2: } & +u_{s2} + Z_2 i_b - Z_3 i_c = 0 \end{aligned} \quad (1.102)$$

Si las fuentes de tensión se colocan en un miembro de las ecuaciones anteriores y las tensiones en las impedancias en el otro miembro, el conjunto (1.102) se transforma en:

$$\begin{aligned} u_{s1} &= Z_1 i_a + Z_3 i_c \\ -u_{s2} &= Z_2 i_b - Z_3 i_c \end{aligned} \quad (1.103)$$

estas ecuaciones se hubieran podido escribir directamente pues expresan una forma alternativa del segundo lema de Kirchhoff que indica que la suma de las elevaciones de potencial de los generadores en una malla es igual a las caídas de potencial producidas en las impedancias. Hay que destacar para la aplicación correcta de (1.103) que el signo que se aplica a una *fente o generador* es *positivo* (negativo), cuando su *polaridad de referencia supone una elevación* (caída) de potencial en el sentido de recorrido de la corriente de ma-

lla correspondiente. (Conviene que el lector asimile bien estos signos). Sustituyendo las ecuaciones (1.101) en (1.103) resulta:

$$\begin{aligned} u_{s1} &= Z_1 i_1 + Z_3(i_1 - i_2) \\ u_{s2} &= Z_2 i_2 - Z_3(i_1 - i_2) \end{aligned} \quad (1.104)$$

que reduciendo a términos semejantes da lugar a:

$$\begin{aligned} \text{Malla 1: } u_{s1} &= (Z_1 + Z_3)i_1 - Z_3 i_2 \\ \text{Malla 2: } u_{s2} &= -Z_3 i_1 + (Z_2 + Z_3)i_2 \end{aligned} \quad (1.105)$$

las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma más compacta del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \sum (u_s)_1 &= Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 \\ \sum (u_s)_2 &= Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 \end{aligned} \quad (1.106)$$

que admite la forma matricial siguiente:

$$[u_s] = \begin{bmatrix} \sum (u_s)_1 \\ \sum (u_s)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [Z] [i] \quad (1.107)$$

donde $\sum (u_s)_1$ y $\sum (u_s)_2$ representan la suma de las tensiones generadoras (elevaciones de potencial eléctrico) que se obtienen al recorrer las mallas 1 y 2 en el sentido de las corrientes que circulan por ellas. Obsérvese en las ecuaciones (1.105) y en la Figura 1.62 que en la malla 1 solo hay una tensión generadora u_{s1} y aparece con signo positivo ya que respecto al sentido de corriente i_1 representa una elevación de potencial (la corriente i_1 recorre al generador u_{s1} de $-$ a $+$), mientras que en la malla 2 solo existe un generador u_{s2} que aparece con signo negativo ya que respecto al sentido de la corriente i_2 representa una caída de potencial (la corriente i_2 atraviesa el generador u_{s2} de $+$ a $-$).

Por otra parte al comparar las ecuaciones (1.106) o (1.107) con (1.105) se observa que:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_1 + Z_3 \\ Z_{12} &= Z_{21} = -Z_3 \\ Z_{22} &= Z_2 + Z_3 \end{aligned} \quad (1.108)$$

Las impedancias Z_{11} y Z_{22} (y en general Z_{ii}) se conocen con el nombre de **autoimpedancias de las mallas** 1, 2 (en general i) y son la suma de las impedancias de las ramas que forman las mallas 1, 2, ..., i . Las impedancias $Z_{12} = Z_{21}$ y en general Z_{ij} se conocen con el nombre de **impedancias mutuas** entre las mallas del primero y segundo subíndices y son, *con signo negativo*, la suma de las impedancias de la rama común a ambas mallas. La matriz de impedancias indicada en (1.107) es en consecuencia una matriz simétrica, con todos los términos de la diagonal principal positivos e iguales a las autoimpedancias de cada malla. Los demás términos son negativos y representan las impedancias mutuas entre mallas. Estas propiedades permiten por ello escribir directamente las ecuaciones (1.105) según las reglas mencionadas.

En el caso de existir en el circuito generadores dependientes o controlados, será preciso introducir ecuaciones adicionales a las anteriores que relacionen la tensión o corriente de la

fuente controlada con las corrientes de las mallas; en este caso el conjunto total dará lugar a una matriz de impedancias que ya no será simétrica. De cualquier modo, se observa que el método de las mallas utiliza $m = r - n + 1$ ecuaciones, que es un número inferior al de ramas r , que era el número de ecuaciones necesarias al aplicar los lemas de Kirchhoff (mallas y nudos). El método de las mallas representa por ello una optimización respecto al número de incógnitas y ecuaciones puestas en juego, con la ventaja adicional de que se pueden escribir las ecuaciones de un modo sistemático. Calculadas las corrientes de malla de las ecuaciones (1.105), se podrán determinar las corrientes de rama de acuerdo con (1.101).



EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.6

En el circuito de la Figura 1.64, calcular por el método de las mallas: a) d.d.p. entre los nudos A y C; b) potencia disipada en la resistencia de $3\ \Omega$.

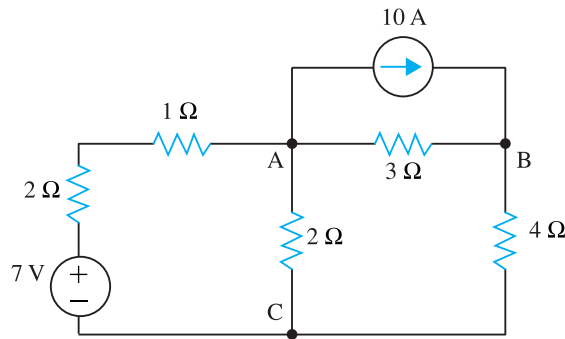


Figura 1.64 Ejemplo de aplicación 1.6

Solución

a) Primeramente, vamos a sustituir el generador de corriente real por uno de tensión equivalente. De acuerdo con (1.67) los valores correspondientes son:

$$u_s = Z \cdot i = 3 \cdot 10 = 30\text{ V} \quad ; \quad Z = 3\ \Omega$$

debe tenerse en cuenta al hacer este cambio que, de acuerdo con el sentido del generador de corriente de la Figura 1.64, el generador de tensión de 30 V tendrá la polaridad mostrada en la Figura 1.65, con el terminal + a la derecha para impulsar cargas en este sentido. (El sentido de la elevación de potencial de este generador debe coincidir con el de la corriente del generador de intensidad al que sustituye).

Asignando al circuito de la Figura 1.65 los sentidos de las corrientes de malla indicados y teniendo en cuenta (1.106) se podrá escribir directamente:

$$\text{Malla 1: } 7 = (2 + 1 + 2)i_1 - 2i_2$$

$$\text{Malla 2: } 30 = -2i_1 + (2 + 3 + 4)i_2$$

de donde resulta:

$$i_1 = 3\text{ A} \quad ; \quad i_2 = 4\text{ A}$$

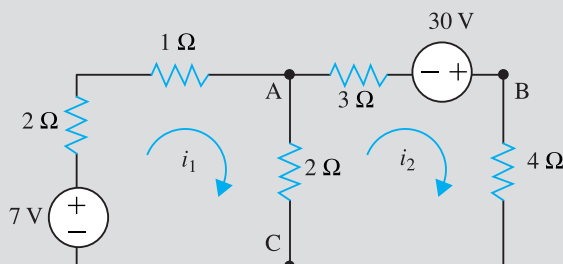


Figura 1.65 Circuito equivalente de la Figura 1.64

y la d.d.p. entre A y C puede obtenerse directamente como tensión en la resistencia de $2\ \Omega$ resultando ser:

$$U_{AC} = Ri = 2 \cdot (i_1 - i_2) = 2(3 - 4) = -2\text{ V}$$

el mismo valor puede obtenerse por cualquier otro camino que una el nudo A con C. Por ejemplo si se sigue la ruta ABC que contiene dos resistencias de $3\ \Omega$ y $4\ \Omega$ y un generador de tensión de 30 V , la d.d.p. entre A y C será igual a la suma algebraica de las tensiones producidas por todos los elementos existentes en este camino y así se puede escribir:

$$U_{AC} = 3i_2 - 30 + 4i_2 = 7i_2 - 30 = 7 \cdot 4 - 30 = -2\text{ V}$$

que coincide con el resultado anterior. Es importante que el lector se dé cuenta de que en la última ecuación, la tensión de 30 V del generador lleva signo negativo, esto es debido a que al seguir la ruta ABC la fuente de tensión se ve como un elemento activo que provoca una *elevación de potencial de 30 V* (en el sentido ABC), o de otro modo, el generador introduce en la ruta ABC una *caída de potencial de -30 V* . Algunos autores expresan esta idea diciendo que la d.d.p. entre dos puntos es igual a:

$$U_{AC} = \sum Ri - \sum U_s$$

donde el primer término del segundo miembro expresa la suma de las caídas de potencial provocadas en los elementos pasivos existentes en el camino que une A con C y el segundo término expresa con signo menos la suma de las elevaciones de potencial que introducen los generadores existentes en la ruta que une A con C. Este último signo menos (–) procede evidentemente de la conversión de una elevación de potencial en una caída de potencial en los generadores.

b) Para calcular la potencia en la resistencia de $3\ \Omega$ es preciso determinar previamente la intensidad de la corriente que pasa por ella, en el circuito original de la Figura 1.64. Téngase en cuenta que esta resistencia de $3\ \Omega$ está en paralelo con el generador de corriente, por lo que se intenta calcular el valor de una variable interna, en la transformación generador de corriente real a generador de tensión real, y es por ello que una vez calculado el circuito de la Figura 1.65, debe volverse al original de la Figura 1.64. Teniendo en cuenta según la Figura 1.65 que $i_2 = 4\text{ A}$, que es la corriente que va por la rama BC de (B a C), al aplicar el primer lema de Kirchhoff al nudo B de la Figura 1.64 resulta:

$$10 = i_{BA} + i_{BC} = i_{BA} + 4$$

por lo que $i_{BA} = 6\text{ A}$ y por consiguiente la potencia disipada es igual a:

$$P(3\ \Omega) = Ri_{BA}^2 = 3 \cdot 6^2 = 108\text{ W}$$

debe observar el lector, que la potencia disipada en la resistencia de $3\ \Omega$ de la Figura 1.64 es igual a $3 \cdot i_2^2 = 3 \cdot 4^2 = 48\text{ W}$, que no coincide con la anterior. La equivalencia de la transformación es válida solamente para hacer cálculos exteriores al generador de corriente. *Cuando se solicitan variables internas debe volverse al circuito original.*

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.7**

Calcular la potencia disipada en la resistencia $9\ \Omega$ del circuito de la Figura 1.66 que tiene un generador de corriente dependiente de la tensión en la resistencia central de $1\ \Omega$.

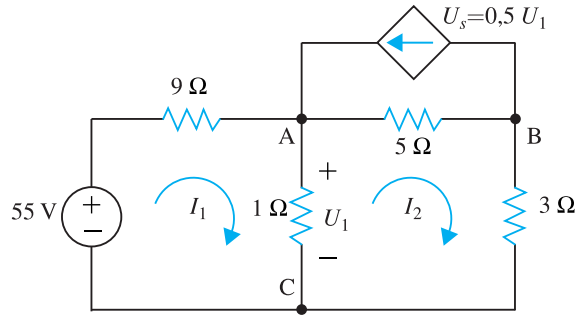


Figura 1.66 Ejemplo de aplicación 1.7

Solución

Existe una fuente de corriente dependiente, que al transformar a fuente de tensión da:

$$U_s = 5 \cdot 0,5 U_1 = 2,50 U_1 \quad ; \quad R = 5\ \Omega$$

y de este modo el circuito de la Figura 1.66 se convierte en el de la Figura 1.67.

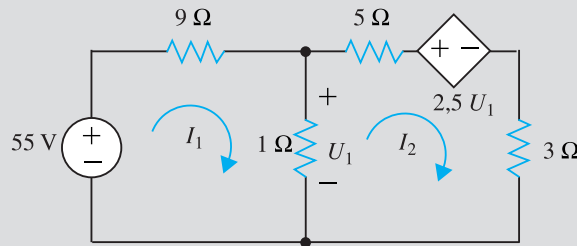


Figura 1.67 Circuito equivalente de la Figura 1.66

Las ecuaciones de malla del circuito de la Figura 1.67 son:

$$\begin{aligned} 55 &= (9 + 1)I_1 - 1 \cdot I_2 \\ -2,50 U_1 &= -1I_1 + (1 + 5 + 3)I_2 \end{aligned}$$

La relación entre la señal de control del generador U_1 y las corrientes de malla I_1 e I_2 es:

$$U_1 = 1 \cdot (I_1 - I_2)$$

Que al sustituir en las ecuaciones de malla, estas se transforman en:

$$\begin{aligned} 55 &= 10I_1 - I_2 \\ 0 &= 1,5I_1 + 6,5I_2 \end{aligned}$$

lo que da lugar a los siguientes resultados:

$$I_1 = 5,38 \text{ A} \quad ; \quad I_2 = -1,24 \text{ A}$$

por consiguiente, la potencia disipada en la resistencia de 9Ω es igual a:

$$P = RI_1^2 = 9 \cdot 5,38^2 = 260,11 \text{ W}$$

■ 1.12.2. Método de las mallas con generadores de corriente

Cuando se dispone de una red que se desea analizar por el método de las corrientes de malla y existen generadores de corriente ideales, estos no se pueden transformar en generadores de tensión, por lo que parece a primera vista que la presencia de estos generadores va a complicar el estudio del circuito, ya que sus *tensiones* no son conocidas. Vamos a examinar en este epígrafe que tales redes se estudian de modo semejante y que no suponen por ello una mayor complejidad; es más, incluso en algunos casos la presencia de generadores de corriente facilita determinados cálculos. Lo importante es asignar a los generadores de corriente presentes en la red, una tensión generadora desconocida que como sabemos viene determinada por el resto del circuito. Considérese por ejemplo el circuito de la Figura 1.68 que contiene dos generadores de corriente que no se pueden transformar en tensión.

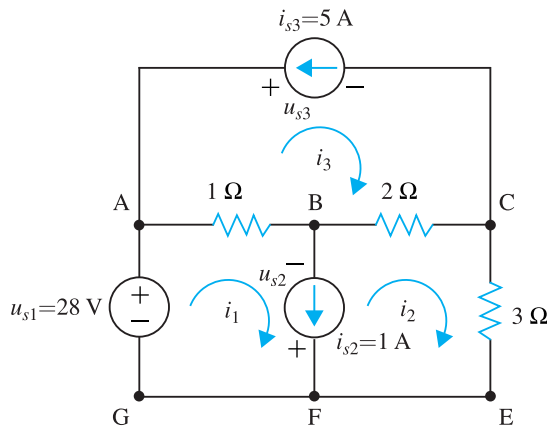


Figura 1.68 Aplicación de las corrientes de malla con generadores de corriente

Primeramente se asignan los valores u_{s2} y u_{s3} a las tensiones de ambos generadores, con las polaridades indicadas en la Figura 1.68. Se definen a continuación las corrientes de circulación de mallas: i_1 , i_2 e i_3 y se escriben las ecuaciones de malla correspondientes de acuerdo con lo explicado en el epígrafe anterior, lo que da lugar a:

$$\begin{aligned} \text{Malla 1: } 28 + u_{s2} &= 1i_1 - 1i_3 \\ \text{Malla 2: } -u_{s2} &= +(2 + 3)i_2 - 2i_3 \\ \text{Malla 3: } -u_{s3} &= -1i_1 - 2i_2 + (1 + 2)i_3 \end{aligned} \tag{1.109}$$

Se observa que disponemos de tres ecuaciones con cinco incógnitas: i_1 , i_2 , i_3 , u_{s2} , y u_{s3} . Se requieren entonces dos ecuaciones adicionales que se obtienen relacionando las intensidades de los generadores de corriente, con las corrientes de las mallas a las que afecta. Así en el circuito de la Figura 1.68 se tiene:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 5 = -i_3 \\ \text{b)} \quad & 1 = i_1 - i_2 \end{aligned} \tag{1.110}$$

se observa de las ecuaciones anteriores, que la corriente de la malla 3 ya se conoce, porque está determinada por el generador de corriente existente en esa malla, es decir: $i_3 = -5$ A. De este modo el problema se limita al cálculo de las corrientes de las mallas 1 y 2 únicamente. En principio parece que el problema se ha reducido a un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, sin embargo la realidad es aún más simple. Obsérvese que si se suman las ecuaciones de las mallas 1 y 2 de (1.109), se elimina la *variable de paso* u_{s2} , dando lugar a:

$$28 = 1i_1 + 5i_2 - 3i_3 \tag{1.111}$$

y teniendo en cuenta que $i_3 = -5$ A se convierte en:

$$13 = 1i_1 + 5i_2 \tag{1.112}$$

la ecuación anterior junto con la b) de (1.110) da lugar a dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} 13 &= 1i_1 + 5i_2 \\ 1 &= i_1 - i_2 \end{aligned} \tag{1.113}$$

cuyos resultados son:

$$i_1 = 3 \text{ A}; \quad i_2 = 2 \text{ A} \tag{1.114}$$

que junto con $i_3 = -5$ A dan los valores de las corrientes de malla, que se deseaban determinar. El lector habrá observado que las variables intermedias u_{s2} y u_{s3} que hicieron falta para escribir (1.109) no son necesarias para resolver el circuito. De hecho el problema requiere únicamente formular las ecuaciones (1.110) y (1.111):

$$\begin{aligned} 5 &= -i_3 \\ 1 &= i_1 - i_2 \\ 28 &= 1i_1 + 5i_2 - 3i_3 \end{aligned} \tag{1.115}$$

las dos primeras ecuaciones representan las corrientes fijadas por los generadores de intensidad. La tercera ecuación (1.115) que es copia de (1.111) procedía de la suma de las ecuaciones de las mallas 1 y 2 de (1.109) y representa la aplicación del segundo lema de Kirchhoff al lazo ABCEFG suma de las mallas 1 y 2. Este lazo determina en definitiva un circuito cerrado que solo contiene generadores de tensión e impedancias, evitando los generadores de corriente cuya tensión se desconoce. La mayoría de los estudiantes encuentran más simple y sistemático plantear las ecuaciones (1.109) y (1.110) y resolverlas siguiendo el proceso que aquí se ha dado que escribir directamente el sistema (1.115) formando por las condiciones impuestas por los generadores de corriente y por las ecuaciones de las mallas (y en su caso lazos) que no contengan generadores de corriente necesarias para completar tantas ecuaciones como incógnitas.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.8

Calcular la intensidad que circula por la resistencia de 20 ohmios del circuito de la Figura 1.69 aplicando el método de las mallas.

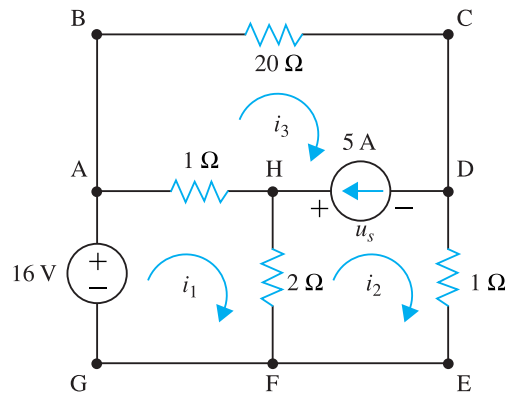


Figura 1.69 Ejemplo de aplicación 1.8

Solución

a) Procedimiento directo:

$$\begin{aligned} \text{Malla 1:} & \quad 16 = (1 + 2)i_1 - 2i_2 - 1i_3 \\ \text{Generador de corriente:} & \quad 5 = -i_2 + i_3 \\ \text{Lazo ABCDEFG:} & \quad 16 = 1i_2 + 20i_3 \text{ (más simple)} \end{aligned}$$

que da lugar a los siguientes valores:

$$i_1 = 3 \text{ A}; \quad i_2 = -4 \text{ A}; \quad i_3 = 1 \text{ A}$$

b) Procedimiento sistemático:

$$\begin{aligned} \text{Malla 1:} & \quad 16 = 3i_1 - 2i_2 - i_3 \\ \text{Malla 2:} & \quad -u_s = -2i_1 + 3i_2 \\ \text{Malla 3:} & \quad u_s = -i_1 + 21i_3 \\ \text{Generador de corriente:} & \quad 5 = -i_2 + i_3 \end{aligned}$$

Al sumar las mallas 2 y 3 se elimina la variable de paso u_s :

$$0 = -3i_1 + 3i_2 + 21i_3$$

que junto con las otras dos ecuaciones (malla 1 e imposición del generador) conducen a los mismos resultados anteriores.

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.9**

Calcular por el método de las mallas la corriente en la resistencia de $4\ \Omega$ del circuito de la Figura 1.70 y también la d.d.p. en bornes de la resistencia de $2\ \Omega$.

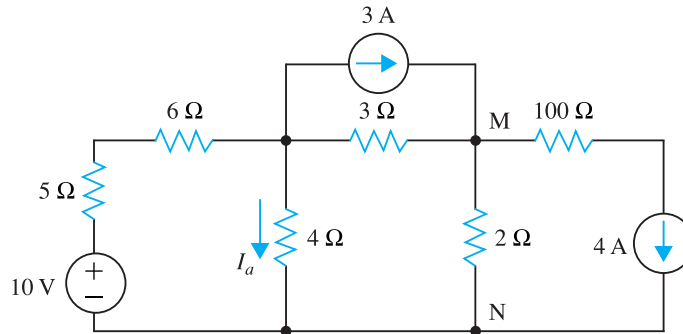


Figura 1.70 Ejemplo de aplicación 1.9

Solución

El generador de corriente de 3 A puede transformarse en un generador de tensión con los valores:

$$R = 3\ \Omega \quad u_s = 3 \cdot 3 = 9\ \text{V}$$

El generador de 4 A no puede pasarse a fuente de tensión porque no tiene resistencia en paralelo, este generador dará ya el valor de la corriente de esa malla. El circuito de la Figura 1.70 se convierte en el de la Figura 1.71.

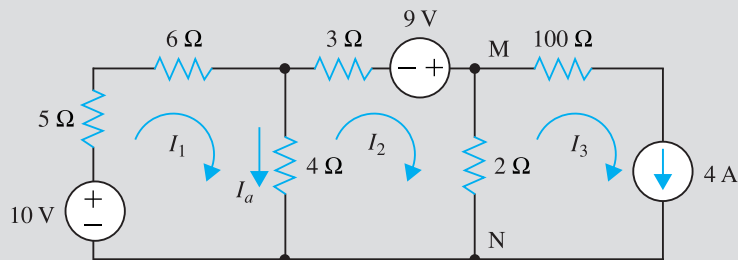


Figura 1.71 Circuito equivalente de la Figura 1.70

Aplicando mallas se obtiene:

$$\begin{aligned} 10 &= (5 + 6 + 4)I_1 - 4I_2 \\ 9 &= -4I_1 + (4 + 3 + 2)I_2 - 2I_3 \\ I_3 &= 4 \end{aligned}$$

Y al operar resultan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10 &= 15I_1 - 4I_2 \\ 17 &= -4I_1 + 9I_2 \end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$I_1 = 1,328 \text{ A} \quad ; \quad I_2 = 2,479 \text{ A}$$

La corriente en la resistencia de 4Ω es igual a:

$$I_a = I_1 - I_2 = -1,151 \text{ A}$$

es decir la corriente I_a vale 1,151 A y tiene sentido contrario al señalado en la Figura 1.70. La d.d.p. en bornes de la resistencia de 2Ω es por lo tanto

$$U_{MN} = 2(I_2 - I_3) = -3,042 \text{ V}$$

el terminal N tiene en consecuencia mayor potencial que el terminal M.



Amplíe sus conocimientos

Movilidad o desplazamiento de una fuente de corriente en serie con una rama pasiva: En el Epígrafe 1.12.2 se ha aplicado el método de las mallas a los circuitos que tienen generadores de corriente ideales en una rama, lo cual se ha logrado asignando una tensión desconocida a estos generadores y aplicando a continuación el método de las mallas, incluyendo las ecuaciones de las corrientes de rama que imponen estos generadores en el circuito. Existe otro procedimiento de resolver este tipo de redes, que consiste en desplazar los generadores de corriente ideales afectados, a las otras ramas que unen los nudos en los que inyectan corriente estos generadores, lo que permite conseguir generadores reales de corriente que se pueden transformar en generadores reales de tensión, quedando el circuito preparado para aplicar el método de las corrientes de malla en la forma clásica tal como se ha estudiado en el Epígrafe 1.12.1. Para comprender lo anterior, en la Figura 1.72a se muestra una parte de una red, en la que existe una fuente ideal de corriente i_s en serie con la rama 7, comprendida entre los nudos M y N, lo cual significa que la corriente i_7 en esta rama coincide con la corriente i_s del generador, con independencia del resto de la red, porque viene impuesta por esta fuente.

En estas condiciones, se puede suprimir (abrir) esta rama y modificar la red de tal modo que esta corriente i_s salga del nudo M y llegue hasta el nudo N, lo que se consigue colocando una fuente de corriente i_s en paralelo con las ramas que unen los nudos M y N por **uno solo** de los caminos posibles, tal como se señala en la Figura 1.72b. El lector puede comprobar que la aplicación del primer lema de Kirchhoff a los nudos M y N de ambas Figuras 1.72a y b dan lugar a las mismas ecuaciones. Ambos circuitos son por lo tanto equivalentes. Los generadores reales de corriente de la Figura 1.72b se pueden transformar en generadores reales de tensión, dejando la red preparada para aplicar el método clásico de las mallas.

Para ver cómo se desarrollan estas ideas, vamos a resolver el Ejemplo de Aplicación 1.8 utilizando la movilidad de generadores de corriente. Se observa en la Figura 1.69, que existe un generador de corriente ideal de 5 A entre los nudos D y H. En la Figura 1.73a se ha realizado la traslación de este generador, que ha dado lugar a dos generadores ideales de corriente de 5 A, que están en paralelo con las resistencias de 2 ohmios y 5 ohmios, respectivamente (es importante comprobar que el sentido de las corrientes de estos generadores, se dirige desde el nudo D hasta el nudo H). Al transformar estos generadores reales de corriente en generadores reales de tensión, se obtiene el circuito de la Figura 1.72b, que al aplicar el método de las mallas da lugar a las siguientes ecuaciones:

$$16 - 10 = (1 + 2)i_a - (1 + 2)i_b$$

$$10 + 5 = -(1 + 2)i_a + (1 + 2 + 1 + 20)i_b$$

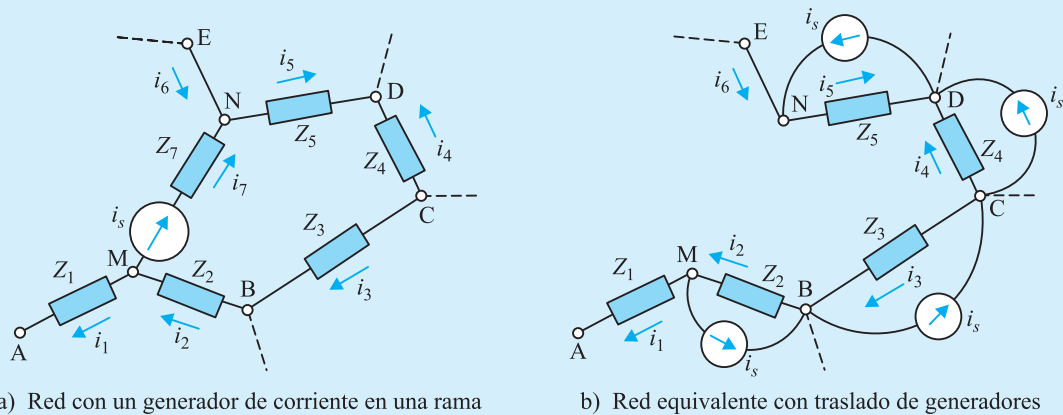


Figura 1.72 Traslación de generadores de corriente ideales

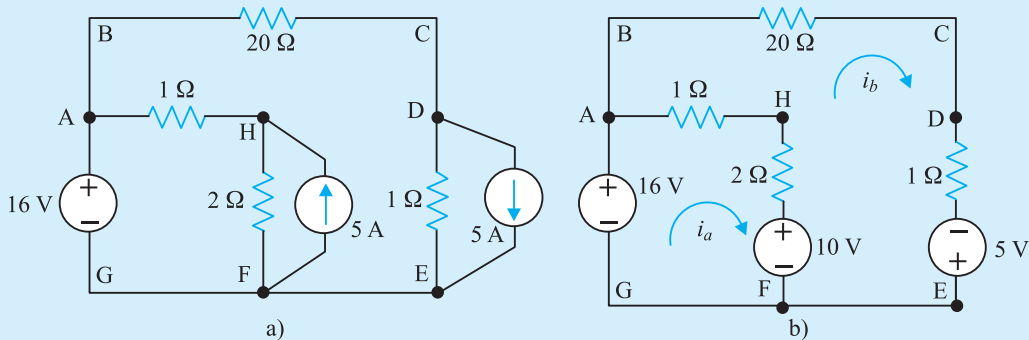


Figura 1.73 Ejemplo de aplicación 1.8 utilizando traslación de generadores de corriente

que simplificando se convierten en:

$$6 = 3i_a - 3i_b$$

$$15 = -3i_a + 24i_b$$

cuyos resultados son: $i_a = 3$ A; $i_b = 1$ A. Es decir, la corriente en la resistencia de 20 ohmios (que es la pregunta del problema) es de 1 amperio y va de B a C, que coincide con el resultado obtenido en el ejemplo de aplicación 1.8.

1.13. Análisis de circuitos por el método de los nudos

1.13.1. Formulación general

El método de los nudos (o de las tensiones de nudo) es un procedimiento de análisis que se utiliza en teoría de circuitos para calcular su respuesta. Consiste en aplicar explícitamente el primer lema de Kirchhoff a los nudos independientes del circuito (todos menos uno), de tal forma que el segundo lema de Kirchhoff resulta aplicado de un modo implícito. Antes

de comenzar a resolver un circuito por el método de los nudos, se debe intentar, siempre que sea posible, sustituir los generadores reales de tensión por generadores reales de corriente equivalentes, con las técnicas analizadas en el Epígrafe 1.9. Esto siempre será realizable en el caso de que los generadores de tensión presentes en la red sean *reales* (es decir tengan una impedancia en serie) pero no en el caso de que los generadores de tensión sean ideales. Esta situación se analizará en el Epígrafe 1.13.2.

Suponemos, por consiguiente, que en la red que se va a estudiar se han podido sustituir todos los generadores de tensión por corriente. Hemos de recordar que el número de nudos independientes de una red de n nudos es igual a $n - 1$, lo que indica que si se toma un nudo como potencial de referencia se podrán calcular las tensiones de los otros nudos respecto de aquel, aplicando el primer lema de Kirchhoff a los $n - 1$ nudos restantes, dando lugar a un conjunto de ecuaciones linealmente independientes. La elección del nudo de referencia es totalmente libre, pero lo más práctico es elegir aquel nudo que tenga más ramas conectadas a él. Muchos circuitos eléctricos reales están contruidos sobre una base metálica o chasis al que se conectan algunos elementos del circuito, por lo que es cómodo tomar el chasis como nudo de referencia, que en este caso se denomina *masa*. En otros casos, que se encuentran en la ingeniería eléctrica de potencia, el chasis es la misma tierra y por esta razón el nudo de referencia se conoce frecuentemente con el nombre de *tierra* que se simboliza con un rayado especial (ver nudo 3 de la Figura 1.74). El nudo de referencia tiene por consiguiente el potencial de tierra o potencial cero y las tensiones de los otros nudos se referirán respecto de la tensión de tierra (0 V) lo que permite obtener potenciales absolutos y no diferencia de potenciales.

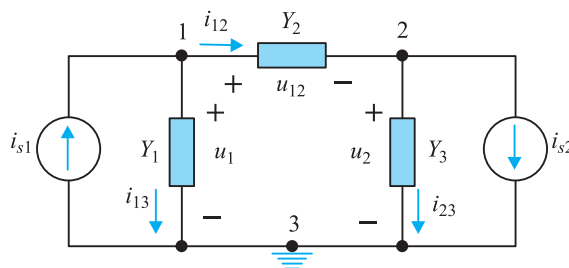


Figura 1.74 Aplicación del método de los nudos

Para ver cómo se aplica el método de los nudos, vamos a considerar el circuito de la Figura 1.74, formado por tres nudos, donde solo existen generadores de corriente. El nudo 3 se ha tomado como referencia o nudo dato que se conecta a tierra: 0 voltios, (se observa que el nudo 3 es toda la rama inferior de la Figura 1.74). Las tensiones de los otros nudos, respecto al nudo de referencia, se han denominado en la Figura 1.74 simplemente como u_1 y u_2 . Si se denominan a los potenciales de los nudos: v_1 , v_2 , y $v_3 = 0$ respectivamente, se cumple

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 - v_3 = v_1 - 0 = v_1 \\ u_2 &= v_2 - v_3 = v_2 - 0 = v_2 \end{aligned} \quad (1.116)$$

Es decir, al tomar el nudo 3 como referencia, las tensiones en los nudos coinciden con sus potenciales. En el caso de referirnos a una d.d.p. entre dos nudos, donde ninguno sea el

de referencia, como es el caso de la tensión u_{12} de la Figura 1.74, esta tensión es la diferencia entre las tensiones (o potenciales) del nudo 1 y del nudo 2, es decir:

$$u_{12} = u_1 - u_2 \quad (1.117)$$

Otro aspecto a considerar en la red de la Figura 1.74 es que los elementos pasivos están expresados en forma de admitancias (que se miden en *siemens*) en vez de impedancias. Esto se ha hecho a propósito a fin de ver claramente la dualidad existente entre el método de los nudos y el método de las mallas, como más tarde se comprobará. Debe recordarse según (1.43) que la relación existente entre la corriente i que circula por una admitancia Y y su tensión u es igual a:

$$i = Yu \quad (1.118)$$

expresión que se utilizará después en el análisis. Una vez tomado el nudo de referencia, y señaladas las tensiones de los demás nudos, se debe aplicar el primer lema de Kirchhoff a los nudos 1 y 2 resultando:

$$\begin{aligned} \text{Nudo 1: } i_{s1} - i_{12} - i_{13} &= 0 \\ \text{Nudo 2: } i_{12} - i_{23} - i_{s2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.119)$$

y teniendo en cuenta (1.118) se puede poner:

$$\begin{aligned} i_{12} &= Y_2(u_1 - u_2) \\ i_{13} &= Y_1 u_1 \\ i_{23} &= Y_3 u_2 \end{aligned} \quad (1.120)$$

valores que llevados a (1.119) y colocando las corrientes de los generadores en el primer miembro y las corrientes de las admitancias en el segundo, nos da:

$$\begin{aligned} \text{Nudo 1: } i_{s1} &= Y_2(u_1 - u_2) + Y_1 u_1 \\ \text{Nudo 2: } -i_{s2} &= -Y_2(u_1 - u_2) + Y_3 u_2 \end{aligned} \quad (1.121)$$

que reduciendo a términos semejantes nos da:

$$\begin{aligned} \text{Nudo 1: } i_{s1} &= (Y_1 + Y_2)u_1 - Y_2 u_2 \\ \text{Nudo 2: } -i_{s2} &= -Y_2 u_1 + (Y_2 + Y_3)u_2 \end{aligned} \quad (1.122)$$

las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma más compacta del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \sum (i_s)_1 &= Y_{11}u_1 + Y_{12}u_2 \\ \sum (i_s)_2 &= Y_{21}u_1 + Y_{22}u_2 \end{aligned} \quad (1.123)$$

que admite la forma matricial:

$$[i_s] = \begin{bmatrix} \sum (i_s)_1 \\ \sum (i_s)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [Y][u] \quad (1.124)$$

donde $\sum(i_s)_1$ y $\sum(i_s)_2$ representan la suma de las corrientes de los generadores de intensidad que *llegan* a los nudos 1 y 2 respectivamente. Obsérvese en las ecuaciones (1.122) y Figura 1.74 que en el nudo 1, *entra* la corriente del generador 1 y por ello i_{s1} aparece como corriente positiva. En el nudo 2, se tiene una rama con un generador de corriente i_{s2} , cuya intensidad *sale* del nudo y por ello esta corriente aparece con signo negativo en el sistema (1.122). Si se comparan las ecuaciones (1.123) o (1.124) con (1.122) se observan las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_1 + Y_2 \\ Y_{12} &= Y_{21} = -Y_2 \\ Y_{22} &= Y_2 + Y_3 \end{aligned} \quad (1.125)$$

Las admitancias Y_{11} , Y_{22} , ..., Y_{ii} se conocen con el nombre de **autoadmitancias de nudo** y representan la suma de las admitancias que llegan a los nudos 1, 2, ..., i . Las admitancias $Y_{12} = Y_{21}$, ..., $Y_{ij} = Y_{ji}$ se conocen con el nombre de **admitancias mutuas** entre los nudos del primero y segundo subíndices y representan con *signo menos* (ver relación 1.125) la admitancia total común a ambos nudos. La matriz de admitancias indicada en (1.124) es en consecuencia una matriz simétrica, con todos los términos de la diagonal principal positivos e igual a las autoadmitancias de cada nudo. Los demás términos son negativos y representan las admitancias mutuas entre nudos. Estas propiedades, de forma análoga a la estudiada en el análisis por mallas, permiten escribir directamente las ecuaciones (1.122) con arreglo a lo indicado en los párrafos anteriores.

En el caso de existir en el circuito generadores dependientes, es preciso incluir ecuaciones adicionales a las anteriores, que relacionan la tensión o la corriente de la fuente controlada, con las tensiones de los nudos; en este caso el conjunto dará lugar a una matriz de admitancias que ya no tendrá la propiedad de ser simétrica. El lector comprobará la analogía entre la expresión (1.107) obtenida en el método de las mallas y la (1.124) obtenida en el método de los nudos. Esta analogía se denomina en teoría de circuitos: *dualidad*, y permite escribir (1.124) conociendo (1.107) o a la inversa, utilizando las siguientes dualidades:

Malla	$\leftrightarrow$	Nudo
Generador de tensión	$\leftrightarrow$	Generador de corriente
Impedancia	$\leftrightarrow$	Admitancia
Tensión	$\leftrightarrow$	Corriente
Corriente malla	$\leftrightarrow$	Tensión nudo

(1.126)

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.10

Resolver el Ejemplo de Aplicación 1.6 por el método de los nudos.

Solución

En la Figura 1.75a se ha representado nuevamente el circuito de la Figura 1.64. El generador de tensión de 7 V está en serie con dos resistencias de 2 Ω y 1 Ω , que representan una resistencia total de 3 Ω . Al transformar este generador de tensión real en corriente, resulta:

$$i_{s1} = \frac{7}{3} \quad ; \quad Z = 3 \Omega$$

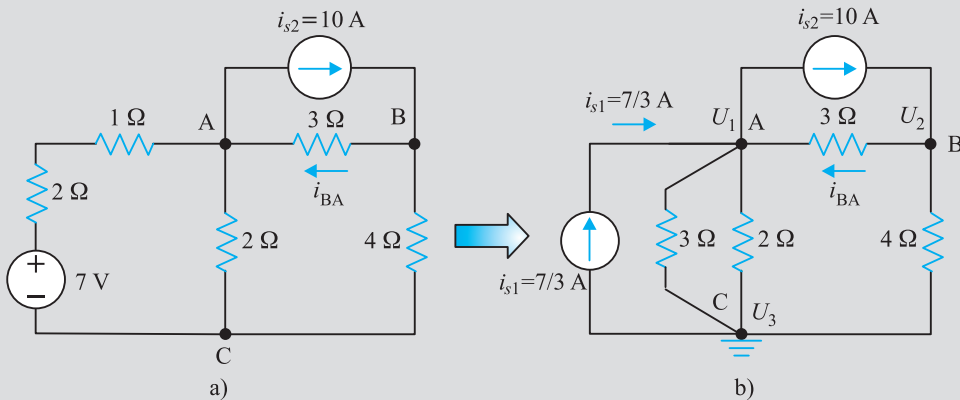


Figura 1.75 Ejemplo de aplicación 1.10

en la Figura 1.75b se muestra el circuito transformado. Se ha tomado el nudo C como referencia y a los nudos A y B se les han asignado las tensiones U_1 y U_2 . Aplicando el método de los nudos resulta:

$$\text{Nudo 1 (A): } \frac{7}{3} - 10 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)U_1 - \frac{1}{3}U_2 \quad (\text{a})$$

$$\text{Nudo 2 (B): } 10 = -\frac{1}{3}U_1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)U_2$$

cuyos resultados son:

$$U_1 = -2 \text{ V} \quad ; \quad U_2 = 16 \text{ V}$$

1) De acuerdo con los resultados anteriores, la d.d.p. entre los nudos A y C es igual a:

$$U_{AC} = U_1 - U_3 = U_1 = -2 \text{ V}$$

2) Por la resistencia de 3 Ω en paralelo con el generador de corriente de la Figura 1.75a, circula una intensidad:

$$i_{BA} = Y(U_2 - U_1) = \frac{1}{3} [16 - (-2)] = \frac{18}{3} = 6 \text{ A}$$

y por consiguiente, la potencia disipada en esta resistencia es:

$$P(3 \Omega) = Ri_c^2 = 3 \cdot 6^2 = 108 \text{ W}$$

valores que coinciden con los calculados en el Ejemplo de Aplicación 1.6 por el método de las mallas.

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.11

Calcular la potencia disipada en la resistencia de 5 Ω del circuito de la Figura 1.76 que tiene un generador de corriente dependiente, por el método de los nudos.

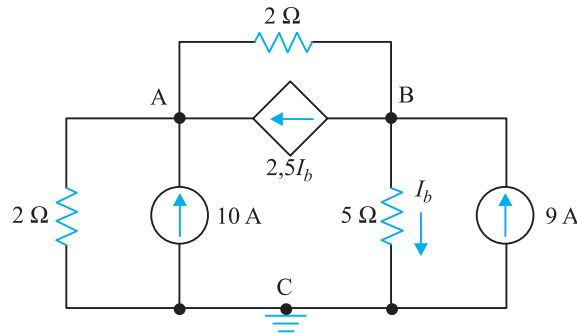


Figura 1.76 Ejemplo de aplicación 1.11

Solución

Tomando el nudo C, como nudo de referencia y llamando U_A y U_B a los potenciales de los nudos A y B, se tiene:

$$\text{Nudo A: } 10 + 2,5I_b = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] U_A - \frac{1}{2} U_B$$

$$\text{Nudo B: } 9 - 2,5I_b = -\frac{1}{2} U_A + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right] U_B$$

la corriente I_b (variable de control del generador dependiente) vale:

$$I_b = \frac{1}{5} U_B$$

por lo que las ecuaciones anteriores, se convierten en:

$$10 = U_A - U_B$$

$$9 = -0,5U_A + 1,2U_B$$

de donde se deduce $U_B = 20$ V y por lo tanto la corriente en la resistencia de 5Ω es igual a:

$$I_b = \frac{20}{5} = 4 \text{ A}$$

y de este modo la potencia disipada vale:

$$P = 5 \cdot 4^2 = 80 \text{ W}$$

■ 1.13.2. Método de los nudos con generadores de tensión

Cuando se dispone de una red que se desea analizar por el método de las tensiones de nudo y existen generadores de tensión ideales, estos no se pueden transformar en generadores de corriente, por lo que parece a primera vista que la presencia de estos generadores va a complicar el estudio del circuito, ya que sus *corrientes* no son conocidas, pues dependen del circuito exterior. Vamos a examinar en este epígrafe que tales redes se estudian de un mo-

do semejante al expuesto en el Epígrafe 1.13.1 y que no suponen por ello una mayor complejidad; es más, incluso el problema suele ser más simple, ya que el generador de tensión, fija directamente la tensión entre los nudos a los cuales está conectado. El análisis de este tipo de circuitos sigue el desarrollo convencional, tratando a los generadores de tensión como generadores de corriente, cuyas intensidades son desconocidas. De un modo análogo al expuesto en el Epígrafe 1.12.2, estas intensidades son variables de paso que pueden eliminarse sumando dos a dos las ecuaciones. A las ecuaciones resultantes deben añadirse entonces las tensiones entre nudos, que fijan las fuentes de tensión; la solución se obtendrá resolviendo el sistema de ecuaciones resultantes.

Considérese por ejemplo el circuito de la Figura 1.77, en el que se tienen dos generadores de tensión que no pueden transformarse en generadores de corriente. Asignamos a estos generadores dos corrientes desconocidas i_{s1} e i_{s2} en el sentido considerado.

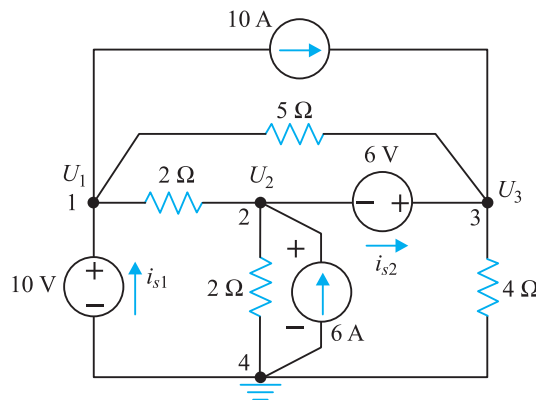


Figura 1.77 Aplicación del método de los nudos con generadores de tensión

Si se toma el nudo 4 como referencia, al aplicar el método de los nudos resulta:

- a) Nudo 1: $i_{s1} - 10 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)U_1 - \frac{1}{2}U_2 - \frac{1}{5}U_3$
- b) Nudo 2: $6 - i_{s2} = -\frac{1}{2}U_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)U_2$ (1.127)
- c) Nudo 3: $10 + i_{s2} = -\frac{1}{5}U_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)U_3$

las ecuaciones que imponen los generadores son:

- d) $U_1 = 10 \text{ V}$ (1.128)
- e) $U_3 - U_2 = 6 \text{ V}$

la ecuación d) nos da ya el valor de la tensión del nudo 1 (respecto a tierra), por lo que no hace falta utilizar la ecuación a) correspondiente a este nudo. Al sumar las ecuaciones b) y c) se elimina la variable de paso i_{s2} resultando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\text{Nudo 2 + Nudo 3: } 16 = -\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{5}\right)U_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)U_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)U_3$$

Condiciones:

$$U_1 = 10 \quad ; \quad U_3 - U_2 = 6 \quad (1.129)$$

de donde se obtiene:

$$U_1 = 10 \text{ V} \quad ; \quad U_2 = 14 \text{ V} \quad ; \quad U_3 = 20 \text{ V}$$

que es la solución del problema. Conocidas estas tensiones de los nudos se podrán calcular fácilmente las corrientes en las diversas ramas de la red. Aunque las ecuaciones (1.129) se pueden escribir directamente, el procedimiento sistemático que se acaba de exponer evita muchos errores.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.12

Calcular la potencia disipada en la resistencia de 6Ω del circuito de la Figura 1.78 por el método de los nudos.

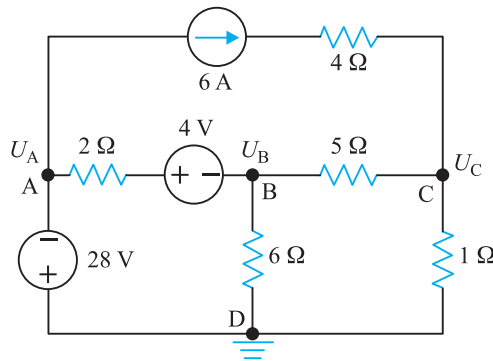


Figura 1.78 Ejemplo de aplicación 1.12

Solución

Primeramente, se deben transformar los generadores de tensión en corriente. El generador de tensión de 4 V se convierte en:

$$i_2 = \frac{4}{2} = 2 \text{ A} \quad ; \quad R = 2 \Omega$$

el generador de 28 V es ideal (no tiene impedancia en serie) por lo que no se puede transformar. El circuito equivalente resultante es el mostrado en la Figura 1.79. Existen cuatro nudos: A, B, C y D. Tomamos el nudo D como referencia. Los potenciales de los nudos A, B y C respecto al nudo de referencia, se denominan U_A , U_B y U_C respectivamente. El nudo A tiene un potencial claramente especificado por el generador de tensión de la izquierda es decir $U_A = -28 \text{ V}$ (obsérvese la polaridad), solo hará falta aplicar el método de los nudos a B y C, resultando:

$$\text{Nudo A: } U_A = -28 \text{ V}$$

$$\text{Nudo B: } -2 = -\frac{1}{2} U_A + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) U_B - \frac{1}{5} U_C$$

$$\text{Nudo C: } 6 = -\frac{1}{5} U_B + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{1}\right) U_C$$

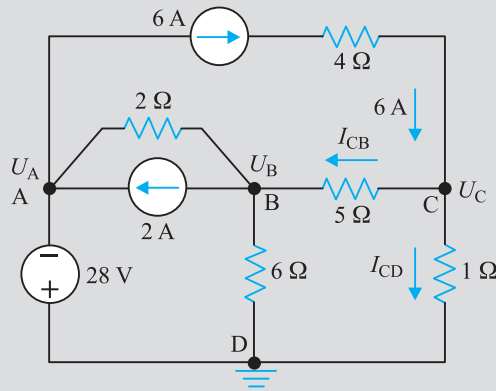


Figura 1.79 Circuito equivalente de la Figura 1.78

de donde resulta:

$$U_A = -28 \text{ V} \quad ; \quad U_B = -18 \text{ V} \quad ; \quad U_C = 2 \text{ V}$$

en consecuencia, la corriente que circula por la resistencia de 6Ω irá del nudo D al nudo B y tiene un valor:

$$I_{DB} = \frac{18}{6} = 3 \text{ A}$$

y la potencia disipada es:

$$P = RI^2 = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ W}$$

El lector observará que el problema se ha resuelto sin necesidad de incluir en las ecuaciones la resistencia de 4Ω en serie con el generador de corriente de 6 A . Esta resistencia en serie con el generador de corriente suele ser motivo de confusión para los estudiantes ya que suelen incluirla como una admitancia que introducen en el nudo C de esta manera:

$$\text{Nudo C: } 6 = -\frac{1}{5} U_B + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}\right) U_C$$

la ecuación anterior es **errónea**, y constituye una mala aplicación del método de los nudos. Obsérvese que en el nudo C de la Figura 1.79, la aplicación del primer lema de Kirchhoff nos da:

$$6 = I_{CB} + I_{CD}$$

donde las corrientes valen:

$$I_{CB} = \frac{U_C - U_B}{5} \quad ; \quad I_{CD} = \frac{U_C - U_D}{1} = \frac{U_C}{1}$$

de este modo se cumple en el nudo C:

$$6 = \frac{U_C - U_B}{5} + \frac{U_C}{1} \Rightarrow 6 = -\frac{1}{5} U_B + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{5}\right) U_C$$

que es la ecuación correcta. Téngase en cuenta que la corriente que llega al nudo C procedente del generador de corriente será siempre 6 A independiente de la resistencia que lleve en serie. Como ya se indicó en el apartado e) del Epígrafe 1.10 esta resistencia en serie con un generador de corriente se podría haber eliminado y los valores de las tensiones de nudo no se hubieran modificado. El efecto de esta resistencia será cambiar la tensión en bornes del generador de corriente que está en serie y que se modificará en función del valor de aquella.



Amplíe sus conocimientos

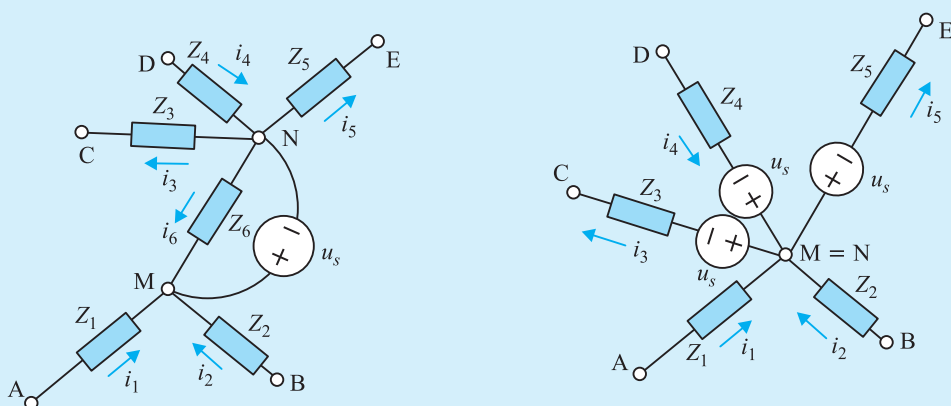
Movilidad o desplazamiento de una fuente de tensión en paralelo con una rama pasiva: en el Epígrafe 1.13.2 se ha aplicado el método de los nudos en los circuitos en los que existen generadores de tensión ideales entre dos nudos, lo cual se ha realizado asignando una corriente desconocida a estos generadores y aplicando a continuación el método de los nudos, incluyendo las ecuaciones de las d.d.p. entre nudos que imponen estos generadores en el circuito. Existe otro procedimiento de resolución de este tipo de circuitos que consiste en desplazar los generadores de tensión ideales afectados, a las ramas que tocan uno de los nudos a los que llegan estos generadores, lo que permite conseguir generadores reales de tensión que se pueden transformar en generadores de corriente, quedando el circuito preparado para aplicar el método de las tensiones de nudo en la forma clásica, tal como se ha estudiado en el Epígrafe 1.13.1. Para comprender lo anterior, en la Figura 1.80a se muestra una parte de una red en la que existe una fuente ideal de tensión u_s en paralelo con la impedancia Z_6 (rama 6), comprendida entre los nudos M y N, lo cual significa que la d.d.p. entre los nudos M y N es u_s , con independencia del resto de la red porque viene impuesta por el generador ideal de tensión.

En estas condiciones, se puede suprimir (cortocircuitar) esta rama y modificar el circuito, de tal modo que la tensión u_s se aplique al nudo $M \equiv N$ de la red, lo que se consigue trasladando este valor de la tensión a las ramas que lleguen a él, tal como se señala en la Figura 1.80b. En el circuito de la Figura 1.80a la d.d.p. que se tiene, por ejemplo, entre los nudos A y C es:

$$u_{AC} = u_{AM} + u_{MN} + u_{NC} = u_{AM} + u_s + u_{NC}$$

esta relación se sigue cumpliendo en el circuito transformado de la Figura 1.80b, que es equivalente al circuito de la Figura 1.80a. El paso de un circuito al otro se consigue desplazando la fuente u_s , **¡Téngase en cuenta la polaridad!** a todas las ramas que llegan al terminal N del generador u_s , es decir a las ramas NC, ND y NE. Se obtiene el mismo resultado si se coloca un generador u_s en las ramas AM y BM pero debe destacarse que solamente debe incluirse el generador u_s en serie con todas las ramas que llegan a un **solo nudo** conectado por este generador en la red primitiva. Nótese que la rama en la que estaba colocado u_s debe cortocircuitarse en la transformación. Los generadores reales de tensión de la Figura 1.80b, al ser reales, pueden transformarse en generadores de corriente reales, dejando la red preparada para aplicar el método clásico de los nudos.

Para ver cómo se aplican estas ideas, vamos a resolver el Ejemplo de Aplicación 1.12 utilizando la movilidad de generadores. Se observa en la Figura 1.78 que existe un generador de tensión ideal de 28 V entre los nudos A y D. En la Figura 1.81a, la traslación de este generador ha dado lugar a los dos generadores de tensión de 28 V en serie con las ramas AC y AB que llegan al nudo A, tal como se muestra en la Figura 1.81a. En la rama AB quedan de este modo dos generadores de tensión en serie de 28 V y 4 V que



a) Red con un generador de tensión entre dos nudos. b) Red equivalente con traslado de generadores.

Figura 1.80 Traslación de generadores ideales de tensión

pueden sustituirse por un generador equivalente de tensión de 32 V, que al estar en serie con la resistencia de 2 ohmios, se transforma en un generador de corriente de valor $i_s = 32/2 = 16$ A tal como se muestra en la Figura 1.81b. Al aplicar el método de los nudos a este circuito, tomando el nudo inferior $A \equiv D$ como referencia de tensiones, da lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\text{Nudo B: } -16 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)U_B - \frac{1}{5}U_C$$

$$\text{Nudo C: } 6 = -\frac{1}{5}U_B + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{5}\right)U_C$$

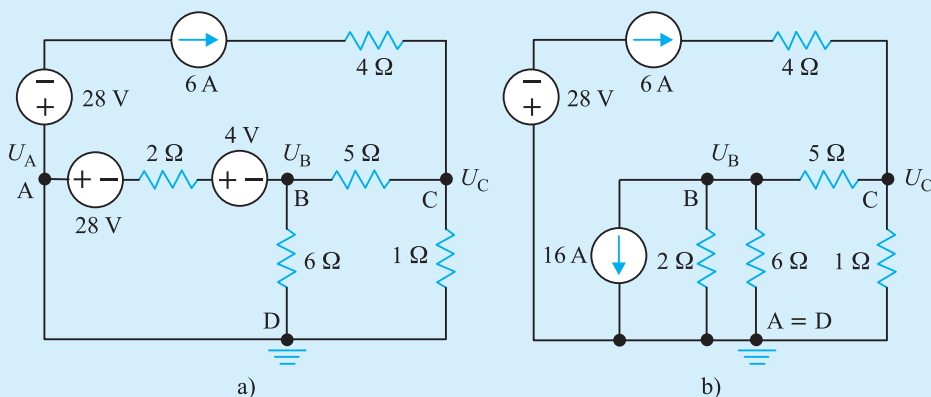


Figura 1.81 Ejemplo de aplicación 1.12 utilizando la traslación de generadores de tensión

que simplificando se convierten en:

$$-16 = \frac{13}{15}U_B - \frac{1}{5}U_C$$

$$6 = -\frac{1}{5}U_B + \frac{6}{5}U_C$$

cuyos resultados son: $U_B = -18 \text{ V}$; $U_C = 2 \text{ V}$. Por consiguiente, la corriente que circula por la resistencia de 6 ohmios de la Figura 1.81, va del nudo inferior al superior y vale $(U_D - U_B)/6 = 18/3 = 6 \text{ A}$, por lo que la potencia disipada en esta resistencia (que es la pregunta del problema) es $P = RI^2 = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ W}$, que coincide con el resultado obtenido en el Ejemplo de Aplicación 1.12.

1.14. Principio de superposición

Este principio que se aplica a redes lineales tiene por objeto calcular la respuesta en un elemento de un circuito, cuando existen varias fuentes y dice lo siguiente:

La respuesta de un circuito lineal, a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente, es igual a la suma de las respuestas que se obtendrían cuando actuase cada una de ellas por separado.

La prueba de este teorema puede establecerse directamente por un análisis por mallas (o también nudos) de un circuito y para verlo más claramente se va a considerar la red de la Figura 1.82. Las ecuaciones de las mallas son:

$$\begin{aligned} u_{s1} &= (Z_1 + Z_3)i_1 - Z_3i_2 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2 \\ u_{s2} &= -Z_3i_1 + (Z_2 + Z_3)i_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2 \end{aligned} \quad (1.130)$$

de donde se deduce que, por ejemplo, la corriente i_1 vale:

$$i_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} v_{s1} + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} v_{s2} \quad (1.131)$$

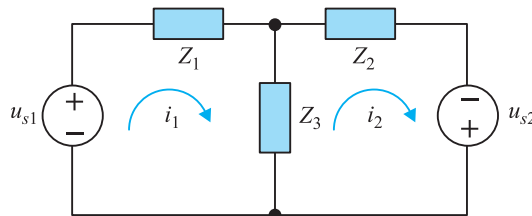


Figura 1.82 Aplicación del principio de superposición

donde Δ_{11} y Δ_{21} indican los menores adjuntos de la matriz de impedancias y Δ el determinante de la misma, todos ellos son funciones de las impedancias de la red. En general para una red de n mallas, la corriente en una malla genérica j tiene la forma siguiente:

$$i_j = \frac{\Delta_{j1}}{\Delta} v_{s1} + \frac{\Delta_{j2}}{\Delta} v_{s2} + \dots + \frac{\Delta_{jn}}{\Delta} v_{sn} \quad (1.132)$$

en consecuencia i_j puede considerarse, como la suma lineal de n componentes de corriente, de la forma:

$$i_j = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} u_{sk} \quad (1.133)$$

que son debidas a cada generador de tensión de malla u_{sk} actuando independientemente de las otras fuentes. Debe hacerse notar que para que deje de actuar un *generador de tensión*, debe anularse su tensión ($u_s = 0$), es decir *se debe cortocircuitar*; mientras que para anular un *generador de corriente* ($i_s = 0$) *se debe dejar abierto*.

Otro aspecto a tener en cuenta también es que, al aplicar superposición, la potencia disipada en una resistencia no puede calcularse sumando las potencias debidas a los componentes individuales de corriente, sino que debe calcularse previamente la corriente total y proceder después al cálculo de P . Por ejemplo si i' e i'' son las componentes individuales, la corriente total es $i = i' + i''$ (suma algebraica) y la potencia disipada vale:

$$P = R(i' + i'')^2 \quad (1.134)$$

y es un error poner la expresión de la potencia así:

$$P' = R(i')^2 + R(i'')^2 \quad (1.135)$$

la justificación de la anterior es simple, ya que la potencia es una función cuadrática y no una función lineal. En general, la resolución de un circuito eléctrico por el principio de superposición es un procedimiento pesimista, ya que es bastante lento comparado con el análisis de mallas o nudos. *Sin embargo cuando se tiene una red excitada con generadores de diferentes frecuencias, constituye el único procedimiento válido para determinar la respuesta del circuito.*



EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.13

Calcular la corriente i que circula por la resistencia de $30\ \Omega$ del circuito de la Figura 1.83 aplicando el teorema de superposición.

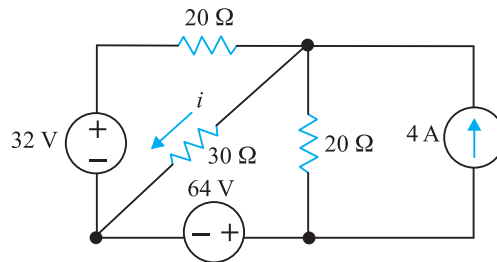


Figura 1.83 Ejemplo de aplicación 1.13

Solución

El circuito de la Figura 1.83 es equivalente a la suma de los circuitos a , b y c de la Figura 1.84; en cada uno de estos circuitos solo aparece un generador, habiendo sustituido las otras fuentes por sus «impedancias internas» (es decir cortocircuito para el generador de tensión y circuito abierto para el generador de corriente). Vamos a resolver cada uno de estos circuitos de la Figura 1.84.

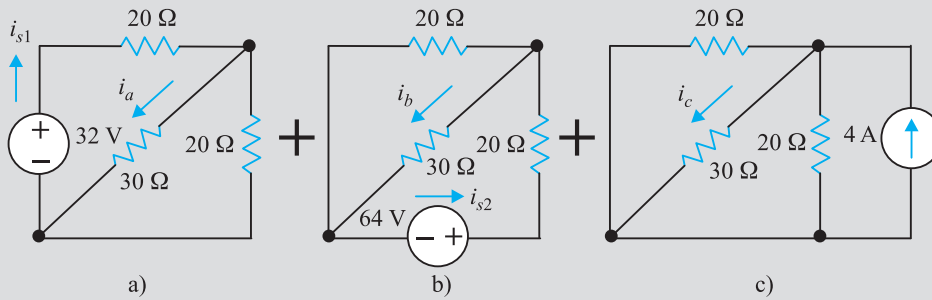


Figura 1.84 Circuitos equivalentes para aplicar el teorema de superposición

Circuito a): Las resistencias de $20\ \Omega$ y $30\ \Omega$ están en paralelo resultando un valor equivalente:

$$R = \frac{30 \cdot 20}{30 + 20} = 12\ \Omega$$

luego la corriente que suministra el generador de 32 V es:

$$i_{s1} = \frac{32}{20 + 12} = 1\ \text{A}$$

Teniendo en cuenta la regla del divisor de corriente (1.82), la intensidad i_a es igual a:

$$i_i = i_T \frac{Y_i}{Y_T} \Rightarrow i_a = 1 \cdot \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{20}} = 1 \cdot \frac{20}{20 + 30} = \frac{2}{5}\ \text{A}$$

Circuito b): De forma análoga al caso anterior, las resistencias de $20\ \Omega$ y de $30\ \Omega$ están en paralelo, dando lugar a una resistencia equivalente de $12\ \Omega$, por lo que la corriente que suministra el generador de 64 V es:

$$i_{s2} = \frac{64}{20 + 12} = 2\ \text{A}$$

La corriente i_b del circuito es por lo tanto:

$$i_b = 2 \cdot \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{20}} = 2 \cdot \frac{20}{20 + 30} = \frac{4}{5}\ \text{A}$$

Circuito c): Las tres resistencias están en paralelo y la corriente total vale 4 A que suministra el generador de corriente. De acuerdo con la regla general del divisor de corriente (1.82) se tiene:

$$i_i = i_T \frac{Y_i}{Y_T} \Rightarrow i_c = 4 \cdot \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1\ \text{A}$$

En consecuencia, la corriente total i del circuito de la Figura 1.83 es igual a:

$$i = i_a + i_b + i_c = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + 1 = 2,2\ \text{A}$$


EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.14: Superposición con fuentes dependientes

Calcular la potencia eléctrica disipada en la resistencia de $3\ \Omega$ del circuito de la Figura 1.85 aplicando el principio de superposición.

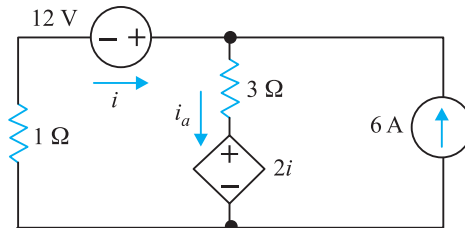


Figura 1.85 Ejemplo de aplicación 1.14

Solución

Quando se tienen redes con fuentes dependientes, **estas deben mantenerse intactas**, debiendo figurar en cada uno de los circuitos en los que se desdobra la red. La razón de ello es que las fuentes dependientes, por su propia naturaleza, dependen de la tensión o corriente de alguna parte del circuito. Por consiguiente, la resolución del circuito de la Figura 1.85 por superposición requiere calcular los dos circuitos de la Figura 1.86. En ambos circuitos siempre se incluye la fuente dependiente y únicamente un generador independiente. Para el circuito de la Figura 1.86a se tiene la siguiente ecuación de malla:

$$12 - 2i_1 = (3 + 1)i_1 \Rightarrow i_1 = 2\text{ A}$$

Para el circuito de la Figura 1.86b, la ecuación de la malla de la izquierda es:

$$-2i_2 = 1i_2 + 3(i_2 + 6) \Rightarrow i_2 = -3\text{ A}$$

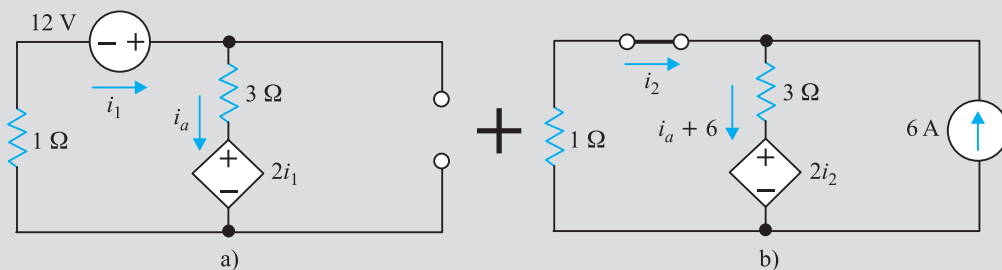


Figura 1.86 Circuitos equivalentes de la Figura 1.85

En consecuencia, la corriente que circula por la resistencia de $3\ \Omega$ de la Figura 1.85 de acuerdo con la Figura 1.86 vale:

$$i_a = i_1 + (i_2 + 6) = 2 + (-3 + 6) = 5\text{ A}$$

y por consiguiente la potencia disipada en esta resistencia es:

$$P = 3i^2 = 3 \cdot 5^2 = 75\text{ W}$$

1.15. Teoremas de Thévenin y Norton

Cuando el interés en el estudio de una red se fija en una parte de la misma, por ejemplo en una rama, es interesante poder separar esta rama del resto de la red para no tener que resolver el circuito completo cada vez que se modifican los parámetros de aquella. Los teoremas de Thévenin y Norton constituyen dos procedimientos para sustituir el resto de la red y hacer más simple el cálculo de tensiones y corrientes, en la rama que se desea estudiar de un modo específico.

Considérese por ejemplo la red de la Figura 1.87a, en la que se desea calcular únicamente la corriente i_R que pasa por la resistencia R , para diversos valores de la misma. Transformando el generador de corriente real a tensión se obtiene una red con dos mallas (Figura 1.87b) que se puede resolver por el método de las corrientes de malla, dando lugar a las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} 10 &= 8i_1 - 4i_R \\ -16 &= -4i_1 + (6 + R)i_R \end{aligned} \quad (1.136)$$

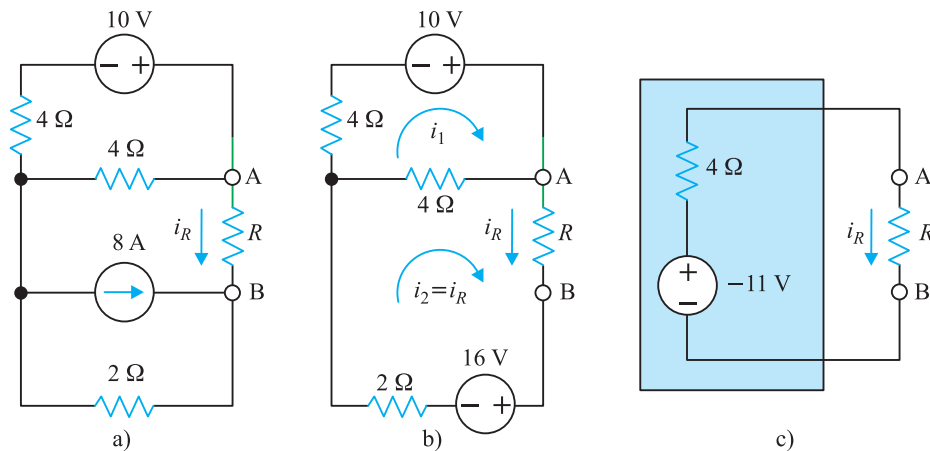


Figura 1.87 Deducción del Teorema de Thévenin

Y calculando el valor de i_R aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$i_R = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 10 \\ -4 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 + R \end{vmatrix}} = \frac{-88}{32 + 8R} = \frac{-11}{4 + R} \quad (1.137)$$

la ecuación anterior nos da una expresión simple para calcular el valor de la corriente que atraviesa la resistencia R para cualquier valor de la misma. En la Figura 1.87c se ha representado un circuito eléctrico activo que obedece a la ecuación (1.137) y que es más simple que el circuito original de la Figura 1.87a. Ambos circuitos dan el mismo valor para la corriente i_R . La parte recuadrada del circuito de la Figura 1.87c constituida por un generador de tensión más una resistencia (en general una impedancia) en serie se denomina *equivalente de Thévenin* de la red de la Figura 1.87a, excluyendo la resistencia de carga R .

León Thévenin, un ingeniero de telégrafos francés, expresó lo anterior en 1883 en forma de teorema (Teorema de Thévenin) dando el enunciado siguiente:

Cualquier red lineal, compuesta de elementos pasivos y activos (independientes o dependientes) (Figura 1.88a) se puede sustituir (desde el punto de vista de sus terminales externos AB) por un generador de tensión U_{Th} denominado generador de Thévenin, más una impedancia en serie Z_{Th} .

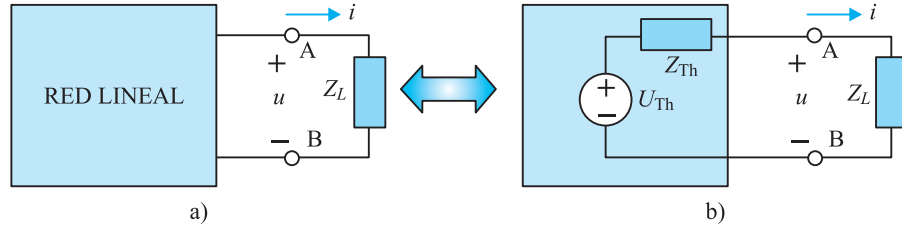


Figura 1.88 Sustitución de una red lineal por el teorema de Thévenin

En la Figura 1.88b se muestra el circuito equivalente de Thévenin de la *red dipolo* de la Figura 1.88a. Si ambas redes han de ser equivalentes deben dar los mismos valores de tensión y corriente a una impedancia de carga Z_L . Está claro que para calcular los valores de U_{Th} y Z_{Th} se necesita fijar dos condiciones específicas en el valor de Z_L , las más simples son elegir $Z_L = \infty$ y $Z_L = 0$. El hacer $Z_L = \infty$ significa físicamente desconectar la impedancia de carga del circuito. En esta situación el circuito de la Figura 1.88a da lugar a una tensión en vacío o en circuito abierto U_0 con $i = 0$, que debe ser idéntica a la del circuito equivalente de la Figura 1.88b; en este circuito si $i = 0$, se obtiene una tensión entre los terminales AB igual a U_{Th} , ya que la tensión en la impedancia Z_{Th} con $i = 0$ es nula. Por consiguiente:

El valor de U_{Th} de la red equivalente es igual a la magnitud U_0 de la red lineal que se obtiene entre los terminales de salida AB al desconectar la carga y dejar el circuito abierto.

Si ahora se elige $Z_L = 0$, que representa un cortocircuito entre los terminales externos y denominamos i_{corto} la corriente que circula por este cortocircuito realizado entre los terminales externos AB del circuito de la Figura 1.88a, se debe obtener la misma corriente i_{corto} para el circuito de la Figura 1.88b, cuando se toma $Z_L = 0$, por lo que resulta:

$$i_{corto} = \frac{U_{Th}}{Z_{Th}} \quad (1.138)$$

de donde se obtiene el valor de Z_{Th} :

$$Z_{Th} = \frac{U_{Th}}{i_{corto}} \quad (1.139)$$

es decir :

El valor de Z_{Th} se obtiene como cociente entre la tensión que da la red en vacío $U_0 = U_{Th}$ y la corriente de cortocircuito i_{corto} .

Si los generadores de la red lineal (Figura 1.88a) son todos independientes, el cálculo de Z_{Th} es más simple que el expresado en (1.139) y *representa el valor de la impedancia que se observa entre los terminales A y B de salida cuando se anulan los generadores*

internos de la red (es decir se cortocircuitan los generadores de tensión y se abren los de corriente). Téngase en cuenta que si se anulan los generadores de la red, al no existir fuentes de excitación, la tensión equivalente de Thévenin debe ser igual a cero, y según el circuito de la Figura 1.88b, al anular U_{Th} la impedancia que se observa entre los terminales A y B (quitando por supuesto la carga) coincide con Z_{Th} . Cuando la red lineal contiene generadores dependientes estos no se pueden anular ya que sus amplitudes dependen de alguna variable de tensión o corriente de la red y por ello la determinación Z_{Th} debe realizarse de acuerdo con la definición general (1.139). En este caso es frecuente encontrar valores negativos para la impedancia de Thévenin, que no tiene sentido físico pero sí matemático.

El teorema de Thévenin tiene una versión dual que es el teorema de Norton. En este caso la red lineal de la Figura 1.89a se puede sustituir por un generador de corriente i_N en paralelo con una impedancia Z_N (Figura 1.89b).

En definitiva esta equivalencia representa, al comparar las Figuras 1.88b y 1.89b, la sustitución de un generador de tensión por otro de corriente. Así observamos que se debe cumplir:

$$i_N = \frac{U_{Th}}{Z_{Th}} = i_{\text{corto}} \quad ; \quad Z_N = Z_{Th} \quad (1.140)$$

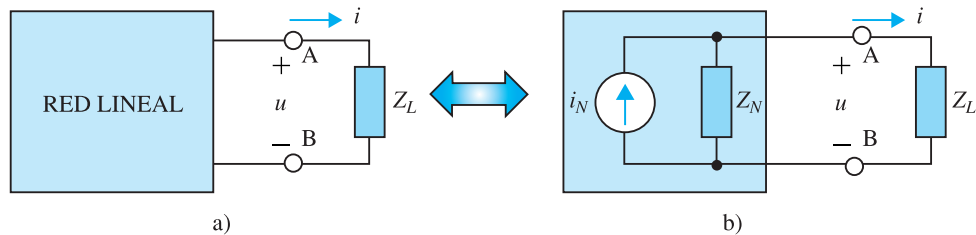


Figura 1.89 Sustitución de una red lineal por el teorema de Norton

que nos indica que el generador de corriente de Norton es igual a la corriente de cortocircuito que se obtiene en la red lineal al juntar sus terminales ($Z_L = 0$) y que la impedancia de Norton es el cociente entre la tensión en vacío y la corriente de cortocircuito de la red (al igual que la impedancia de Thévenin). El trabajo de Norton fue publicado 50 años después que el de Thévenin. También se dice que el gran físico alemán H. S. F. Helmholtz (1782-1894) demostró un caso especial del teorema de Thévenin en 1853.

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.15

Demostrar que el circuito de la Figura 1.87c representa el circuito equivalente de Thévenin de la red de la Figura 1.87a.

Solución

En la Figura 1.90a se muestra el circuito para calcular la U_{Th} . Se ha desconectado la resistencia R que había entre A y B, y debemos calcular $U_{AB} = U_0$ estando sin carga el circuito. En la red de la Figura 1.90a, se tiene:

$$i_1 = \frac{10}{4 + 4} = 1,25 \text{ A}$$

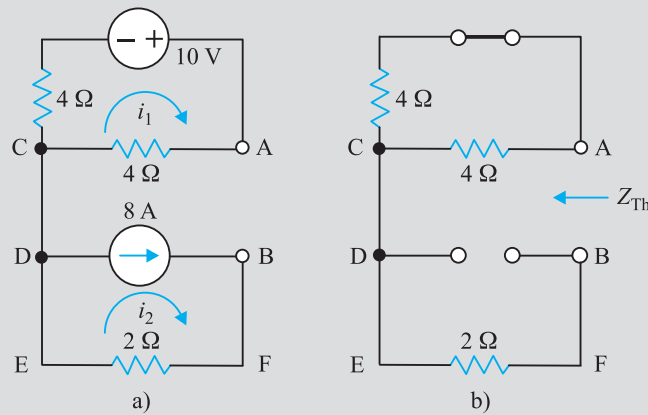


Figura 1.90 Ejemplo de aplicación 1.15

y la tensión en vacío entre A y B, siguiendo el camino ACDEFB será:

$$U_{AB} = U_0 = U_{Th} = 4i_1 - 2 \cdot 8 = 5 - 16 = -11 \text{ V}$$

que indica que el borne B es el terminal positivo del generador de Thévenin, como así se comprueba en la Figura 1.87c. Para calcular la impedancia (en este caso resistencia) de Thévenin, se deben cortocircuitar los generadores de tensión y abrir los de corriente (es decir debe dejarse la *red desexcitada*, lo que significa anular los generadores); el circuito resultante se muestra en la Figura 1.90b. La impedancia vale:

$$Z = 4 \parallel 4 + 2 = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} + 2 = 4 \Omega$$

valor que se confirma en la Figura 1.87c.

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.16

Calcular la corriente i del circuito de la Figura 1.91 aplicando el teorema de Thévenin.

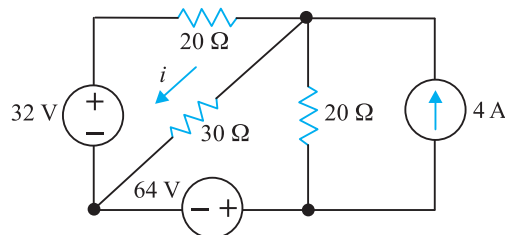


Figura 1.91 Circuito del ejemplo de aplicación 1.16

Solución

a) Cálculo de U_{Th}

Dejando el circuito abierto, se obtiene la red de la Figura 1.92, donde se debe determinar U_{AB} . Aplicando el teorema de las mallas, resulta:

$$64 - 32 = (20 + 20)I_1 - 20I_2 \quad ; \text{ con } I_2 = 4 \text{ A}$$

de donde se obtiene:

$$32 = 40I_1 - 80 \Rightarrow I_1 = \frac{112}{40} = 2,8 \text{ A}$$

por lo que $U_{AB} = U_0 = U_{Th}$ vale:

$$U_{AB} = 20I_1 - (-32) = 88 \text{ V}$$

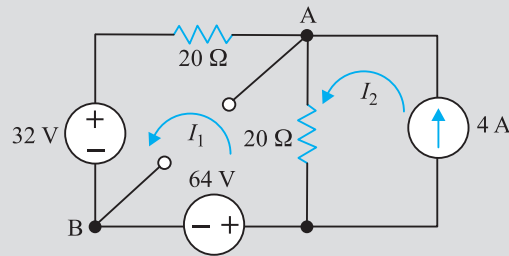


Figura 1.92 Circuito equivalente de la Figura 1.91 para el cálculo de U_{Th}

b) Cálculo de Z_{th}

Primer procedimiento:

Al cortocircuitar los terminales AB se obtiene el circuito de la Figura 1.93, que resolviendo por mallas da lugar a las siguientes ecuaciones:

$$32 = 20I_1$$

$$-64 = 20I_2 - 20I_3$$

$$I_3 = -4$$

Y se obtienen los siguientes resultados: $I_1 = 1,6 \text{ A}$; $I_2 = -7,2 \text{ A}$, de donde se deduce:

$$I_{AB} = I_{corto} = I_1 - I_2 = 8,8 \text{ A}$$

en consecuencia, la impedancia Z_{Th} vale:

$$Z_{Th} = \frac{U_0}{I_{corto}} = \frac{88}{8,8} = 10 \Omega$$

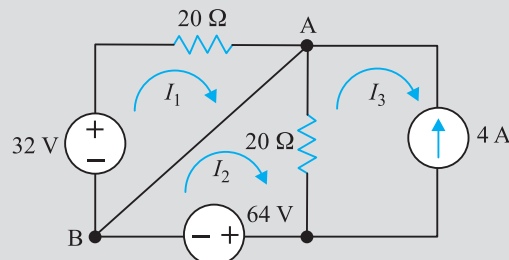


Figura 1.93 Circuito equivalente de la Figura 1.91 para el cálculo de la Z_{Th}

Segundo procedimiento:

Al no existir fuentes dependientes, se pueden sustituir los generadores por sus impedancias internas, lo que da lugar al circuito de la Figura 1.94, en el que se observa que las resistencias de $20\ \Omega$ están en paralelo, resultando una resistencia total:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10\ \Omega$$

que coincide con el valor calculado antes.

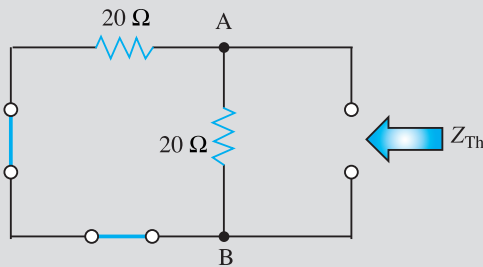


Figura 1.94 Circuito equivalente de la Figura 1.91 para el cálculo directo de Z_{Th}

c) Cálculo de la corriente i

El circuito a resolver es el indicado en la Figura 1.95, en el que se ha señalado con un recuadro la red equivalente de Thévenin. La corriente i , tiene el siguiente valor:

$$i = \frac{88}{10 + 30} = 2,2\ \text{A}$$

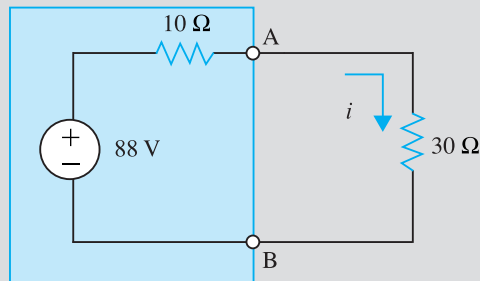


Figura 1.95 Circuito equivalente de Thévenin de la Figura 1.91



EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.17: Thévenin con fuentes dependientes

En el circuito de la Figura 1.96, calcular la corriente i_R que circula por la resistencia de carga R aplicando a) el método de las mallas, b) teorema de Thévenin.

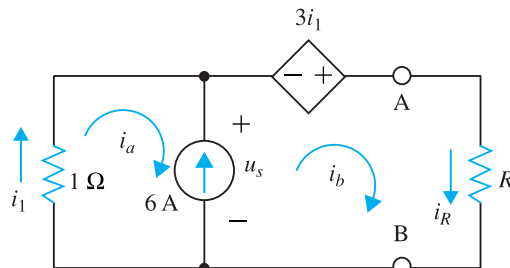


Figura 1.96 Circuito del ejemplo de aplicación 1.17

Solución

a) Denominando $i_a = i_1$ e $i_b = i_R$ a las corrientes de malla y u_s la tensión en los bornes del generador de corriente de la Figura 1.96, se pueden escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\text{Malla } a: & \quad -u_s = 1 i_1 \\ \text{Malla } b: & \quad u_s + 3 i_1 = R i_R \\ \text{Condición generador de corriente:} & \quad 6 = i_R - i_1\end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$i_R = \frac{-12}{-2 + R}$$

b) En la Figura 1.97a, se muestra el circuito para calcular la U_{Th} . Se observa que $i_1 = -6$ A, por lo que la d.d.p. en vacío entre los terminales A y B vale:

$$U_{AB} = U_{Th} = 3 i_1 - 1 \cdot i_1 = 2 i_1 = -12 \text{ V}$$

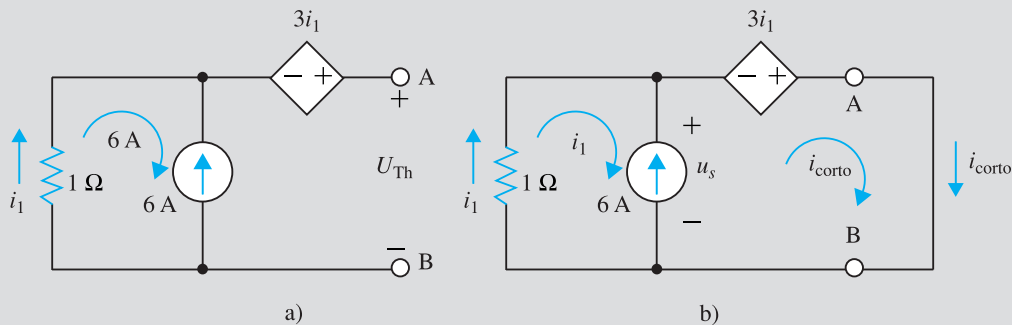


Figura 1.97 Circuitos equivalentes de la Figura 1.96

En la Figura 1.97b se ha efectuado un cortocircuito entre A y B. Al resolver por mallas resulta:

$$\begin{aligned}\text{Malla 1:} & \quad -u_s = 1 i_1 \\ \text{Malla 2:} & \quad u_s + 3 i_1 = 0 \\ \text{Condición:} & \quad 6 = i_{\text{corto}} - i_1\end{aligned}$$

de donde se deduce $i_1 = 0$; $i_{\text{corto}} = 6$ A, por consiguiente, de acuerdo con (1.139) se tiene una impedancia de Thévenin:

$$Z_{Th} = \frac{U_{Th}}{i_{\text{corto}}} = \frac{-12}{6} = -2 \Omega$$

está claro que el valor anterior tiene más sentido matemático que físico. Debe quedar claro que al calcular ese cociente se debe tomar U_{Th} entre A y B, y la intensidad de corto como corriente que va de A a B. De este modo el valor de la corriente en la resistencia R sería igual:

$$i_R = \frac{U_{Th}}{Z_{Th} + R} = \frac{-12}{-2 + R}$$

que coincide con el valor calculado por el método de las mallas. Conviene que el lector se dé cuenta que al existir generadores dependientes no puede calcular la Z_{Th} como impedancia que se observa entre terminales al anular los generadores internos. Un cálculo simple para la red de la Figura 1.96, le llevará a un valor (en caso de proceder erróneamente) de $Z_{Th} = 1 \Omega$, que no es el correcto. Otro aspecto a considerar es que cuando la red lineal contiene generadores dependientes de la intensidad de la carga (por ejemplo, en el caso de la Figura 1.96 que el generador de tensión sea de la forma: $3i_R$) no se puede calcular el circuito equivalente de Thévenin, porque la carga está íntimamente ligada al generador, y al dejarla en circuito abierto o cortocircuito está modificando el valor de aquel. Es decir, para que exista un equivalente de Thévenin, la carga no puede interactuar «directamente» con los generadores dependientes.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.18: Transferencia máxima de potencia

En la Figura 1.98 se muestra el circuito equivalente de Thévenin de una red lineal. Calcular el valor de la resistencia de carga R_L en función de los parámetros de la red, para que se transfiera la máxima potencia a esta carga.

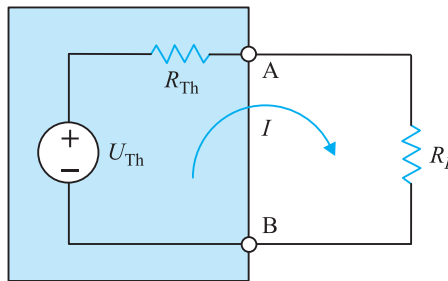


Figura 1.98 Circuito del ejemplo de aplicación 1.18

Solución

La corriente I que circula por la carga de la Figura 1.98 vale:

$$I = \frac{U_{Th}}{R_{Th} + R_L}$$

que corresponde a una potencia consumida en R_L :

$$P_L = R_L I^2 = R_L \frac{U_{Th}^2}{(R_{Th} + R_L)^2} \quad (1.141)$$

la condición de máximo se obtiene al igualar a cero la derivada de P_L respecto de R_L , lo que da lugar a:

$$\frac{dP_L}{dR_L} = U_{Th}^2 \frac{(R_{Th} + R_L)^2 - 2R_L(R_{Th} + R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4} = U_{Th}^2 \frac{R_{Th} - R_L}{(R_{Th} + R_L)^3} = 0 \quad (1.142)$$

de donde se deduce que debe cumplirse para una impedancia de carga de valor:

$$R_L = R_{Th} \quad (1.143)$$

el lector puede comprobar que el valor de la segunda derivada para $R_L = R_{Th}$ es:

$$\left[\frac{d^2 P_L}{dR_L^2} \right]_{R_L = R_{Th}} = - \frac{U_{Th}^2}{8R_{Th}^3} < 0 \quad (1.144)$$

que confirma que el extremal es un máximo absoluto para $R_L = R_{Th}$, es decir cuando la resistencia de la carga coincide con la resistencia del equivalente de Thévenin. En las condiciones anteriores se dice que la red lineal (a la cual sustituye el equivalente de Thévenin) y la carga están **adaptadas**. La potencia máxima desarrollada en la carga en estas condiciones vale:

$$(P_L)_{\max} = \frac{U_{Th}^2}{4R_{Th}} \quad (1.145)$$

Se debe advertir al lector que se ha determinado el valor de R_L para unos valores prefijados de R_{Th} y U_{Th} . No debe confundirse este problema con el inverso, en el que se tiene un generador U_{Th} con una resistencia en serie R_{Th} cuyo valor se desea determinar para suministrar la máxima potencia a una carga de valor ya definido R_L . Es obvio que en esta situación la potencia será máxima cuando $R_{Th} = 0$, es decir cuando la resistencia equivalente de Thévenin tenga una resistencia despreciable.

1.16. Otros teoremas de circuitos

Como complemento a la teoría de circuitos estudiada en este capítulo, a continuación se exponen de un modo simplificado una serie de teoremas, algunos de ellos muy genéricos y otros que tienen aplicaciones más específicas, y que facilitan el estudio de las redes eléctricas.

1.16.1. Teorema de sustitución

Supóngase una red activa, como la que se muestra en la Figura 1.99a, en la que en una rama cualquiera de impedancia Z , se tiene una d.d.p. $u = Zi$. Este teorema señala que se puede sustituir esta rama por un generador ideal de tensión u_s igual en cada instante a la d.d.p. $u = Zi$. La Figura 1.99 muestra de un modo gráfico esta equivalencia.

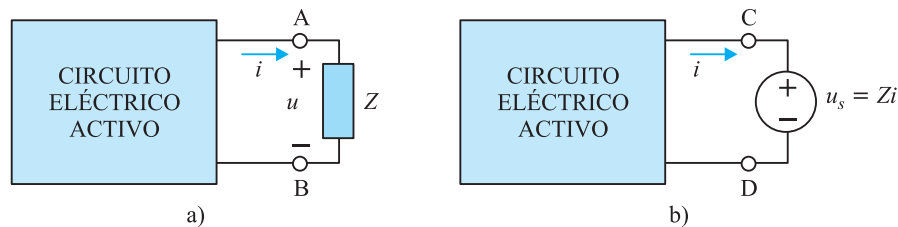
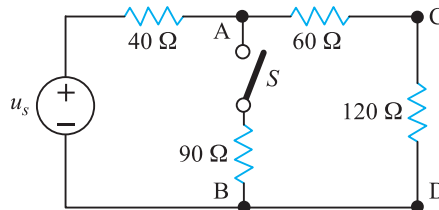


Figura 1.99 Teorema de sustitución

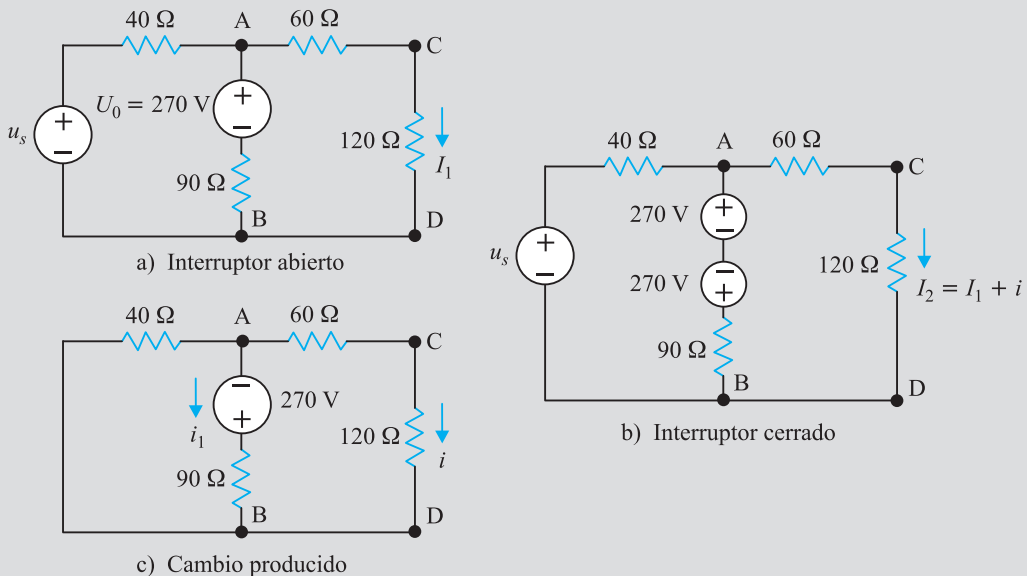
En particular, si los terminales A y B de la red están abiertos (Z infinito), existe una d.d.p. u_0 entre A y B, y no cambia el estado de la red al sustituir la tensión u_0 por un generador $u_s = u_0$ y de la misma polaridad.

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.19**

En el circuito de la Figura 1.100, estando el interruptor S abierto, la d.d.p. entre A y B es de 270 V. Calcular aplicando el teorema de sustitución y el de superposición, el cambio que experimenta la d.d.p. en bornes de la resistencia de $120\ \Omega$, al cerrar el interruptor S .

**Figura 1.100** Ejemplo de aplicación 1.19**Solución**

De acuerdo con el teorema de sustitución, el interruptor abierto de la Figura 1.100 se puede reemplazar por un generador ideal de tensión tal como se muestra en la Figura 1.101a, sin que se modifique el funcionamiento de la red. La polaridad de este generador se ha tomado en consonancia con la polaridad del generador u_s del circuito. La resistencia de $120\ \Omega$ es recorrida por una corriente que se ha denominado I_1 . Al cerrar el interruptor S , la tensión entre sus terminales debe ser nula. Para representar este hecho es necesario incluir una fuente de 270 V en sentido contrario, lo que da lugar al circuito de la Figura 1.101b. La nueva tensión de 270 V se superpone a los generadores anteriores que tiene la red. La corriente en la resistencia de $120\ \Omega$ se ha denominado ahora $I_2 = I_1 + i$.

**Figura 1.101** Ejemplo de aplicación 1.19

El circuito de la Figura 1.101b se puede obtener como superposición del circuito a) y el circuito c); de este modo en la Figura 1.101c se ha señalado la corriente i que circula por la resistencia de $120\ \Omega$ y que

representa el cambio en la corriente que va a circular por esta resistencia. En este circuito es inmediato obtener la corriente i , calculando previamente la corriente i_1 de este modo:

$$i_1 = -\frac{270}{90 + 40//180} = 2,2 \text{ A} \Rightarrow i = -i_1 \frac{40}{40 + 180} = -2,2 \frac{40}{220} = -0,4 \text{ A}$$

por lo que la d.d.p. entre los terminales CD de la Figura 1.101c que es el cambio en la tensión que sufre la resistencia de 120Ω cuando se cierra el interruptor S , es igual a:

$$U_{CD} = 120 \cdot i = 120 \cdot (-0,4) = -48 \text{ V}$$

NOTA: El lector puede comprobar que $u_s = 330 \text{ V}$, y de este modo se obtienen las corrientes: $I_1 = 1,5 \text{ A}$; $I_2 = 1,1 \text{ A}$ por lo que la corriente i vale: $i = +1,1 - 1,5 = -0,4 \text{ A}$ y $U_{CD} = -0,4 \cdot 120 = -48 \text{ V}$. En definitiva lo que sucede es que cuando el interruptor está abierto, la d.d.p. en bornes de la resistencia de 120Ω es de 180 V y cuando se cierra S , la d.d.p. pasa a valer 132 V , por lo que se produce una reducción de tensión de 48 V .

1.16.2. Teorema de reciprocidad

Si se tiene una red pasiva (sin generadores) como se indica en la Figura 1.102a y se aplica en una rama AB un generador u_s y se mide la corriente I en otra rama CD, el resultado es el mismo si se intercambia la excitación y la respuesta, es decir, al aplicar un generador u_s a la rama CD producirá una corriente I en la rama AB. En la Figura 1.102 se muestra de un modo gráfico el significado de este teorema, que es consecuencia natural de la simetría del determinante de impedancias de una red pasiva, lineal, invariante y bilateral.

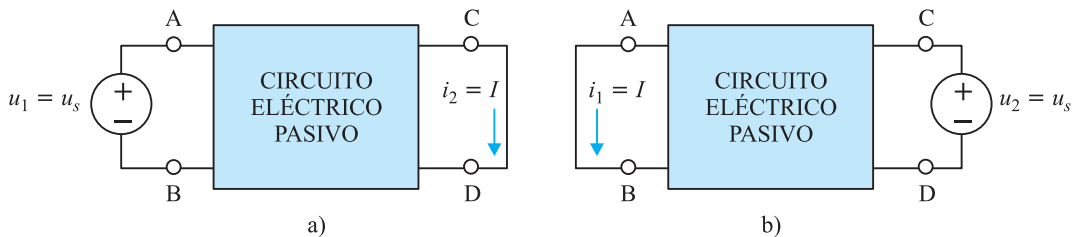


Figura 1.102 Teorema de reciprocidad

Si en la Figura 1.102, se señalan las variables del lado AB de la entrada al circuito pasivo con el subíndice 1 y las variables del lado CD de salida por el subíndice 2, el teorema de reciprocidad se expresa en general de la forma siguiente:

$$\frac{u_1}{i_2} = \frac{u_2}{i_1} \quad (1.146)$$

lo que se cumple específicamente en el esquema de la Figura 1.102, al ser $u_1 = u_2 = u_s$ e $i_1 = i_2 = I$.

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.20**

En el circuito de la Figura 1.103a, demostrar que la corriente I_{CD} de la rama CD, debido al generador de tensión $u_s = 300$ V, situado en la rama AB, es la misma que la corriente I_{AB} en la rama AB de la Figura 1.103b, cuando el generador $u_s = 300$ V se coloca en serie con la rama CD.

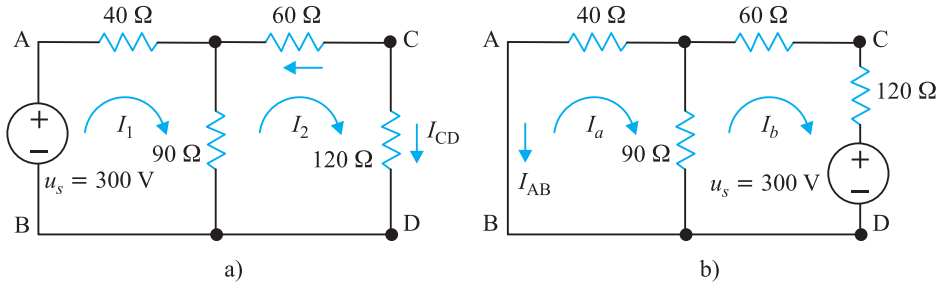


Figura 1.103 Ejemplo de aplicación 1.20

Solución

a) En el circuito de la Figura 1.103a, si se resuelve por mallas, da lugar a las ecuaciones siguientes:

$$300 = 130I_1 - 90I_2$$

$$0 = -90I_1 + 270I_2$$

cuyos resultados son: $I_1 = 3$ A; $I_2 = 1$ A; es decir la corriente $I_{CD} = 1$ A.

b) En el circuito de la Figura 1.103b, si se resuelve por mallas, da lugar a las ecuaciones siguientes:

$$0 = 130I_a - 90I_b$$

$$-300 = -90I_a + 270I_b$$

cuyos resultados son: $I_a = -1$ A; $I_b = -13/9$ A; es decir la corriente $I_{AB} = -I_a = 1$ A, que coincide con $I_{CD} = 1$ A, del circuito de la Figura 1.103a, como establece el teorema de reciprocidad.

1.16.3. Teorema de Millman

Este teorema permite calcular la d.d.p. entre dos nudos A y B de una red, conociendo las admitancias que llegan al nudo A y las tensiones entre el nudo B y los otros extremos de las admitancias. Si se considera el circuito de la Figura 1.104, en el que A y B son dos nudos de una red en el que confluyen las admitancias; $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$, y en sus otros extremos se tienen respectivamente los nudos 1, 2, 3, ..., n, y se supone que se conocen las tensiones: $U_{1B}, U_{2B}, U_{3B}, \dots, U_{nB}$, entre cada nudo señalado y el nudo B, entonces se pueden escribir las siguientes relaciones de corrientes:

$$i_1 = Y_1(U_{AB} - U_{1B}) \quad ; \quad i_2 = Y_2(U_{AB} - U_{2B}) \quad ; \quad \dots, i_n = Y_n(U_{AB} - U_{nB}) \quad (1.147)$$

y como quiera que en el nudo A se cumple el primer lema de Kirchhoff:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = 0 \quad (1.148)$$

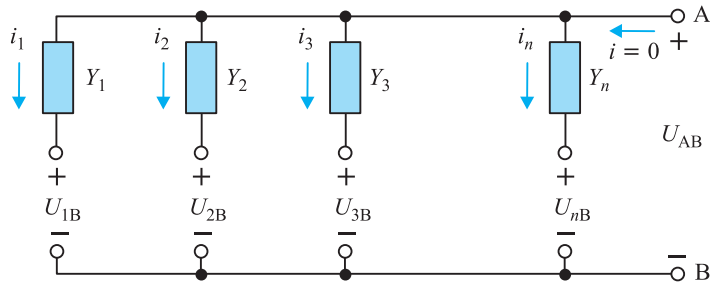


Figura 1.104 Teorema de Millman

al sustituir (1.147) en (1.148) se obtiene:

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n)U_{AB} - Y_1U_{1B} - Y_2U_{2B} - Y_3U_{3B} - \dots - Y_nU_{nB} = 0 \quad (1.149)$$

de donde se deduce:

$$U_{AB} = \frac{Y_1U_{1B} + Y_2U_{2B} + Y_3U_{3B} + \dots + Y_nU_{nB}}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i U_{iB}}{\sum_{i=1}^n Y_i} \quad (1.150)$$

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.21

En el circuito de la Figura 1.105, calcular la d.d.p. entre los nudos A y B, aplicando el teorema de Millman.

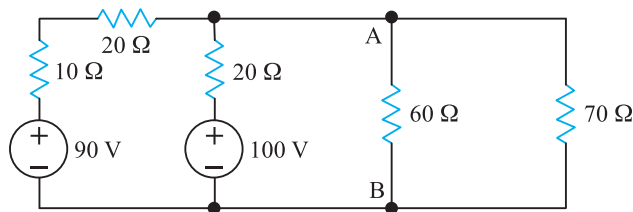


Figura 1.105 Ejemplo de aplicación 1.21

Solución

Para aplicar el teorema de Millman al circuito anterior, se debe observar que las dos ramas de la derecha no tienen generador en serie, lo que significa que la tensión de los mismos es cero, de este modo al aplicar al circuito anterior la expresión (1.150) se obtiene:

$$U_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i U_{iB}}{\sum_{i=1}^n Y_i} = \frac{90 \cdot \frac{1}{30} + 100 \cdot \frac{1}{20} + 0 \cdot \frac{1}{60} + 0 \cdot \frac{1}{30}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{70}} = 70 \text{ voltios}$$

1.16.4. Teorema de Tellegen

Es un teorema general de redes, y su importancia se debe a que es válido para circuitos que incluyan tanto elementos activos como pasivos, lineales y no lineales y con fuentes que varíen o no con respecto al tiempo. Esta generalidad es fruto de que, la única exigencia del teorema es que se cumplan los dos lemas de Kirchhoff. Para explicar su significado de un modo simple, supóngase el circuito de la Figura 1.106, en el que se han seleccionado unos sentidos de referencias arbitrarios para todas las corrientes de rama. Las tensiones de rama correspondientes se toman siguiendo el criterio receptor (es decir, las corrientes se dirigen del terminal positivo al negativo en cada rama). Se selecciona entonces un conjunto de tensiones de rama u_k , siendo la única exigencia que estas tensiones satisfagan el segundo lema de Kirchhoff. A continuación se selecciona un conjunto de corrientes de rama i_k que satisfagan el primer lema de Kirchhoff. El teorema de Tellegen afirma que en estas condiciones se cumple:

$$\sum_{k=1}^r u_k(t) i_k(t) = 0 \quad (1.151)$$

donde r representa el número de ramas. Supóngase por ejemplo que en el circuito de la Figura 1.106, elegimos las siguientes tensiones:

$$u_1 = 5 \text{ V}; u_2 = 3 \text{ V}; u_3 = 2 \text{ V}; u_4 = 4 \text{ V}; u_5 = -2 \text{ V}; u_6 = -7 \text{ V} \quad (1.152)$$

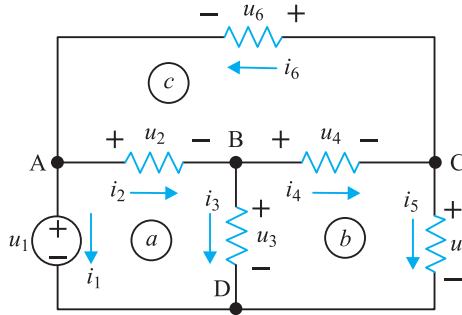


Figura 1.106 Aplicación del teorema de Tellegen

que cumplen el segundo lema de Kirchhoff en las mallas a , b y c , como se comprueba a continuación:

$$\begin{aligned} \text{Malla } a: & -u_1 + u_2 - u_3 = 0 \\ \text{Malla } b: & -u_3 + u_4 + u_5 = 0 \\ \text{Malla } c: & +u_2 + u_4 + u_6 = 0 \end{aligned} \quad (1.153)$$

Se eligen a continuación unos valores arbitrarios de las corrientes de rama que satisfacen el primer lema de Kirchhoff, por ejemplo:

$$i_1 = 2 \text{ A}; i_2 = 3 \text{ A}; i_3 = 1 \text{ A}; i_4 = 2 \text{ A}; i_5 = -3 \text{ A}; i_6 = 5 \text{ A} \quad (1.154)$$

que cumplen el primer lema de Kirchhoff en los nudos A , B y C , como se comprueba a continuación:

$$\begin{aligned}
 \text{Nudo A: } & -i_1 - i_2 + i_6 = 0 \\
 \text{Nudo B: } & i_2 - i_3 - i_4 = 0 \\
 \text{Nudo C: } & i_4 - i_5 - i_6 = 0
 \end{aligned} \tag{1.155}$$

Veamos que entonces se verifica el teorema de Tellegen:

$$\sum_{k=1}^6 u_k i_k = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + (-7) \cdot 5 = 0 \tag{1.156}$$

el lector puede elegir diversos valores de tensiones y corrientes (siempre que verifiquen los lemas de Kirchhoff) para comprobar que siempre se cumple el teorema de Tellegen. Debe destacarse para comprender la profundidad de este teorema, que la elección de las tensiones y corrientes de rama es *totalmente arbitraria*, el único requisito exigible es que verifiquen los lemas de Kirchhoff.

Si se considera ahora una red eléctrica arbitraria compuesta de elementos activos y pasivos con valores cualesquiera y se *resuelve* la red (por mallas, por nudos o por cualquier otro procedimiento), para obtener finalmente los *valores verdaderos* de las tensiones $u_k(t)$ y corrientes de rama $i_k(t)$, entonces el producto $u_k(t)i_k(t) = p_k(t)$, es la *potencia instantánea desarrollada* en cada rama del circuito (ya que se ha utilizado el convenio de signos de elementos pasivos, es decir de receptor) y por el teorema de Tellegen se cumple:

$$\sum_{k=1}^r u_k(t)i_k(t) = \sum_{k=1}^r p_k(t) = 0 \tag{1.157}$$

que refleja el principio de conservación de la potencia (en definitiva de conservación de la energía) en el circuito. Si la red se divide en elementos generadores y en elementos receptores, la ecuación anterior señala que la suma de las potencias que suministran las fuentes es igual a la suma de las potencias que absorben los receptores, es decir que *se cumple el balance de potencias en el circuito*.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.22

El circuito de la Figura 1.107, es el mismo que el de la Figura 1.106, pero aquí ya se han asignado los valores de los parámetros del generador y de los elementos pasivos. Resolver esta red por el método de las corrientes de malla y calcular los valores reales de las tensiones y corrientes de rama señalados, comprobando a continuación que se cumple el teorema de Tellegen.

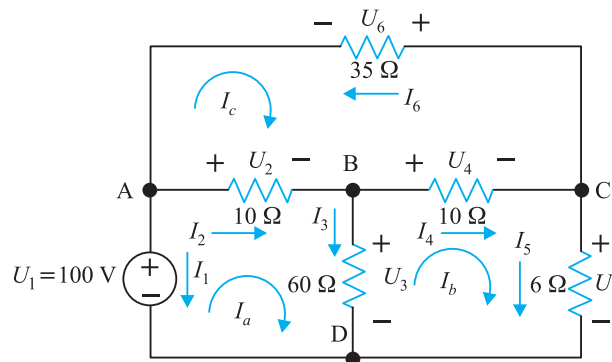


Figura 1.107 Ejemplo de aplicación 1.22

Solución

Al resolver la red por el método de las corrientes de malla indicadas en la Figura 1.107, se obtiene:

$$\text{Malla } a: 100 = 70I_a - 60I_b - 10I_c$$

$$\text{Malla } b: 0 = -60I_a + 76I_b - 10I_c$$

$$\text{Malla } c: 0 = -10I_a - 10I_b + 55I_c$$

Cuyas soluciones son: $I_a = 6 \text{ A}$; $I_b = 5 \text{ A}$; $I_c = 2 \text{ A}$.

Es por ello que las correspondientes corrientes de rama señaladas en la Figura 1.107, son:

$$I_1 = -I_a = -6 \text{ A}; I_2 = I_a - I_c = 4 \text{ A}; I_3 = I_a - I_b = 1 \text{ A}; I_4 = I_b - I_c = 3 \text{ A}; I_5 = I_b = 5 \text{ A}; I_6 = -I_c = -2 \text{ A}$$

y las tensiones de rama correspondientes, teniendo en cuenta que en las resistencias se cumple la ley de Ohm, son:

$$U_1 = 100 \text{ V}; U_2 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ V}; U_3 = 60 \cdot 1 = 60 \text{ V}; U_4 = 10 \cdot 3 = 30 \text{ V}; U_5 = 6 \cdot 5 = 30 \text{ V};$$

$$U_6 = 35 \cdot (-2) = -70 \text{ V}$$

y de este modo se cumple:

$$\sum_{k=1}^6 u_k i_k = 100 \cdot (-6) + 40 \cdot 4 + 60 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 30 \cdot 5 + (-70) \cdot (-2) = 0$$

que verifica el teorema de Tellegen.

**Amplíe sus conocimientos**

El teorema de Tellegen tiene aplicaciones más generales que las que aquí se han señalado. Si por ejemplo se consideran dos circuitos con el mismo grafo y con los mismos sentidos de referencia asignados a las tensiones y corrientes de cada rama, pero con diferentes elementos y parámetros correspondientes en cada circuito (incluso uno puede tener fuentes de corriente continua y el otro fuentes de corriente alterna, o también cada circuito puede tener ambos tipos de fuentes). Si denominamos u_{1k} e i_{1k} las tensiones y corrientes de rama del primer circuito y u_{2k} e i_{2k} las tensiones y corrientes de rama del segundo, de tal modo que satisfagan todas estas variables los lemas de Kirchhoff, entonces de acuerdo con el teorema de Tellegen, se cumple:

$$\sum_{k=1}^r u_{1k} i_{2k} = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^r u_{2k} i_{1k} = 0 \quad (1.158)$$

lo cual es sorprendente, porque los términos de las sumas pueden ser muy distintos, además ahora los sumatorios anteriores (al tratarse del producto de la tensión de una rama del primero por la corriente de la misma rama del segundo), ya no tienen el significado concreto de conservación de la potencia instantánea de un circuito. Incluso si las fuentes varían con respecto al tiempo se verifica:

$$\sum_{k=1}^r u_k(t_1) i_k(t_2) = 0 \quad (1.159)$$

lo que significa que si los tiempos de observación (muestreo) de las tensiones y corrientes de rama son distintos se sigue verificando el teorema de Tellegen. ¡Es un teorema impresionante!

1.17. Cuadripolos

Un cuadripolo es un conjunto de elementos eléctricos que tiene cuatro bornes de acceso externo (es decir dos puertas o puertos). Los cuadripolos se usan para transmitir y filtrar señales, como en la técnica de las comunicaciones y también como modelo de líneas de transporte de energía en la técnica de la electrotecnia. Los cuadripolos se representan por un rectángulo, tal como se muestra en la Figura 1.108, en el que no es necesario conocer su estructura interna.

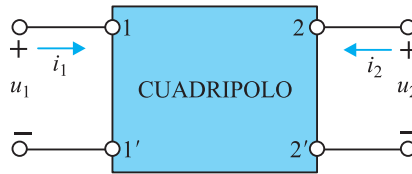


Figura 1.108 Cuadripolo

Si el cuadripolo no tiene generadores en su interior, se dice que es un cuadripolo pasivo, en caso contrario se denomina cuadripolo activo. Los terminales de entrada se han señalado en la Figura 1.108 por 1, 1' y los de salida por 2, 2'; también se indican las referencias de las tensiones y corrientes u_1 , i_1 , u_2 e i_2 .

Existen diversas formas de relacionar las variables anteriores, si se expresan las tensiones aplicadas en función de las corrientes, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_1 &= Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2 \\ u_2 &= Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2 \end{aligned} \quad (1.160)$$

donde Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} y Z_{22} son en general impedancias operacionales (función del operador D), y que en el caso particular de que las variables no dependan del tiempo, se transforman en resistencias. Las ecuaciones (1.160) se pueden expresar en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [u] = [Z] \cdot [i] \quad (1.161)$$

donde $[Z]$ representa la **matriz de impedancias del cuadripolo** y que en el caso de señales que no varíen respecto del tiempo se transforman en resistencias.

Si en un cuadripolo, se expresan las corrientes en función de las tensiones, las ecuaciones correspondientes son:

$$\begin{aligned} i_1 &= Y_{11}u_1 + Y_{12}u_2 \\ i_2 &= Y_{21}u_1 + Y_{22}u_2 \end{aligned} \quad (1.162)$$

y que en forma matricial se pueden poner:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [i] = [Y] \cdot [u] \quad (1.163)$$

donde $[Y]$ representa la **matriz de admitancias del cuadripolo** y que en el caso de señales que no varíen respecto del tiempo se transforman en conductancias. Se puede demostrar fácilmente que la matriz de admitancias es la inversa de la matriz de impedancias, es decir:

$$[Y] = [Z]^{-1} \quad (1.164)$$

Las matrices $[Z]$ e $[Y]$ son *simétricas para un cuadripolo pasivo*, y esta simetría es la expresión del *principio de reciprocidad*, como se comprobará después.

Las ecuaciones de un cuadripolo pueden relacionar también la tensión y corriente de entrada, con la tensión y corriente de salida, mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} u_1 &= Au_2 + B(-i_2) \\ i_1 &= Cu_2 + D(-i_2) \end{aligned} \quad (1.165)$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (1.166)$$

donde la matriz $[T]$ se denomina **matriz de transmisión del cuadripolo**. La razón del signo menos en la corriente i_2 es histórica y se debe al sentido que debe tener esta corriente para que se transfiera energía de la entrada a la salida. En definitiva quiere decir que la corriente real tiene sentido contrario al que se muestra en la Figura 1.108.

Las relaciones inversas a las anteriores son:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \Rightarrow [T'] = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \quad (1.167)$$

donde $[T']$ es la matriz inversa de $[T]$.

Todos los términos contenidos en las matrices de impedancia, admitancia y transmisión dependen de los elementos internos que constituyen el cuadripolo y se pueden determinar efectuando medidas en el mismo a través de sus terminales externos. Para ello se realizan dos ensayos: vacío y cortocircuito.

a) Ensayo de vacío

Si se alimenta el cuadripolo por una fuente de tensión externa aplicada a los terminales 1 y 1' y se dejan los terminales 2 y 2' en circuito abierto (lo que equivale a hacer $i_2 = 0$), al medir con dos voltímetros las tensiones u_1 y u_2 respectivamente, y con un amperímetro la corriente de entrada i_1 , tal como se muestra en el esquema de la Figura 1.109, al sustituir estas medidas en las ecuaciones (1.160), (1.162) y (1.166), se obtienen los siguientes resultados:

$$\left[\frac{u_1}{i_1} \right]_{i_2=0} = Z_{11} \quad ; \quad \left[\frac{u_1}{u_2} \right]_{i_2=0} = A \quad ; \quad \left[\frac{u_2}{i_1} \right]_{i_2=0} = Z_{21} \quad ; \quad \left[\frac{i_1}{u_2} \right]_{i_2=0} = C = \frac{1}{Z_{21}} \quad (1.168)$$

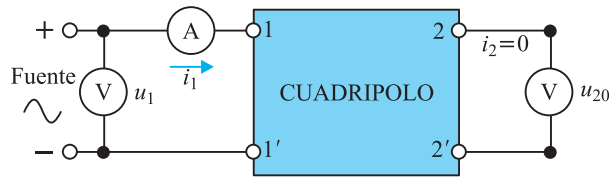


Figura 1.109 Ensayo en vacío de un cuadripolo

Si el ensayo de vacío se hace al contrario, es decir alimentando por los terminales 2 y 2' dejando 1 y 1' en circuito abierto, de un modo similar al anterior, se obtienen los siguientes resultados:

$$\left[\begin{array}{c} u_1 \\ i_2 \end{array} \right]_{i_1=0} = Z_{12} \quad ; \quad \left[\begin{array}{c} i_2 \\ u_1 \end{array} \right]_{i_1=0} = \frac{1}{Z_{12}} \quad ; \quad \left[\begin{array}{c} u_2 \\ i_2 \end{array} \right]_{i_1=0} = Z_{22} \quad (1.169)$$

si se comparan las expresiones tercera de (1.168) y primera de (1.169) se observa que:

$$\left[\begin{array}{c} u_2 \\ i_1 \end{array} \right]_{i_2=0} = Z_{21} \quad ; \quad \left[\begin{array}{c} u_1 \\ i_2 \end{array} \right]_{i_1=0} = Z_{12} \quad (1.170)$$

si se cumple que Z_{21} es igual a Z_{12} , significa que las expresiones (1.170) que definen estos parámetros son iguales, que es en definitiva lo que proclama el teorema de reciprocidad definido en las ecuaciones (1.146).

b) Ensayo de cortocircuito

Si se alimenta el cuadripolo por una fuente de tensión externa aplicada a los terminales 1 y 1' y se unen entre sí los terminales 2 y 2', es decir se efectúa un cortocircuito en la salida, (lo que equivale a hacer $u_2 = 0$), al medir con un voltímetro la tensión aplicada u_1 , y con dos amperímetros las corrientes de entrada i_1 y de salida i_2 , tal como se muestra en la Figura 1.110, al sustituir estas medidas en las ecuaciones (1.163) y (1.166), se obtienen los siguientes resultados:

$$\left[\begin{array}{c} i_1 \\ u_1 \end{array} \right]_{u_2=0} = Y_{11} \quad ; \quad \left[\begin{array}{c} u_1 \\ i_2 \end{array} \right]_{u_2=0} = -B = \frac{1}{Y_{21}} \quad ; \quad \left[\begin{array}{c} i_2 \\ u_1 \end{array} \right]_{u_2=0} = Y_{21} \quad ; \quad \left[\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \end{array} \right]_{u_2=0} = -D \quad (1.171)$$

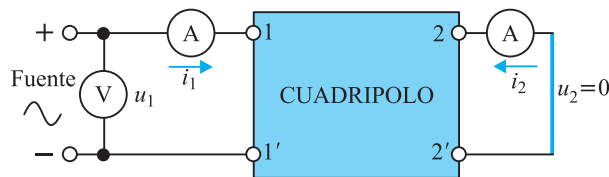


Figura 1.110 Ensayo de cortocircuito de un cuadripolo

Si el ensayo de cortocircuito se hace al contrario, es decir alimentando por los terminales 2 y 2' y cortocircuitando los terminales 1 y 1' (lo que significa hacer $u_1 = 0$), de un modo similar al anterior se obtienen los siguientes resultados:

$$\left[\begin{array}{c} i_2 \\ u_2 \end{array} \right]_{u_1=0} = Y_{22} \quad ; \quad \left[\begin{array}{c} i_1 \\ u_2 \end{array} \right]_{u_1=0} = Y_{12} \quad ; \quad \left[\begin{array}{c} u_2 \\ i_1 \end{array} \right]_{u_1=0} = \frac{1}{Y_{22}} \quad (1.172)$$

al igual que en el caso de las impedancias, si se comparan las expresiones tercera de (1.171) y segunda de (1.172) se observa que:

$$\left[\frac{i_2}{u_1} \right]_{u_2=0} = Y_{21} \quad ; \quad \left[\frac{i_1}{u_2} \right]_{u_1=0} = Y_{12} \quad (1.173)$$

si se cumple que Y_{21} es igual a Y_{12} , significa que las expresiones (1.173) que definen estos parámetros son iguales, que es en definitiva lo que proclama el teorema de reciprocidad definido en la ecuación (1.146).

Los cuatro ensayos que se han explicado son suficientes para determinar todos los parámetros de los diversos modelos de cuadripolos. Al mismo tiempo permite identificar cada uno de los términos de las matrices correspondientes, y así se tiene:

1) Términos de la matriz de impedancias

$Z_{11} = [u_1/i_1]_{i_2=0}$: Es la impedancia de entrada con la salida en circuito abierto.

$Z_{22} = [u_2/i_2]_{i_1=0}$: Es la impedancia de salida con la entrada en circuito abierto.

$Z_{12} = [u_1/i_2]_{i_1=0}$: Es la impedancia de transferencia con la entrada en circuito abierto.

$Z_{21} = [u_2/i_1]_{i_2=0}$: Es la impedancia de transferencia con la salida en circuito abierto.

2) Términos de la matriz de admitancias

$Y_{11} = [i_1/u_1]_{u_2=0}$: Es la admitancia de entrada con la salida en cortocircuito.

$Y_{22} = [i_2/u_2]_{u_1=0}$: Es la admitancia de salida con la entrada en cortocircuito.

$Y_{12} = [i_1/u_2]_{u_1=0}$: Es la admitancia de transferencia con la entrada en cortocircuito.

$Y_{21} = [i_2/u_1]_{u_2=0}$: Es la admitancia de transferencia con la salida en cortocircuito.

3) Términos de la matriz de transmisión

$A = [u_1/u_2]_{i_2=0}$: Función de transferencia de tensión con la salida en circuito abierto.

$B = [u_1/-i_2]_{u_2=0}$: Impedancia de transferencia, con la salida en cortocircuito.

$C = [i_1/u_2]_{i_2=0}$: Admitancia de transferencia con la entrada en circuito abierto.

$D = [i_1/-i_2]_{u_2=0}$: Función de transferencia de corriente con la salida en cortocircuito.

Debe señalarse que existen dos modelos más de cuadripolos que se añaden a los anteriores y que se utilizan fundamentalmente en el estudio de componentes activos como son los transistores. El primero de ellos relaciona la tensión de entrada y la corriente de salida con la corriente de entrada y la tensión de salida, respondiendo a la forma matricial siguiente:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [h] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (1.174)$$

en la que $[h]$ representa la **matriz de parámetros híbridos del cuadripolo**. La relación inversa a la anterior es de la forma:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad (1.175)$$

en la que $[g]$ representa la **matriz de parámetros híbridos inversos del cuadripolo** y que es inversa de la matriz $[h]$.

Los cuadripolos se pueden conectar en serie, en paralelo y también en cascada. Por su configuración interna se clasifican en cuadripolos en L, en π y en T, en celosía (en forma de X), en T puentada. Cada tipo tiene sus propiedades específicas y depende de que tengan o no simetría. Cuando se utilizan cuadripolos en cascada (es decir como si fueran eslabones de una cadena), y la señal que se propaga a través de ellos es de poca energía, como sucede en la técnica de las comunicaciones, es importante, de acuerdo con el teorema de máxima transferencia de potencia, explicado en el Ejemplo de Aplicación 1.18, que cada cuadripolo se acople o se adapte al que le precede y al que le sigue, para ello se incluyen conceptos de impedancias imagen y constante de propagación. De cualquier modo estos temas son específicos de otras áreas de ingeniería y se salen del contenido de esta obra.



Amplíe sus conocimientos

El girador y el memristor

1) El girador: es un cuadripolo postulado teóricamente por B. Tellegen en el año 1948. Se representa por el esquema simplificado mostrado en la Figura 1.111 y que se describe por las ecuaciones siguientes:

$$u_1 = -ri_2 \quad ; \quad u_2 = +ri_1 \quad (1)$$

Donde r se denomina resistencia de giro.

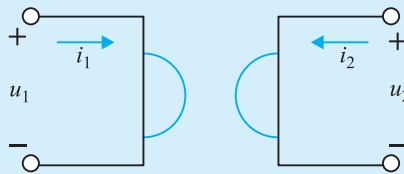


Figura 1.111 Símbolo del girador

Obsérvese que, de acuerdo con las ecuaciones anteriores, el girador no satisface el teorema de reciprocidad ya que se cumple:

$$\frac{u_2}{i_1} = +r \quad ; \quad \frac{u_1}{i_2} = -r \quad \Rightarrow \quad \frac{u_2}{i_1} \neq \frac{u_1}{i_2} \quad (2)$$

Sin embargo este cuadripolo tiene propiedades curiosas que se van a comentar. Si el girador de la Figura 1.111 se carga en su salida con una resistencia R_L , en los terminales de la entrada se obtiene:

$$u_1 = -ri_2 = -r \left(-\frac{u_2}{R_L} \right) = \frac{r}{R_L} ri_1 = \frac{r^2}{R_L} i_1 \quad (3)$$

es decir, la resistencia de carga R_L conectada a la salida se ve desde la entrada como una resistencia R_1 de valor:

$$R_1 = \frac{u_1}{i_1} = \frac{r^2}{R_L} = r^2 G_L \quad (4)$$

en la que G_L representa la conductancia de la carga, inversa de R_L . En definitiva (4) señala que la resistencia que se ve desde la entrada del girador es proporcional a la conductancia de la carga, o de otro modo,

la resistencia de la carga de salida se ve desde la entrada **girada**, porque se ha transformado en conductancia (de ahí procede la denominación de **girador**).

De una forma análoga ¿qué ocurrirá si se conecta a la salida del girador un condensador de capacidad C ?, ¿cómo se verá desde la entrada? En este caso, se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$u_1 = -ri_2 \quad ; \quad i_2 = -C \frac{du_2}{dt} \quad ; \quad u_2 = +ri_1 \quad (5)$$

es decir:

$$u_1 = -r \left(-C \frac{du_2}{dt} \right) = rC \frac{d}{dt} (ri_1) = (r^2C) \frac{di_1}{dt} \quad (6)$$

expresión que se puede escribir de este modo:

$$u_1 = L \frac{di_1}{dt} \quad , \quad \text{con } L = r^2C \quad (7)$$

lo que significa que un condensador conectado a la salida del girador se ve desde la entrada como si fuera una inductancia. ¡Es sorprendente! Este extraordinario resultado postulado teóricamente por Tellegen se hizo realidad cuando años más tarde se construyeron giradores empleando amplificadores operacionales. El gran caballo de batalla que representaban las inductancias en el diseño electrónico, debido a su elevado precio, peso y volumen y también a su comportamiento no lineal, quedaba resuelto. El girador ha cambiado la filosofía del diseño electrónico, permitiendo crear inductancias mediante condensadores. **¡Todo un hallazgo!**

2) El memristor: es una resistencia eléctrica con memoria y que fue postulada teóricamente en 1971 por Leon Ong Chua, catedrático de la Universidad de California, Berkeley, como el cuarto elemento fundamental pasivo (el elemento perdido) que debía encontrarse para completar la relación de los tres clásicos: resistencia, inductancia y capacidad. El memristor procede de la contracción de las palabras inglesas *memory resistor* (resistencia con memoria). En el año 2008, unos investigadores de la empresa americana Hewlett Packard (HP), especialistas en nanotecnología, dirigidos por Stanley Williams, anunciaron en la revista Nature, el primer memristor que se construyó en el mundo.

Chua dedujo la existencia de los memristores de las relaciones matemáticas entre los elementos de los circuitos. Las cuatro magnitudes básicas: carga, corriente, tensión y flujo magnético se pueden relacionar entre sí de seis formas distintas. Dos magnitudes están ligadas mediante leyes físicas y tres más se reflejan mediante las ecuaciones clásicas de los circuitos aplicadas a la resistencia, inductancia y capacidad respectivamente. Lo cual deja una relación para completar estas ecuaciones. Para comprender esta situación, en la Figura 1.112 se ha dibujado un gráfico que muestra las magnitudes y elementos básicos. Las cuatro magnitudes básicas son: $q(t)$, $u(t)$, $i(t)$ y $\Psi(t)$ y se representan dentro de sendos círculos. En los cuatro cuadrantes se colocan los diversos componentes pasivos y así en el primer cuadrante se sitúa el primer elemento descubierto en el año 1745, el condensador, en el que se cumple la siguiente ecuación diferencial básica que relaciona la carga $q(t)$ con el potencial eléctrico $u(t)$:

$$dq(t) = Cu(t) \quad (8)$$

En el segundo cuadrante se sitúa la resistencia eléctrica, descubierta en 1827, en la que se cumple la relación:

$$du(t) = Ri(t) \quad (9)$$

En el tercer cuadrante se encuentra la bobina o inductancia eléctrica, descubierta en 1831, que relaciona el flujo magnético con la corriente del siguiente modo:

$$d\Psi(t) = Ldi(t) \quad (10)$$

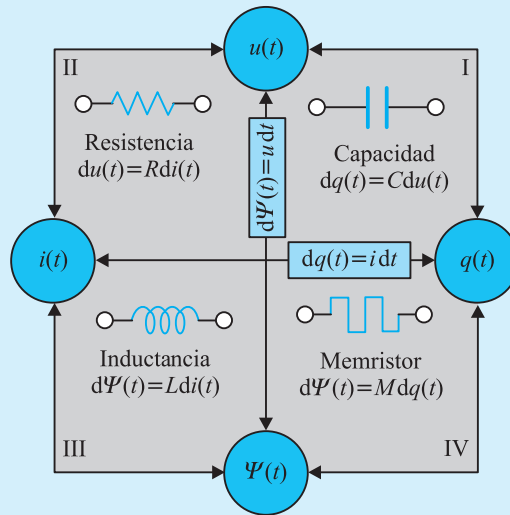


Figura 1.112 Magnitudes y elementos pasivos básicos con sus relaciones matemáticas

Debe destacarse que el flujo magnético concatenado por la bobina $\Psi(t)$ es una generalización de la característica del circuito de una inductancia. No representa aquí un flujo magnético, simplemente es la integral de la tensión $u(t)$.

De acuerdo con el esquema de la Figura 1.112, en el cuarto cuadrante se coloca el memristor que se define como un elemento de dos terminales en el que el flujo magnético $\Psi(t)$ (realmente la integral de la tensión eléctrica) entre sus bornes es una función de la cantidad de carga eléctrica $q(t)$ que pasa por el dispositivo. De acuerdo con ello, el memristor se caracteriza por una memristancia $M(q)$ que se define por el cociente:

$$M(q) = \frac{d\Psi(t)}{dq(t)} \quad (11)$$

Que se puede escribir de un modo equivalente del siguiente modo:

$$M(q) = \frac{\frac{d\Psi(t)}{dt}}{\frac{dq(t)}{dt}} = \frac{u(t)}{i(t)} \quad (12)$$

De la ecuación anterior se deduce que la memristancia es una resistencia (y por ello también se mide en ohmios), pero a diferencia de la resistencia clásica que ofrece siempre el mismo nivel de dificultad al paso de la corriente eléctrica, en el memristor no es así, ya que varía según sea la cantidad de electricidad que lo atraviesa.

Para conseguir lo anterior, los investigadores de HP construyeron un prototipo de memristor (a escala nanométrica) que esencialmente tiene la forma mostrada en la Figura 1.113. Consta de una película de óxido de titanio (TiO_2) de una longitud total D de unos 50 nm, colocada entre dos electrodos de platino de 5 nm de espesor; un lado de la película de TiO_2 está dopada de tal modo que tiene una escasez de oxígeno y que sigue la fórmula TiO_{2-x} donde x es del orden de 0,05, corresponde a la zona dopada de la izquierda del modelo de la Figura 1.113 y su anchura es w , la otra parte del TiO_2 tiene una anchura $D - w$.

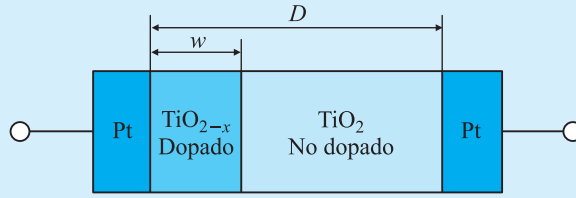


Figura 1.113 Composición interna de un memristor

La zona dopada de TiO_{2-x} tiene una baja resistencia debido a sus «vacancias» de oxígeno, mientras que la zona no dopada de TiO_2 tiene una alta resistencia. Cuando $w = D$, la resistencia del conjunto es R_{ON} y cuando $w = 0$ la resistencia del conjunto es R_{OFF} (siendo $R_{\text{ON}} \ll R_{\text{OFF}}$). Es evidente que la resistencia de este dispositivo $M(q)$ será la asociación en serie de las dos resistencias R_{dopada} y $R_{\text{no dopada}}$, cuyos valores serán proporcionales a sus anchuras relativas, dando lugar a una expresión de la forma:

$$M(q) = \frac{w}{D} R_{\text{ON}} + \left(1 - \frac{w}{D}\right) R_{\text{OFF}} \quad (13)$$

La ecuación anterior indica que $M(q)$ es función lineal de la anchura de la zona dopada w , lo que quiere decir que si se regula w se puede modificar el valor de la memristancia. Por otro lado se demuestra⁴ que la velocidad de cambio de la anchura w en función de la corriente es de la forma:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\mu_D R_{\text{ON}}}{D} i(t) \quad (14)$$

En la expresión anterior μ_D representa la movilidad de los portadores de carga. Al integrar la ecuación anterior y llevar el resultado a (13) y teniendo en cuenta que $R_{\text{ON}} \ll R_{\text{OFF}}$, se obtiene una expresión para la memristancia:

$$M(q) = R_{\text{OFF}} \left[1 - \frac{\mu_D R_{\text{ON}}}{D^2} q(t) \right] \quad (15)$$

Donde $q(t)$ es la carga total que atraviesa el memristor. La ecuación anterior demuestra que la memristancia es función de la carga que atraviesa el dispositivo, y de ahí su importancia, ya que el memristor puede memorizar la magnitud de la carga, conservando este valor durante largo tiempo. Es decir, el memristor solamente necesita energía para ajustar su resistencia, pero después conservará su valor durante largo tiempo sin ningún consumo eléctrico.

Es por ello que el memristor recordará la última tensión que se ha aplicado al mismo, y esta información se puede tomar como un dato a modo de ceros y unos en lógica binaria. De ahí que a los memristores se les augure un gran futuro como sustitutos de las memorias volátiles RAM que permiten el funcionamiento de un ordenador. Téngase en cuenta que la información que se almacena en las memorias RAM es temporal, lo que significa que se borra o desaparece cuando se apaga el equipo; es por esto, por lo que cada vez que se enciende el ordenador, el sistema se reinicia y hay que esperar un cierto tiempo para que las memorias RAM del ordenador carguen los datos del sistema operativo. Los memristores pueden dejar obsoletas las memorias flash o los discos duros, multiplicando por cien la densidad de almacenamiento y la velocidad del ordenador. También se están estudiando aplicaciones de los memristores en dispositivos de lógica programable, procesamiento de señal, redes neuronales y en sistemas de control. ¡Bienvenido el memristor porque puede tener un gran futuro!

⁴ Ver artículo «The missing memristor found» de Strukov, Snider, Stewart y Williams, *Nature*, 453, 80-83, mayo 2008.

1.18. El amplificador operacional

El amplificador operacional (AO) es un circuito electrónico integrado que encuentra muchas aplicaciones en la electrónica. En la Figura 1.114a se muestra la forma externa que tiene su encapsulado para el modelo comercial de ocho patillas. En la Figura 1.114b se muestran las principales conexiones internas.

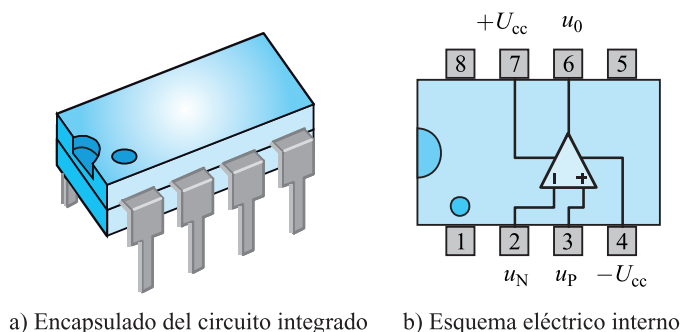


Figura 1.114 Encapsulado del amplificador operacional y circuito simplificado interno

El término amplificador operacional fue acuñado por el ingeniero americano John R. Ragazzini en 1947 y era en aquella época un circuito electrónico construido con válvulas de vacío que permitía realizar diferentes operaciones matemáticas, como: suma, resta, multiplicación, división, integración, etc. y de ahí el nombre de operacional. El dispositivo es una combinación compleja de transistores, resistencias, diodos y condensadores, fabricados en un chip de silicio. Sin embargo no es necesario conocer su estructura interna para comprender sus interesantes aplicaciones a los circuitos.

En la Figura 1.115a se muestra el símbolo del amplificador operacional, que tiene dos entradas, una positiva (+) denominada *entrada no inversora* y señalada por u_P y otra negativa (-) y denominada *entrada inversora* u_N . La salida u_0 sale del vértice del triángulo que simboliza el AO. Además tiene terminales para aplicar una tensión positiva $+U_{cc}$ y otra negativa $-U_{cc}$ para la alimentación de su circuito electrónico interno y dispone también de otras patillas complementarias para diversos ajustes.

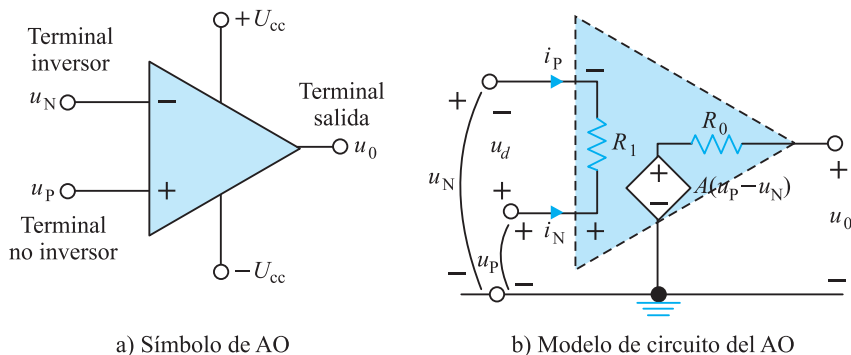


Figura 1.115 Símbolo del amplificador operacional y modelo de circuito

El circuito equivalente del amplificador operacional es el mostrado en la Figura 1.115b y está formado por una resistencia de entrada R_i , otra resistencia de salida R_o y por una fuente de tensión dependiente, de ganancia A (que es en definitiva el factor de amplificación). Las características típicas de un amplificador operacional son las siguientes: 1) alta resistencia de entrada R_i que es del orden de $10\text{ M}\Omega$, 2) baja resistencia de salida R_o y que oscila entre 10 y $100\ \Omega$, 3) una ganancia real extraordinariamente elevada y que varía entre 10^4 y 10^8 .

En la Figura 1.116 se muestra la denominada característica de transferencia o curva de respuesta del amplificador operacional.

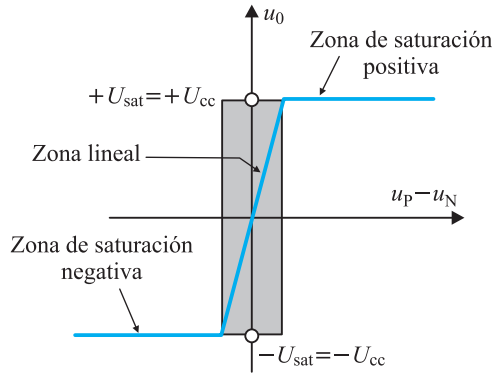


Figura 1.116 Respuesta del amplificador operacional

En la respuesta de la Figura 1.116 se distinguen tres regiones distintas, a saber: de saturación positiva, de saturación negativa y lineal. Las tensiones de saturación coinciden con los valores de las tensiones de alimentación del amplificador $\pm U_{cc}$. La pendiente en la zona lineal es la ganancia de tensión A del amplificador, y en esta zona lineal se cumple la siguiente relación:

$$u_0 = A(u_P - u_N) = Au_d = Au_d \quad (1.176)$$

La tensión u_d se denomina tensión diferencial y es la diferencia entre las tensiones aplicadas (respecto a masa) al terminal no inversor u_P y al inversor u_N . De acuerdo con la ecuación anterior, y al ser el factor A muy elevado (prácticamente infinito), cuando la diferencia $u_P - u_N$ es positiva, es decir se tiene: $u_P > u_N$ entonces la salida presenta un valor de saturación positivo: $+U_{sat}$ y que coincide con U_{cc} ; si la diferencia $u_P - u_N$ es negativa, es decir $u_N > u_P$, se obtiene una salida $-U_{sat}$ y que coincide con $-U_{cc}$.

En definitiva la tensión de salida está acotada en el rango siguiente:

$$-U_{cc} \leq u_0 \leq +U_{cc} \quad (1.177)$$

Por lo que de acuerdo con (1.176) se cumple:

$$-\frac{U_{cc}}{A} \leq A(u_P - u_N) \leq +\frac{U_{cc}}{A} \quad (1.178)$$

Teniendo en cuenta que un valor típico para U_{cc} es de 15 V , mientras que A es muy elevado y según se ha indicado del orden de 10^5 o mayor, es evidente que en el funcionamiento

lineal la diferencia de potencial $u_P - u_N$ es prácticamente nula, o lo que es lo mismo la tensión diferencial es cero, es decir $u_d = 0$. Otro aspecto a señalar es que la resistencia de entrada del AO es muy elevada y prácticamente infinita, lo que en definitiva significa que las corrientes i_P e i_N que penetran en el AO prácticamente son nulas. De este modo se puede concluir que las condiciones que impone un amplificador ideal son:

$$u_d = 0 \quad ; \quad i_P = i_N = 0 \quad (1.179)$$

Las implicaciones de estas ecuaciones se señalan en el modelo de circuito de la Figura 1.117.

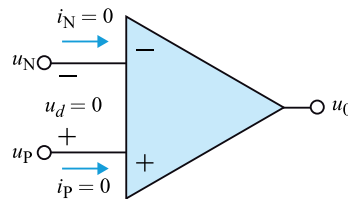


Figura 1.117 Características del AO ideal

En la práctica el amplificador operacional se utiliza siempre con una realimentación entre la salida y la entrada. Esta realimentación permite conseguir una serie de relaciones especiales entre las tensiones de salida y entrada, pudiendo obtener una variedad de circuitos como sumador, integrador, etc. En las aplicaciones que se ofrecen a continuación se considerará que el AO es ideal.

a) Amplificador inversor

En la Figura 1.118 se representa un circuito amplificador inversor realizado con un AO en el que se incluyen dos resistencias externas R_1 y R_f . En este circuito, la tensión de entrada (respecto a masa) u_i se aplica al terminal negativo del AO, a través de una resistencia serie R_1 . El terminal positivo se conecta a masa (tensión cero). La tensión de salida u_0 se realimenta al terminal negativo por medio de R_f .

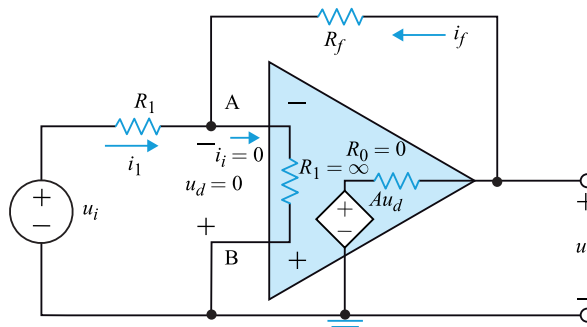


Figura 1.118 Amplificador inversor

De acuerdo con las condiciones ideales establecidas antes, el terminal B del AO en este circuito está a cero voltios y como $u_d = 0$, la tensión del nudo A (respecto a masa)

será también de cero voltios, es decir $u_A = 0$. Por otro lado al aplicar el primer lema de Kirchhoff en el nudo A se cumple:

$$i_1 + i_f = i_i \Rightarrow i_1 + i_f = 0 \quad (1.180)$$

donde se ha tenido en cuenta que la corriente de entrada del amplificador operacional es siempre cero, es decir $i_i = 0$. Al escribir las corrientes anteriores en función de las tensiones resulta:

$$i_1 = \frac{u_i - u_A}{R_1} = \frac{u_i}{R_1} \quad ; \quad i_f = \frac{u_0 - u_A}{R_f} = \frac{u_0}{R_f} \quad (1.181)$$

Y al sustituir estos resultados en (1.180) se obtiene:

$$\frac{u_i}{R_1} = -\frac{u_0}{R_f} \Rightarrow u_0 = -\frac{R_f}{R_1} u_i \quad (1.182)$$

Es decir la tensión de salida del AO es de signo contrario a la entrada (y de ahí el nombre de amplificador inversor) y con un factor de amplificación que es el cociente de las resistencias R_f/R_1 . Si este cociente es mayor que uno, la salida del amplificador será más elevada que la entrada y si es menor que uno, se reducirá la entrada.

b) Amplificador no inversor

El esquema correspondiente es el que se muestra en la Figura 1.119 donde, por simplicidad y como es habitual al estudiar los amplificadores operacionales, no se ha dibujado el esquema eléctrico interior. Se observa que la tensión de entrada se aplica ahora al terminal no inversor del AO y el terminal inversor se conecta a masa a través de la resistencia en serie R_1 .

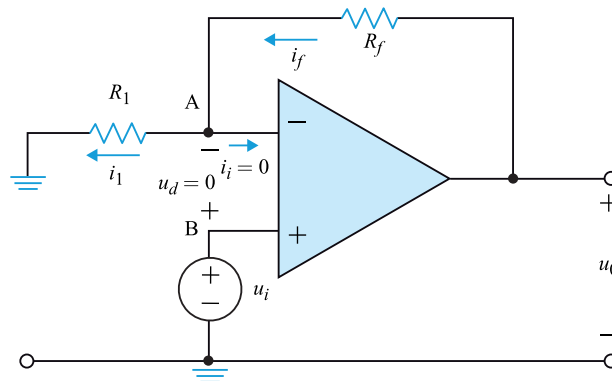


Figura 1.119 Amplificador no inversor

Al igual que en el caso anterior se dispone de una resistencia de realimentación entre la salida y la entrada de valor R_f . Se observa de inmediato que la tensión del nudo A (respecto de tierra) es igual a la del nudo B y por tanto igual a la tensión u_i y además la corriente i_f es igual a i_1 , y al poner estas corrientes en función de las tensiones se obtiene:

$$i_f = \frac{u_0 - u_A}{R_f} = \frac{u_0 - u_i}{R_f} = i_1 = \frac{u_i}{R_1} \quad (1.183)$$

y despejando u_0 resulta:

$$u_0 = \left(\frac{R_f}{R_1} + 1 \right) u_i \quad (1.184)$$

que demuestra que este circuito es un amplificador no inversor, ya que la tensión de salida tiene el mismo signo que la tensión de entrada con un factor de amplificación que es la cantidad encerrada en el paréntesis de (1.184).

c) Amplificador diferencial

El esquema correspondiente es el indicado en la Figura 1.120, donde se aplican dos tensiones a las entradas no inversora e inversora u_{i1} y u_{i2} respectivamente a través de unas resistencias R_1 y R_2 . En este circuito se cumple:

$$i_f = \frac{u_0 - u_A}{R_f} = i_1 = \frac{u_A - u_{i1}}{R_1} \quad ; \quad u_B = u_{i2} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (1.185)$$

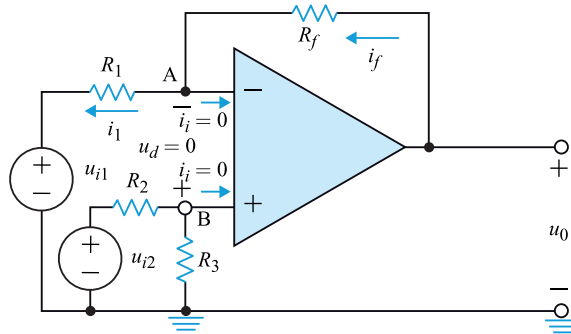


Figura 1.120 Amplificador diferencial

es decir:

$$\frac{u_0}{R_f} + \frac{u_{i1}}{R_1} = u_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} \right) \quad ; \quad u_B = u_{i2} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (1.186)$$

y como quiera que $u_d = 0 = u_A - u_B$, igualando $u_A = u_B$ en (1.186) resulta:

$$u_0 = \frac{R_3}{R_2} \frac{1 + \frac{R_f}{R_1}}{1 + \frac{R_3}{R_2}} u_{i2} - \frac{R_f}{R_1} u_{i1} \quad (1.187)$$

Es por ello que si se eligen las resistencias de tal forma que se cumpla $R_f/R_1 = R_3/R_2$, se obtiene:

$$u_0 = \frac{R_f}{R_1} (u_{i1} - u_{i2}) \quad (1.188)$$

lo que indica que la tensión salida es proporcional a la diferencia entre las entradas e incluso si se hacen iguales las resistencias $R_f = R_1$ entonces la salida es justamente la suma de las entradas y de ahí el nombre del circuito de *amplificador diferencial*.

d) Amplificador sumador

En algunas aplicaciones de la electrónica se deben añadir las señales producidas por varias fuentes (por ejemplo de diversos transductores de medida) para obtener una señal de salida que es proporcional a la suma de las señales de entrada o a una suma ponderada de las mismas. El circuito correspondiente para realizar esta misión es el que se muestra en la Figura 1.121, donde se han considerado tres señales de entrada. Teniendo en cuenta que la tensión en el nudo A (respecto de tierra) coincide con la del nudo B que además está unido a tierra, se cumple que $u_A = 0$, además como $i_i = 0$, en el nudo A se tiene:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_f = 0 \quad (1.189)$$

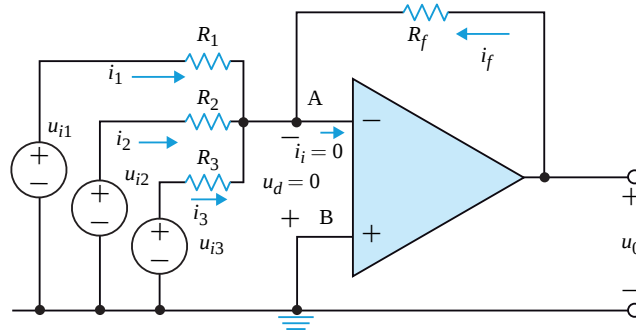


Figura 1.121 Amplificador sumador

Por lo que al expresar las corrientes en función de las tensiones resulta:

$$\frac{u_{i1}}{R_1} + \frac{u_{i2}}{R_2} + \frac{u_{i3}}{R_3} + \frac{u_0}{R_f} = 0 \quad (1.190)$$

que al despejar u_0 nos da:

$$u_0 = -R_f \left[\frac{u_{i1}}{R_1} + \frac{u_{i2}}{R_2} + \frac{u_{i3}}{R_3} \right] = - \left[\frac{R_f}{R_1} u_{i1} + \frac{R_f}{R_2} u_{i2} + \frac{R_f}{R_3} u_{i3} \right] \quad (1.191)$$

Es decir la tensión de salida es una suma ponderada de las tensiones de entrada. En el caso particular en que se cumpla $R_1 = R_2 = R_3 = R_f$, entonces (1.191) se convierte en:

$$u_0 = -(u_{i1} + u_{i2} + u_{i3}) \quad (1.192)$$

Es decir la tensión de salida es igual a la suma de las tensiones de entrada cambiada de signo. El circuito de la Figura 1.119 se puede modificar para conseguir un amplificador sumador-restador, con tal de incluir entradas en el terminal positivo del AO.

e) Amplificador integrador

El amplificador integrador utiliza un circuito análogo al amplificador inversor de la Figura 1.118 en el que se sustituye la resistencia R_f de realimentación por un condensador C . En la Figura 1.122 se muestra el circuito correspondiente. De este esquema se deduce inmediatamente que la tensión del nudo A (respecto de tierra) es nula, ya que el terminal B esta

unido a tierra y ambas tensiones coinciden al cumplirse que $u_d = 0$. Además en el nudo A se cumple:

$$i_1 + i_f = 0 \Rightarrow \frac{u_i}{R} + i_f = 0 \quad (1.193)$$

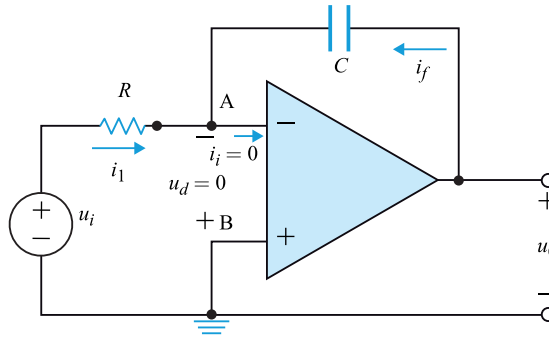


Figura 1.122 Amplificador integrador

y teniendo en cuenta que $C = \frac{q}{u}$, se obtiene:

$$u_0(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i_f dt = \frac{-1}{CR} \int_0^t u_i dt + u_0(0) \quad (1.194)$$

donde $u_0(0)$ es el valor de la salida en $t = 0$, que depende del valor de la carga inicial almacenada en el condensador. La ecuación (1.194) indica que la tensión de salida es proporcional a la integral de la entrada (y de ahí su nombre) con un factor de proporcionalidad de valor $-1/RC$, las dimensiones del producto RC es de segundos y se denomina constante de tiempo.

El circuito descrito se denomina integrador de precisión debido al alto grado de exactitud con el que se implementa (1.194). Se utiliza para construir generadores de funciones tipo triangular y diente de sierra, en filtros activos, en convertidores analógico-digitales y en sistemas de control analógicos.

1.19. Bobinas con acoplamiento magnético

En el Epígrafe 1.7.2 se estudió el efecto de la inductancia, en la que una corriente variable que recorría una bobina producía un cambio de flujo magnético, lo que a su vez provocaba una tensión inducida en la bobina. Recordemos que el coeficiente de autoinducción de una bobina (y para un circuito lineal) se definía por la relación:

$$L = \frac{\Psi(t)}{i(t)} = N \frac{\Phi(t)}{i(t)} \quad (1.195)$$

Donde N es el número de espiras de la bobina, $\Psi(t)$ el flujo concatenado total por la misma y $\Phi(t)$ el flujo magnético que atraviesa una de sus espiras.

Además la relación de la tensión $u(t)$ con el flujo $\Phi(t)$ y la corriente $i(t)$ es de la forma:

$$u(t) = N \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (1.196)$$

1.19.1. Análisis de los flujos magnéticos en bobinas acopladas

Vamos a extender el estudio de una bobina única al caso en que existen más bobinas (por ejemplo dos) en el circuito, y que tienen flujos comunes, es decir que interactúan entre sí. Se dice entonces que las dos bobinas tienen acoplamiento magnético. En este caso se generan tensiones inducidas no solamente por los flujos magnéticos de la propias bobinas, sino también por el flujo producido por una bobina que llega a la otra. Consideremos para nuestro estudio el esquema de la Figura 1.123, en el que se tienen dos bobinas ideales (sin resistencia) con acoplamiento magnético. Si se aplican tensiones externas $u_1(t)$ y $u_2(t)$ a cada una de las bobinas aparecerán unas corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en las mismas. Si se supone que el núcleo magnético es lineal, se producen unos flujos proporcionales a las corrientes que cumplen el teorema de superposición.

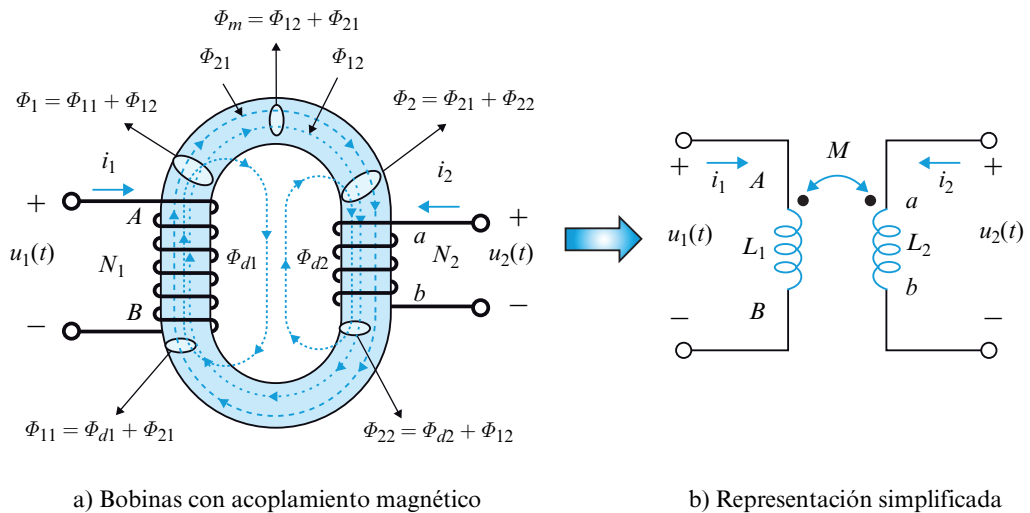


Figura 1.123 Flujos concatenados por dos bobinas con flujos del mismo sentido

Los flujos señalados en la Figura 1.123a se pueden clasificar en cuatro grupos, a saber:

a) Flujos magnéticos propios y mutuos: son los flujos Φ_{11} , Φ_{12} , Φ_{21} y Φ_{22} , que tienen dos subíndices numéricos, el primer dígito indica el número de la bobina que *recibe* el flujo y el segundo, el número de la bobina que *produce* ese flujo. Ejemplo: el flujo Φ_{11} es el flujo que produce la bobina 1 debido a la corriente de la propia bobina 1; el flujo Φ_{12} es el flujo que recibe la bobina 1 y que procede de parte del flujo debido a la corriente de la bobina 2, etc.).

b) Flujos magnéticos de dispersión: son los flujos Φ_{d1} y Φ_{d2} que *solamente* atraviesan la bobina indicada en el dígito que se incluye en el subíndice, y su nombre se debe a que el

flujo se dispersa por el aire sin llegar a la otra bobina. Ejemplo Φ_{d1} (o Φ_{d2}) es el flujo de dispersión de la bobina 1 (o 2) que se cierra por la zona del aire de esta bobina sin llegar a atravesar a la otra.

c) Flujo mutuo o común: es el flujo común Φ_m que atraviesa ambas bobinas y que es igual a la suma de Φ_{12} y Φ_{21} , es decir:

$$\Phi_m = \Phi_{12} + \Phi_{21} \quad (1.197)$$

d) Flujos totales: son los flujos magnéticos totales Φ_1 y Φ_2 que atraviesan las bobinas 1 y 2 respectivamente, y que se deben tanto a los flujos que producen sus propias corrientes, como al flujo que les llega de la bobina contraria.

De la definición de estos flujos se pueden escribir diversas relaciones y que para mayor claridad didáctica se muestran en la Figura 1.123a, a saber:

- 1) El flujo Φ_{11} establecido en la bobina 1 debido solamente a su propia corriente i_1 . Este flujo consta de dos componentes: a) el flujo de dispersión Φ_{d1} que enlaza solamente las espiras de la bobina 1 y b) el flujo Φ_{21} que llega a la bobina 2 pero que procede de la bobina 1 y así se cumple:

$$\Phi_{11} = \Phi_{d1} + \Phi_{21} \quad (1.198)$$

- 2) El flujo Φ_{22} establecido en la bobina 2 debido solamente a su propia corriente i_2 . Este flujo consta de dos componentes: a) el flujo de dispersión Φ_{d2} que enlaza solamente las espiras de la bobina 2 y b) el flujo Φ_{12} que atraviesa la bobina 1 pero que procede de la bobina 2, es decir:

$$\Phi_{22} = \Phi_{d2} + \Phi_{12} \quad (1.199)$$

- 3) Si se tienen en cuenta los sentidos de las corrientes mostradas en la Figura 1.123, y el sentido de los arrollamientos, comprobamos que los flujos producidos son concordantes y siguen el sentido que se indica. Para demostrarlo solamente se necesita aplicar la ley de Ampère. De acuerdo con ella, si se toma la bobina con la mano derecha, de tal modo que los dedos sigan el sentido de la corriente, el dedo pulgar señalará el sentido del campo magnético producido por esa bobina, y de ahí los sentidos de los flujos mostrados en la Figura 1.123, que conviene que razone el lector.

De este modo los *flujos totales* que llegan a las bobinas son respectivamente:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12} \\ \Phi_2 &= \Phi_{21} + \Phi_{22} \end{aligned} \quad (1.200)$$

por consiguiente y de acuerdo con (1.196), las tensiones aplicadas se relacionarán con los flujos de acuerdo con las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} u_1 &= N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \\ u_2 &= N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} + N_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} \end{aligned} \quad (1.201)$$

Se definen ahora los siguientes coeficientes de inductancia que se utilizarán después:

1) Coeficiente de autoinducción de la bobina 1: denominado L_{11} o simplemente L_1 , y que es la relación entre el flujo magnético concatenado por la bobina 1 debido a su propia corriente y el valor de esta i_1 , es decir:

$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = N_1 \frac{\Phi_{11}}{i_1} \quad [\text{H}] \quad (1.202)$$

2) Coeficiente de inducción mutua entre la bobina 1 y la bobina 2: denominado L_{12} , y que es la relación entre el flujo magnético que recibe la bobina 1 debido a la corriente que circula por la bobina 2, y el valor de esta corriente i_2 . Su expresión es:

$$L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = N_1 \frac{\Phi_{12}}{i_2} \quad [\text{H}] \quad (1.203)$$

3) Coeficiente de inducción mutua entre la bobina 2 y la bobina 1: denominado L_{21} , y que es la relación entre el flujo magnético que recibe la bobina 2 debido a la corriente que circula por la bobina 1, y el valor de esta corriente i_1 . Su expresión es:

$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = N_2 \frac{\Phi_{21}}{i_1} \quad [\text{H}] \quad (1.204)$$

4) Coeficiente de autoinducción de la bobina 2: denominado L_{22} o simplemente L_2 , y que es la relación entre el flujo magnético concatenado por la bobina 2 debido a su propia corriente y el valor de esta i_2 , es decir:

$$L_{22} = \frac{\Psi_{22}}{i_2} = N_2 \frac{\Phi_{22}}{i_2} \quad [\text{H}] \quad (1.205)$$

Todas estas inductancias se miden lógicamente en *henrios*. De acuerdo con las definiciones anteriores (1.202) a (1.205), las ecuaciones (1.201) que relacionan las tensiones con los flujos se pueden transformar en ecuaciones entre tensiones y corrientes, que son más útiles en la teoría de circuitos y que son:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (1.206)$$

En el caso de que el medio sea lineal, los coeficientes L_{12} y L_{21} son iguales entre sí y se representan por la letra común M , por lo que las ecuaciones (1.206) admiten la escritura siguiente:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (1.207)$$

Se denomina *coeficiente de acoplamiento* de ambas bobinas al cociente:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (1.208)$$

En general k es menor que la unidad. Cuando $k = 1$ todos los flujos enlazan ambas bobinas y se dice que estas tienen un acoplamiento perfecto. Los términos $L_1 \frac{di_1}{dt}$ y $L_2 \frac{di_2}{dt}$ de las ecuaciones (1.207) son las tensiones debidas a los efectos de la autoinducción, mientras que $M \frac{di_1}{dt}$ y $M \frac{di_2}{dt}$ representan las tensiones debidas a la inducción mutua.

Según se observa en las ecuaciones (1.206) ambas tensiones se suman, puesto que los flujos magnéticos en este caso son concordantes, como ya se ha comentado. En la práctica, para evitar el dibujo de los sentidos de los arrollamientos que son quienes en definitiva determinan el sentido de las tensiones inducidas por efecto de la inducción mutua, se acostumbra a *señalar con un punto los terminales de las bobinas por los que hay que introducir corrientes para que den flujos del mismo sentido*. De este modo una corriente que entre por el terminal con punto (sin punto) de la bobina 1, inducirá una tensión $M \frac{di_1}{dt}$ con polaridad positiva en el terminal señalado con un punto (sin punto) de la bobina 2. Al mismo tiempo una corriente que entre por el terminal con punto (sin punto) de la bobina 2, inducirá una tensión $M \frac{di_2}{dt}$ con polaridad positiva en el terminal señalado con un punto (sin punto) de la bobina 1. Los terminales con punto (sin punto) se denominan bornes *homólogos*. En el caso de la Figura 1.123a, el esquema de las bobinas con el convenio de punto es el mostrado en la Figura 1.123b, en el que se dibujan las dos bobinas, señalando con un punto los terminales superiores (porque son los bornes por los que se deben introducir corrientes para que den flujos concordantes), también se indican los valores de los coeficientes de autoinducción de cada bobina L_1 y L_2 , y de inducción mutua M . Las ecuaciones que relacionan las tensiones con las corrientes en este circuito son las ya expresadas en (1.207).

Para comprender mejor este convenio, considérese el circuito con acoplamiento magnético de la Figura 1.124a, que tiene una bobina 1, con N_1 espiras arrolladas en el mismo sentido que la bobina 1 de la Figura 1.123 y con una bobina 2, de N_2 espiras pero arrolladas ahora en sentido contrario al de la Figura 1.123.

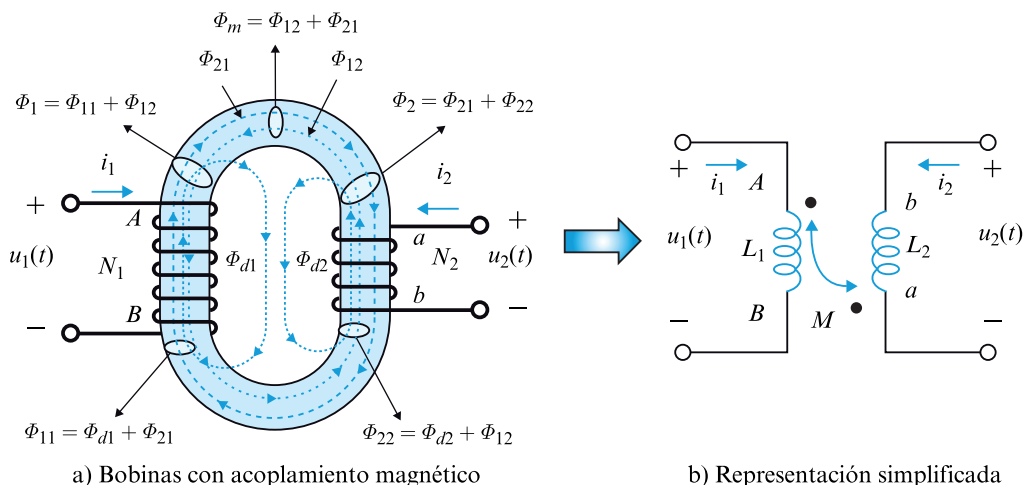


Figura 1.124 Flujos concatenados por dos bobinas con flujos opuestos

Se observa que, para que las bobinas den flujos concordantes en el sentido de las agujas del reloj, habría que introducir corriente por el terminal A de la bobina 1 y por el terminal b de la bobina 2. Sin embargo, como quiera que en el esquema de la Figura 1.124a, la corriente que circula por la bobina 2 entra realmente por el terminal a, los sentidos de los flujos magnéticos son los señalados en esta figura, en la que se observa que el flujo magnético Φ_{22} y sus componentes Φ_{d2} y Φ_{12} tienen sentidos contrarios a los correspondientes de la Figura 1.123a.

En el esquema de la Figura 1.124b se han señalado con un punto estos terminales homólogos, y en consecuencia las relaciones $u-i$ en cada bobina con las corrientes reales mostradas serán similares a las (1.207) pero con los términos correspondientes a las tensiones inducidas mutuas con signo negativo, lo que da lugar al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (1.209)$$

nótese que las tensiones inducidas debidas al acoplamiento mutuo tienen signo negativo, ya que las corrientes reales i_1 e i_2 producen flujos que tienden a contrarrestarse mutuamente.

Las ecuaciones (1.207) y (1.209) son las ecuaciones de las bobinas con acoplamiento magnético, en ambos casos para flujos concordantes o no, es decir para acoplamiento positivo o negativo respectivamente.

Las distribuciones anteriores de flujos magnéticos se utilizan generalmente en teoría de circuitos eléctricos cuando las bobinas van al aire o están arrolladas en un núcleo no ferromagnético. En estos casos el factor de acoplamiento señalado en (1.208) suele ser muy bajo, normalmente inferior a 0,3. Sin embargo cuando las bobinas se colocan en un núcleo ferromagnético, el acoplamiento es elevado y suele ser superior a 0,95. Esta es la situación que se produce en los transformadores usados en las instalaciones eléctricas, en los que la bobina o devanado 1 se denomina *primario* y la bobina o devanado 2 se denomina *secundario*. Para que el estudio de estas aplicaciones se facilite enormemente se usan unas ecuaciones de flujo distintas a las señaladas en (1.200) y que suponiendo flujos concordantes y teniendo en cuenta las ecuaciones (1.197), (1.198) y (1.199) son de la forma:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12} = (\Phi_{d1} + \Phi_{21}) + \Phi_{12} = \Phi_{d1} + (\Phi_{21} + \Phi_{12}) = \Phi_{d1} + \Phi_m \\ \Phi_2 &= \Phi_{21} + \Phi_{22} = \Phi_{21} + (\Phi_{d2} + \Phi_{12}) = \Phi_{d2} + (\Phi_{21} + \Phi_{12}) = \Phi_{d2} + \Phi_m \end{aligned} \quad (1.210)$$

En las ecuaciones anteriores Φ_{d1} y Φ_{d2} representan respectivamente los *flujos de dispersión* de las bobinas 1 y 2. Al flujo $\Phi_m = \Phi_{12} + \Phi_{21}$ se le denomina *flujo mutuo o común*. De acuerdo con (1.210), las ecuaciones (1.201) se transforman ahora en:

$$\begin{aligned} u_1 &= N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{d1}}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_m}{dt} \\ u_2 &= N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{d2}}{dt} + N_2 \frac{d\Phi_m}{dt} \end{aligned} \quad (1.211)$$

y de un modo similar a las definiciones (1.202) a (1.205), si se denominan inductancias de dispersión de primario L_{d1} y secundario L_{d2} respectivamente, a las expresiones siguientes:

$$L_{d1} = N_1 \frac{\Phi_{d1}}{i_1} \quad ; \quad L_{d2} = N_2 \frac{\Phi_{d2}}{i_2} \quad (1.212)$$

las ecuaciones (1.211) se transforman en:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_{d1} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_m}{dt} \\ u_2 &= L_{d2} \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\Phi_m}{dt} \end{aligned} \quad (1.213)$$

que son ecuaciones más adecuadas para el análisis de los transformadores de potencia que se estudian en los cursos de máquinas eléctricas. Los segundos sumandos de estas expresiones representan, respectivamente, las tensiones inducidas en los devanados primario y secundario debidas al flujo común.

■ 1.19.2. Energía magnética almacenada con bobinas acopladas

Recordemos del Epígrafe 1.5.2 que la energía magnética almacenada en una bobina en el tiempo t es:

$$w(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (1.214)$$

Vamos a calcular ahora la energía almacenada en un par de bobinas acopladas magnéticamente, como las mostradas en las Figuras 1.123 y 1.124, que tienen unos coeficientes de autoinducción L_1 y L_2 respectivamente y un coeficiente de inducción mutua $L_{12} = L_{21} = M$. Si se considera en concreto el esquema de la Figura 1.123 (con flujos concordantes), es evidente que la energía almacenada será la suma de las energías que se suministran a cada bobina. Teniendo en cuenta las relaciones entre tensiones y corrientes señaladas en las ecuaciones (1.207), las potencias instantáneas que reciben las bobinas son respectivamente:

$$\begin{aligned} p_1 &= u_1 i_1 = \left[L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right] i_1 \\ p_2 &= u_2 i_2 = \left[M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right] i_2 \end{aligned} \quad (1.215)$$

Y por consiguiente la potencia eléctrica total será la suma de los valores anteriores:

$$p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = \left[L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right] i_1 + \left[L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \right] i_2 \quad (1.216)$$

Si se supone que en $t=0$ la energía inicial es cero, lo que significa que $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$, la energía recibida de la alimentación para cualquier tiempo $t > 0$ será la integral de $p(t)$, es decir:

$$w(t) = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t \left[L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \right] dt \quad (1.217)$$

Lo que da lugar a la siguiente expresión final:

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t) \quad (1.218)$$

Que representan por este orden: la energía almacenada en la bobina 1, más la energía almacenada en la bobina 2, más un término adicional que se debe al acoplamiento magnético mutuo entre ambas bobina. Está claro que los dos primeros términos son positivos, sin embargo el último término puede ser positivo o negativo, dependiendo de que la inductancia mutua sea positiva o negativa; de hecho para el esquema de la Figura 1.124 el último sumando de (1.217) sería negativo, lo cual se debe a que los términos de tensión inducida mutua son negativos, tal como se señalaba en las ecuaciones (1.209). Lógicamente la suma total (1.218) debe ser positiva, porque en caso contrario dos bobinas acopladas magnéticamente entregarían energía al circuito externo (¡se habría descubierto el móvil perpetuo!).

La condición de que la energía tiene que ser positiva, (en realidad debe ser mayor o igual que cero), nos va a permitir acotar el valor del factor de acoplamiento definido en (1.208). Consideremos en primer lugar que $i_2(t) = 0$, y que $w(t) \geq 0$, entonces de acuerdo con la ecuación (1.218) la inductancia L_1 debe ser positiva, es decir $L_1 > 0$. A continuación si $i_1(t) = 0$, y teniendo en cuenta que $w(t) \geq 0$, entonces de acuerdo con la ecuación (1.218) la inductancia L_2 debe ser positiva, es decir $L_2 > 0$. Finalmente si tanto $i_1(t)$ como $i_2(t)$ son distintos de cero, entonces al dividir la expresión (1.218) por $i_2^2(t)$ se obtiene:

$$\frac{w(t)}{i_2^2(t)} = \frac{1}{2} L_1 \frac{i_1^2(t)}{i_2^2(t)} + \frac{1}{2} L_2 + M \frac{i_1(t)}{i_2(t)} \quad (1.219)$$

Y denominando $x = i_1(t)/i_2(t)$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{w(t)}{i_2^2(t)} = f(x) = \frac{1}{2} L_1 x^2 + \frac{1}{2} L_2 + Mx \geq 0 \quad (1.220)$$

El valor mínimo de la función $f(x)$ se tiene cuando:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = L_1 x + M = 0 \quad (1.221)$$

Es decir cuando $x_{\min} = -M/L_1$ (y es un mínimo porque la segunda derivada es negativa como puede comprobarse fácilmente). Sustituyendo el valor anterior en (1.220) se obtiene:

$$f(x_{\min}) = \frac{1}{2} L_1 \frac{M^2}{L_1^2} + \frac{1}{2} L_2 - \frac{M^2}{L_1} = \frac{1}{2} \left[-\frac{M^2}{L_1} + L_2 \right] \geq 0 \quad (1.222)$$

De donde se deduce que:

$$L_1 L_2 \geq M^2 \Rightarrow k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1 \quad (1.223)$$

La desigualdad anterior significa que el factor de acoplamiento k puede variar entre 0 y 1. Si $M = 0$, entonces $k = 0$ y no existe acoplamiento magnético entre las bobinas. Por el contrario la condición $k = 1$ indica un acoplamiento perfecto, en el que todo el flujo producido por una bobina llega a la otra. Es una condición ideal, pero en el caso de los transformadores de potencia, y como ya se ha señalado antes, se pueden conseguir factores de acoplamiento de 0,99. ¡Ciertamente el transformador es la mejor máquina que ha construido el hombre!



Problemas

- 1.1.** Calcular las resistencias entre los terminales A y B de los circuitos de la Figura P.1.1.

[Res. **a)** $6,75 \Omega$; **b)** 1Ω]

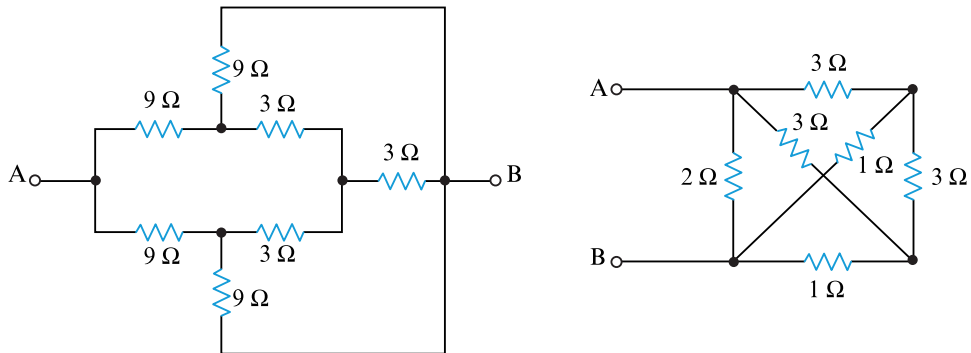


Figura P.1.1

- 1.2.** Determinar las resistencias equivalentes entre los terminales A y B de los circuitos de la Figura P.1.2, donde todos los valores se dan en ohmios. La Figura P.1.2 de la derecha representa un cubo en el que todas las aristas son resistencias de 1Ω .

[Res. **a)** $\frac{20}{3} \Omega$; **b)** $\frac{5}{6} \Omega$]

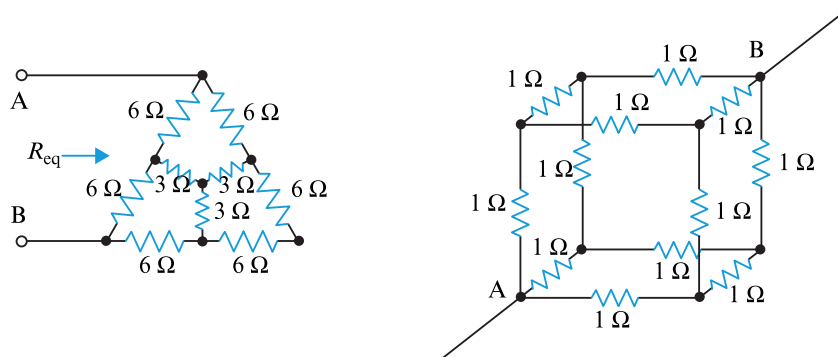


Figura P.1.2

- 1.3.** Calcular la corriente suministrada por el generador de 10 V del circuito de la Figura P.1.3, reduciendo previamente la red pasiva.

[Res. 4 A]

- 1.4. En la red de la Figura P.1.4 calcular los valores de la tensión u y la corriente i , por técnicas de reducción de la red.

[Res. $i = 8 \text{ A}$; $u = 112 \text{ V}$]

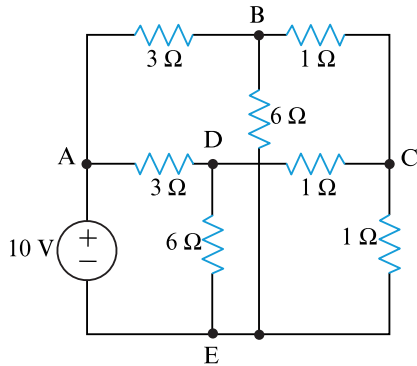


Figura P.1.3

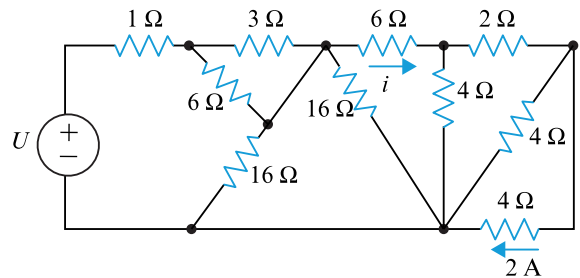


Figura P.1.4

- 1.5. Calcular la potencia consumida en la resistencia de 3Ω del circuito de la Figura P.1.5 reduciendo previamente la red.

[Res. 3 W]

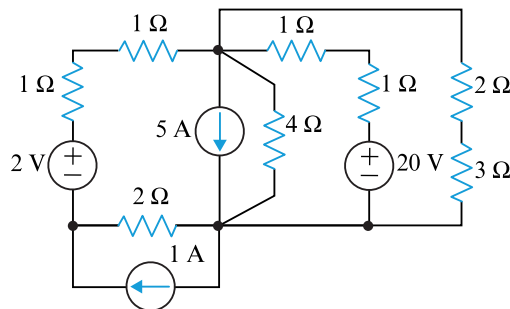


Figura P.1.5

- 1.6. Calcular la d.d.p. entre los nudos M y N de la red de la Figura P.1.6.

[Res. $U_{MN} = 2 \text{ V}$]

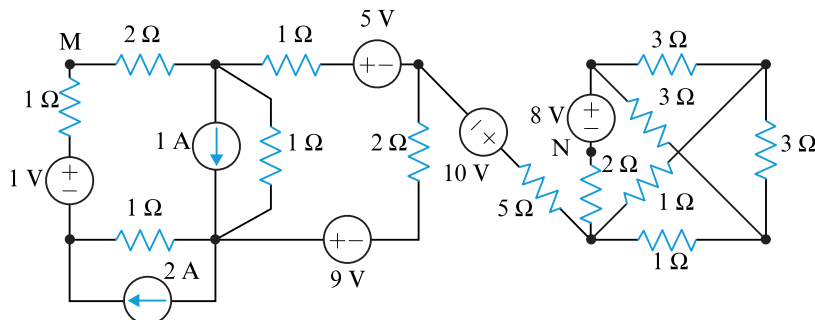


Figura P.1.6

- 1.7. En el circuito de la Figura P.1.7, calcular las corrientes i_1 e i_2 , simplificando previamente la red.

[Res. $i_1 = 9 \text{ A}$; $i_2 = 1 \text{ A}$]

- 1.8. Calcular la d.d.p. entre los nudos A y B del circuito de la Figura P.1.8, por el método de las mallas.

[Res. $-3,18 \text{ V}$]

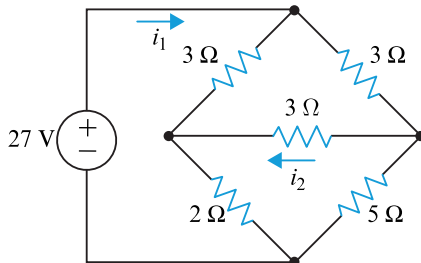


Figura P.1.7

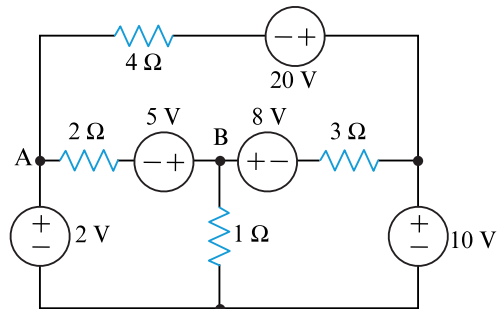


Figura P.1.8

- 1.9. Calcular la potencia absorbida por la resistencia de 3Ω del circuito de la Figura P.1.9 por el método de las mallas.

[Res. 27 W]

- 1.10. Calcular el valor de la resistencia R del circuito mostrado en la Figura P.1.10 para que la corriente i sea cero (Nota: Aplicar el método de las mallas).

[Res. $1,923 \Omega$]

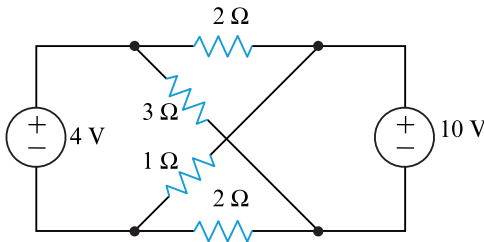


Figura P.1.9

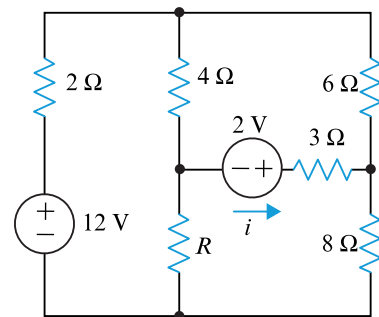


Figura P.1.10

- 1.11. Calcular la intensidad i del circuito de la Figura P.1.11 por el método de las mallas.

[Res. $0,577 \text{ A}$]

- 1.12. Calcular por el método de las mallas la d.d.p. en bornes del generador de corriente de la Figura P.1.12.

[Res. 9 V]

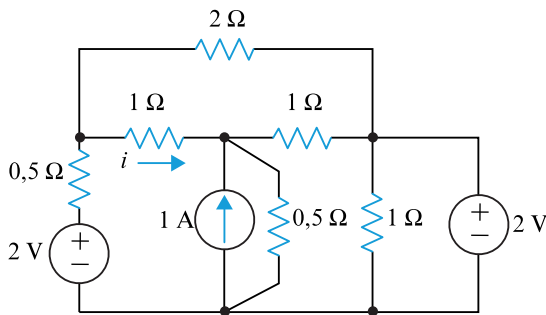


Figura P.1.11

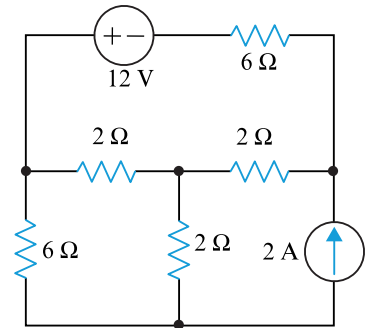


Figura P.1.12

- 1.13.** En el circuito de la Figura P.1.13, calcular a) la d.d.p. entre los nudos A y D; b) ¿qué potencia suministra el generador de corriente al circuito?

[Res. a) $U_{AD} = -4 \text{ V}$; b) $P = -3 \text{ W}$]

- 1.14.** Calcular la d.d.p. en bornes del generador de corriente de la Figura P.1.14.

[Res. 15 V]

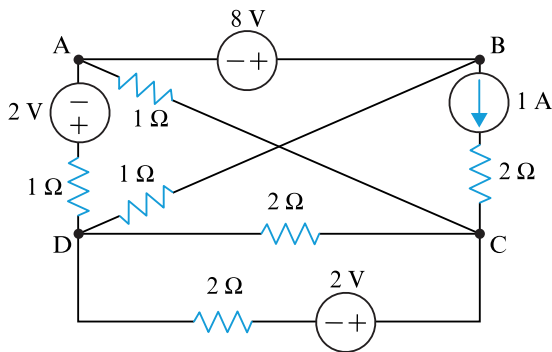


Figura P.1.13

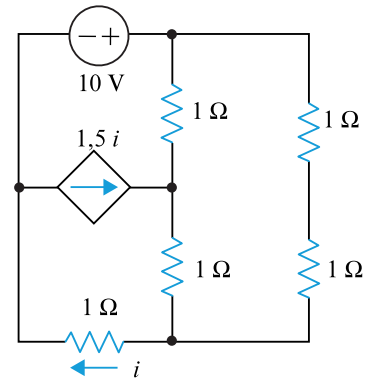


Figura P.1.14

- 1.15.** Calcular la d.d.p. en bornes del generador de corriente del circuito de la Figura P.1.15 por el método de los nudos.

[Res. $U_{AB} = 1,5 \text{ V}$]

- 1.16.** Calcular la d.d.p. entre los nudos A y B del circuito de la Figura P.1.16 por el método de los nudos.

[Res. $U_{AB} = 0,806 \text{ V}$]

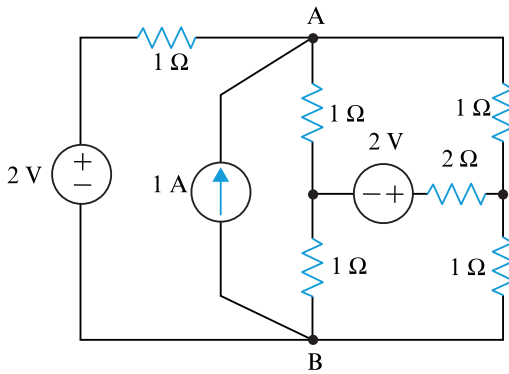


Figura P.1.15

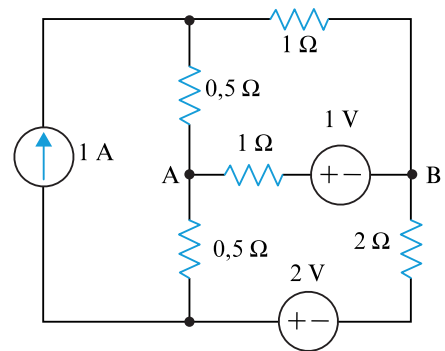


Figura P.1.16

- 1.17.** Calcular por el método de los nudos la potencia suministrada por el generador de corriente del circuito de la Figura P.1.17.

[Res. $P = 48 \text{ W}$]

- 1.18.** En el circuito de la Figura P.1.18, determinar las potencias eléctricas suministradas por los generadores de tensión y de corriente, por el método de los nudos.

[Res. $P(12 \text{ V}) = -36 \text{ W}$; $P(22 \text{ V}) = 110 \text{ W}$; $P(1 \text{ A}) = -12 \text{ W}$]

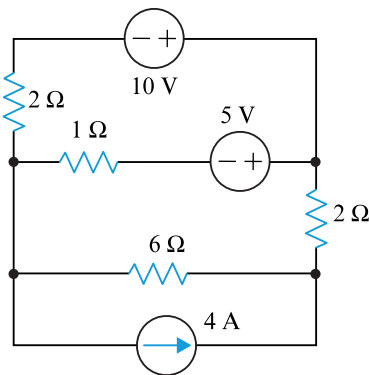


Figura P.1.17

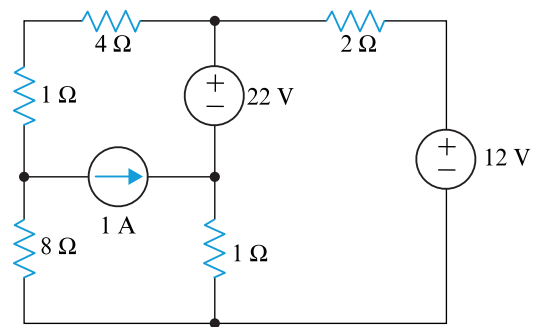


Figura P.1.18

- 1.19.** En el circuito de la Figura P.1.19, la potencia suministrada por el generador de tensión es nula. Calcular: a) corriente I_s ; b) d.d.p. U_{AC} .

[Res. a) $I_s = 3 \text{ A}$; b) $U_{AC} = -1 \text{ V}$]

- 1.20.** En el circuito de la Figura P.1.20, calcular las potencias eléctricas suministradas por cada uno de los generadores al circuito.

[Res. $P(3 \text{ A}) = 9 \text{ W}$; $P(1 \text{ A}) = 0,5 \text{ W}$; $P(1 \text{ V}) = 0,5 \text{ W}$]

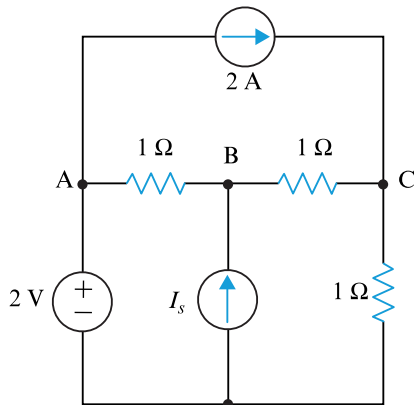


Figura P.1.19

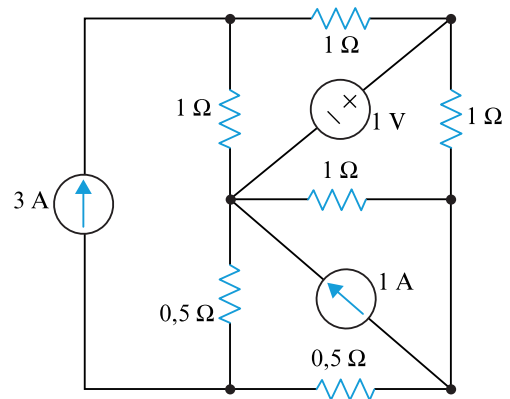


Figura P.1.20

- 1.21.** En el circuito de la Figura P.1.21, calcular: a) potencia disipada en R_1 ; b) potencia suministrada por el generador de tensión U_{s2} al circuito.

[Res. a) $P(R_1) = 0 \text{ W}$; b) $P(U_{s2}) = 40 \text{ W}$]

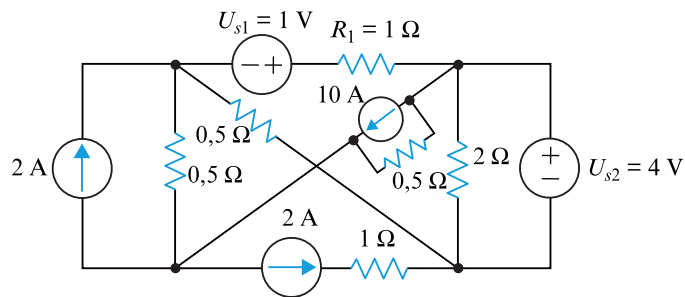


Figura P.1.21

- 1.22.** En el circuito de la Figura P.1.22, calcular: a) potencia entregada por el generador de corriente de 2 A; b) potencia disipada en la resistencia de 3 Ω.

[Res. a) $P(2 \text{ A}) = 36 \text{ W}$; b) $P(3 \Omega) = 12 \text{ W}$]

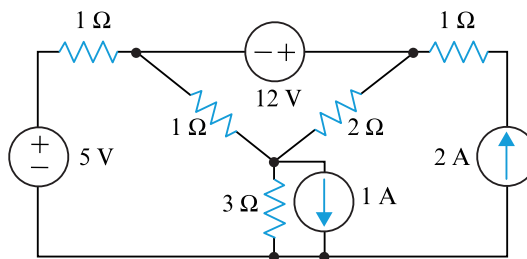


Figura P.1.22

- 1.23.** En el circuito de la Figura P.1.23, calcular: a) potencias suministradas por los generadores al circuito; b) potencias disipadas en las resistencias. Comprobar que se cumple el balance de potencias en el circuito, es decir $\sum P_{\text{gen}} = \sum P_{\text{disip}}$.

[Res. a) $P(5 \text{ V}) = 10 \text{ W}$; $P(3,5 \text{ A}) = 31,5 \text{ W}$; $P(1 \text{ A}) = 4 \text{ W}$; b) $P(1 \Omega) = 9 \text{ W}$; $P(2 \Omega) = 2 \text{ W}$; $P(3 \Omega) = 12 \text{ W}$; $P(4 \Omega) = 4 \text{ W}$; $P(5 \Omega) = 5 \text{ W}$; $P(6 \Omega) = 13,5 \text{ W}$. $\sum P_{\text{gen}} = 10 + 31,5 + 4 = 45,5 \text{ W}$; $\sum P_{\text{disip}} = 9 + 2 + 12 + 4 + 5 + 13,5 = 45,5 \text{ W}$]

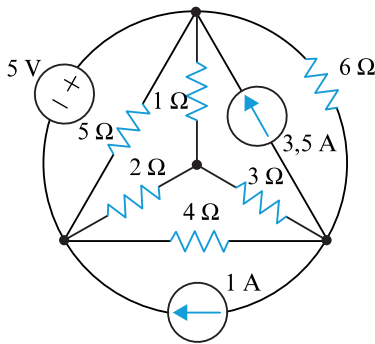


Figura P.1.23

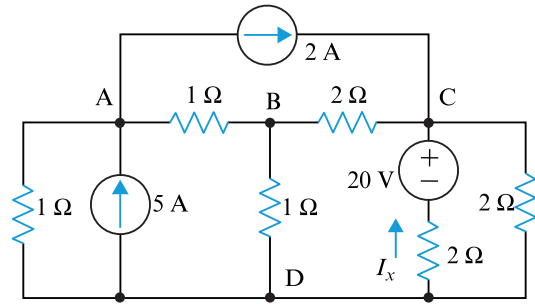


Figura P.1.24

- 1.25.** En el circuito de la Figura P.1.25, calcular: a) potencias suministradas por los generadores; b) potencias disipadas en las resistencias. Compruébese que se cumple el balance de potencias en el circuito.

[Res. a) $P(10 \text{ V}) = 62,5 \text{ W}$; $P(5 \text{ V}) = 17,5 \text{ W}$; $P(5 \text{ A}) = 162,5 \text{ W}$; $P(2,5 \text{ A}) = 25 \text{ W}$. b) $P(2 \Omega) = 78,125 \text{ W}$; $P(2 \Omega) = 3,125 \text{ W}$; $P(5 \Omega) = 125 \text{ W}$; $P(5 \Omega) = 5 \text{ W}$; $P(4 \Omega) = 25 \text{ W}$; $P(1 \Omega) = 6,25 \text{ W}$; $P(1 \Omega) = 25 \text{ W}$; $\sum P_g = \sum P_d = 267,5 \text{ W}$]

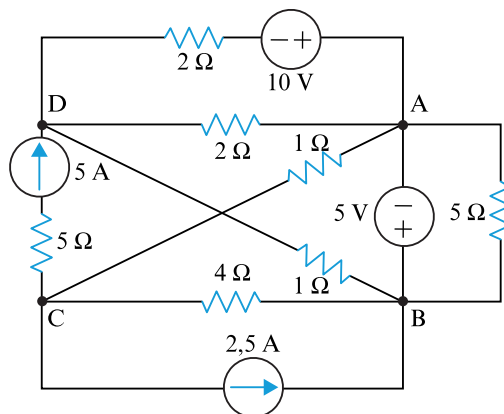


Figura P.1.25

- 1.26.** En el circuito de la Figura P.1.26, la potencia eléctrica suministrada por el generador de corriente al circuito es de 54 W, calcular: a) tensión U_s del generador de tensión existente entre los nudos A y B; b) potencias eléctricas producidas por los generadores; c) potencias disipadas en las resistencias. Comprobar el balance de potencias en la red.

[Res. a) $U_s = 2$ V; b) $P(2$ V) = -4 W; $P(7$ V) = 14 W; $P(3$ A) = 54 W; c) $P(1\ \Omega) = 1$ W; $P(2\ \Omega) = 2$ W; $P(3\ \Omega) = 12$ W; $P(4\ \Omega) = 4$ W; $P(5\ \Omega) = 45$ W. $\sum P_g = -4 + 14 + 54 = 64$ W; $\sum P_d = 1 + 2 + 12 + 4 + 45$]

- 1.27.** En el circuito de la Figura P.1.27, el generador de 25 V *absorbe* una potencia de 875 W. Calcular: a) intensidad I_s del generador de corriente; b) potencia generada por la fuente de corriente dependiente.

[Res. a) $I_s = 10$ A; b) $P = 1.250$ W]

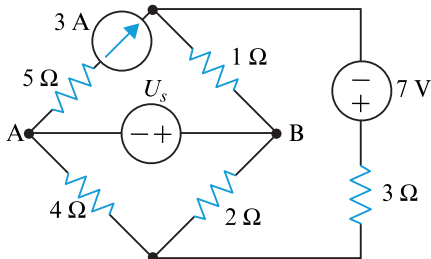


Figura P.1.26

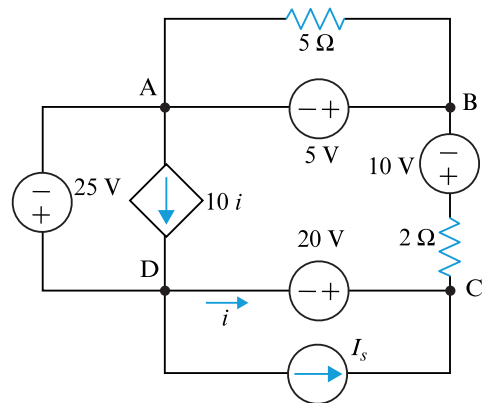


Figura P.1.27

- 1.28.** En el circuito de la Figura P.1.28, calcular el valor entero de la resistencia R, si el generador dependiente entrega una potencia de 168 W al circuito.

[Res. $R = 4\ \Omega$]

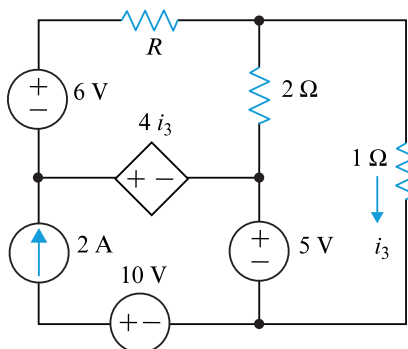


Figura P.1.28

- 1.29.** En el circuito de la Figura P.1.29, la potencia eléctrica generada por la fuente dependiente es de 230 W, calcular la tensión U_s de la fuente de la izquierda de la figura. (Nota: De los dos valores que se obtienen, tómese el que se corresponde con la polaridad mostrada en la figura).

[Res. $U_s = 30 \text{ V}$]

- 1.30.** En el circuito de la Figura P.1.30, calcular el valor de la tensión U_s si la corriente $i_b = 1 \text{ A}$.

[Res. $U_s = 15 \text{ V}$]

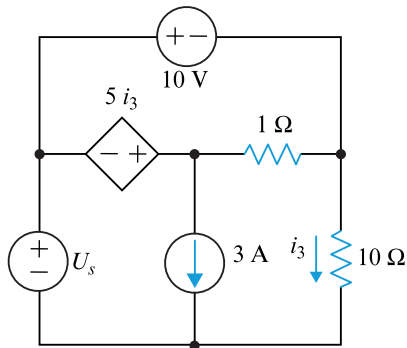


Figura P.1.29

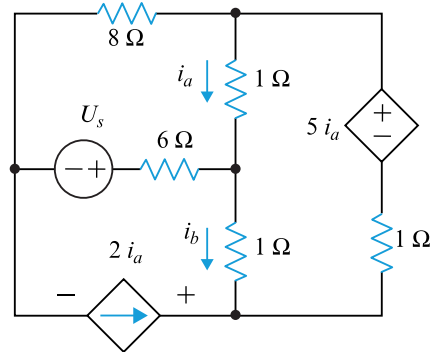


Figura P.1.30

- 1.31.** Calcular la magnitud i_s del generador de corriente de la Figura P.1.31 si la potencia entregada por él al circuito es de 18 W. (Nota: De las dos soluciones posibles, tómese la que dé lugar a un valor entero de i_s).

[Res. 9 A]

- 1.32.** En el circuito de la Figura P.1.32, calcular el valor de la resistencia R si el generador de tensión de 6 V absorbe una potencia de 48 W.

[Res. $R = 4 \Omega$]

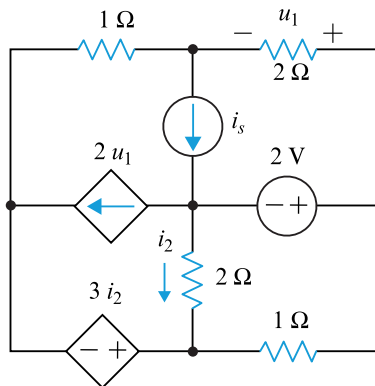


Figura P.1.31

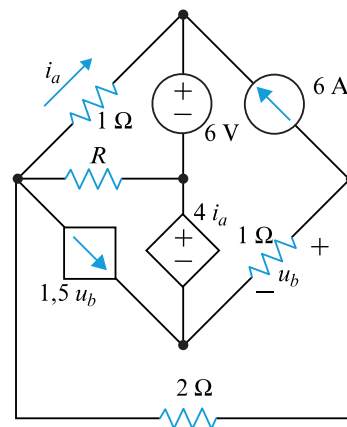


Figura P.1.32

- 1.33.** En la Figura P.1.33 el generador de corriente tiene una magnitud proporcional a la tensión u_x . Si la potencia entregada por este generador al circuito es de 4 W, determinar el valor de la constante k de proporcionalidad, sabiendo que es un número entero.

[Res. $k = 4$]

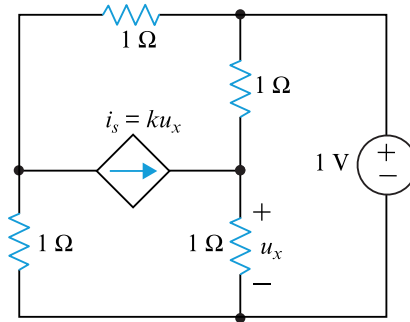


Figura P.1.33

- 1.34.** Calcular aplicando el principio de superposición, la corriente i que circula por la resistencia de 4 Ω del circuito de la Figura P.1.34.

[Res. $i = 5$ A]

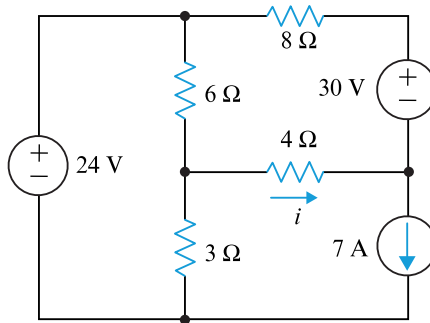


Figura P.1.34

- 1.35.** Calcular la corriente i_a del circuito de la Figura P.1.35, aplicando el principio de superposición.

[Res. $i_a = 4$ A]

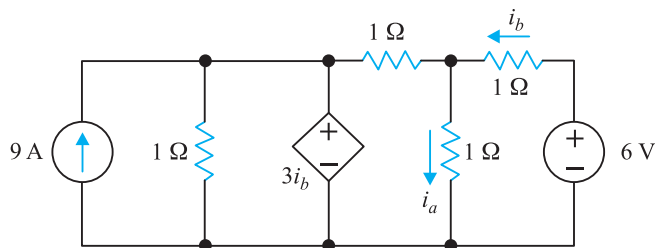


Figura P.1.35

- 1.36.** Calcular el circuito equivalente de Thévenin entre los terminales A y B de la red de la Figura P.1.36.

[Res. $U_{Th} = 25 \text{ V}$; $R_{Th} = 20 \Omega$]

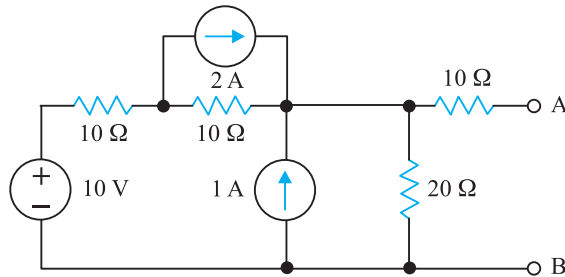


Figura P.1.36

- 1.37.** En el circuito de la Figura P.1.37, calcular la corriente i aplicando el teorema de Thévenin.

[Res. $i = 0,4 \text{ A}$]

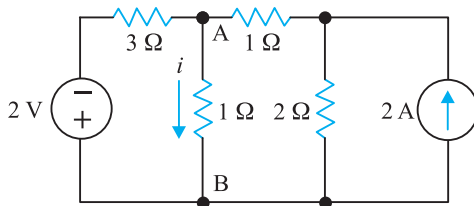


Figura P.1.37

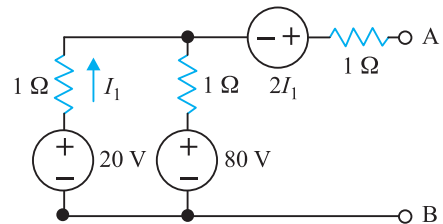


Figura P.1.38

- 1.39.** En el circuito de la Figura P.1.39, se pide: a) circuito equivalente de Thévenin entre A y B, al extraer la resistencia R del circuito; b) ¿cuál debe ser el valor de R para que la potencia disipada en esta resistencia sea máxima?

[Res. a) $U_{Th} = U_{AB} = -115 \text{ V}$; $R_{Th} = 6 \Omega$; b) 6Ω]

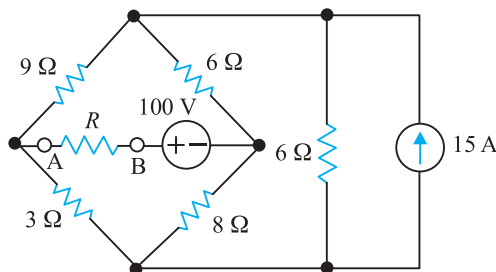


Figura P.1.39

- 1.40.** Calcular el circuito equivalente de Thévenin entre los terminales A y B de la red de la Figura P.1.40 (al desconectar la resistencia de $4\ \Omega$). Determinar, a partir del resultado anterior, la potencia disipada en la resistencia de $4\ \Omega$.

[Res. $U_{Th} = 10\text{ V}$; $R_{Th} = 1\ \Omega$; $P = 16\text{ W}$]

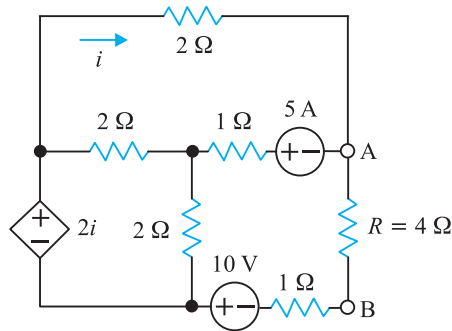


Figura P.1.40



Biografías

AMPÈRE, André Marie (1775-1836). Matemático y físico francés. Ampère nació en el seno de una familia acomodada de clase media, que durante varias generaciones se había dedicado a la venta de sedas. A muy corta edad se aficiona por los estudios de botánica e historia natural, a los siete años su principal lectura son los veintiocho tomos de la Enciclopedia de Diderot, las obras de Rousseau y Voltaire. A los trece años comienza a interesarse por las matemáticas y al comprobar que las obras de Euler y Bernouilli están escritas en latín aprende este idioma con gran rapidez. Su educación fue eminentemente religiosa, en cuanto a su vida familiar fue bastante triste: su padre fue ejecutado en 1793 por los revolucionarios, lo que le causó profunda pena y apatía por sus estudios favoritos, en 1799 se casa con Julie Carron, que fallece en 1804, justo el mismo año en que le nombran profesor del Liceo de Lyon, esta muerte fue tan dolorosa para Ampère que no logró consolarse en toda su vida. En el año 1806 le nombran profesor de Análisis de la Politécnica y más tarde ocupa el cargo de Inspector General de la Universidad de París. Sus trabajos como matemático se extienden desde el cálculo de probabilidades hasta la integración de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Sin embargo los estudios más importantes de Ampère se refieren a la electricidad. A la semana de conocerse en Francia los experimentos de Oersted desarrolló la electrodinámica aplicando el cálculo infinitesimal a la electricidad. Ampère dio la regla que lleva su nombre, a saber: *si una corriente lineal dispuesta paralelamente a una aguja imantada es tal que circula aquella por el conductor entrando por los pies y saliendo por la cabeza de un supuesto observador tendido a lo largo de la corriente y mirando a la aguja imantada, el polo de la aguja que se dirige al Norte se desvía por la acción de la corriente hacia la izquierda del observador*. Comprobó que un conjunto de espiras paralelas que él denominó solenoide se comportaba igual que un imán. La Memoria presentada en 1827 denominada: «*Teoría matemática de los fenómenos electrodinámicos exclusivamente deducidas de la experiencia*» es una admirable construcción lógica y de precisión maravillosa. En opinión de Maxwell, la obra de Ampère es una de las más brillantes que registra la historia de la Ciencia, tanto la teoría como la experimentación brotaron de un modo asombroso de la mente del que fuera apodado por Maxwell como el Newton de la Electricidad.

EULER, Leonhard (1707-1783). Matemático alemán de origen suizo. Su padre era un pastor calvinista que quería que su hijo estudiase teología. Sin embargo estudió matemáticas bajo las enseñanzas de Juan Bernouilli, y fue compañero de los hijos de este, Nicolás (1695-1726) y Daniel (1700-1782). A los diecinueve años ganó un premio de la Academia Francesa por un trabajo sobre arboladura de buques. Gracias a los hermanos Bernouilli consiguió un puesto en la Academia de Ciencias de San Petersburgo, en Rusia, comenzando como ayudante de Daniel Bernouilli y sucediéndole más tarde como profesor (1733-1741). En 1741, invitado por Federico el Grande, se trasladó a Berlín como catedrático de matemáticas, donde permaneció hasta 1766. A lo largo de este periodo, Euler impartió lecciones a la princesa de Anhalt-Dessau, sobrina del rey de Prusia; estas lecciones, sobre diversos temas: astronomía, física, filosofía y religión, fueron publicadas más tarde como las *Cartas a una princesa alemana* y todavía se leen con placer. En 1766, a petición de Catalina la Grande, regresó a Rusia, aunque temiendo los efectos del riguroso clima sobre su debilitada vista (había perdido la visión de un ojo en 1735); en efecto, se volvió ciego al

poco de llegar a Rusia, permaneciendo los últimos diecisiete años de su vida privado de la visión. No fueron por ello menos fructíferos que los precedentes; Euler tenía una memoria prodigiosa; recordaba las fórmulas de la trigonometría y de análisis así como las potencias, hasta la sexta, de los cien primeros números primos, por no hablar de innumerables poemas como la Eneida, del poeta romano Virgilio, entera. Su memoria era tan impresionante que podía realizar mentalmente cálculos que otros matemáticos competentes realizaban con dificultad sobre el papel. Fue uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos pues escribió tratados sobre todas las ramas de dicha ciencia. Aplicó las matemáticas a la astronomía siendo precursor de las ideas de Laplace y Lagrange. Creador de la topología que tiene aplicaciones en el estudio de las redes eléctricas y también de la mecánica analítica y la mecánica de los cuerpos rígidos. Contribuyó enormemente a la difusión de las matemáticas por su sencillez y claridad de exposición. Escribió numerosos libros de textos sobre mecánica, álgebra, análisis matemático, geometría analítica y diferencial y sobre cálculo de variaciones. Se le atribuyen también más de un millar de Memorias, doscientas de las cuales se descubrieron cuarenta años después de su muerte.

GALVANI, Luigi (1737-1798). Médico y físico italiano. Estudió la carrera de medicina en su ciudad natal. Catedrático de anatomía práctica en la Universidad de Bolonia (1775). En ese tiempo en los laboratorios de las facultades de medicina existían aparatos eléctricos como la botella de Leyden (primitivo condensador) que se empleaban para investigar los efectos de sus descargas en el cuerpo humano. Galvani notó que los músculos de las ancas de una rana disecada experimentaban convulsiones cuando les llegaba una descarga eléctrica. Sus observaciones las publicó en 1791 en su memoria «*De viribus electricitatis in motu musculari*» (Sobre los efectos de la electricidad en el movimiento muscular). Galvani admitía la existencia de una electricidad animal particular y asimilaba los músculos de la rana a una especie de condensador (análogo a la botella de Leyden). Alessandro Volta, que por aquel entonces era catedrático de Física en la Universidad de Pavia, siguió de cerca los experimentos de Galvani y se planteó el problema de si la corriente eléctrica que aparecía al establecer el contacto de las dos piezas metálicas con el músculo, tenía su origen en el músculo o en las piezas metálicas. Para comprobarlo decidió en 1794 hacer uso de los metales sin intervención del músculo y vio que al momento se establecía una corriente eléctrica, por lo que dedujo que no tenía nada que ver con los tejidos musculares. Esta explicación produjo una viva polémica entre Galvani y Volta, para demostrarlo este último desarrolló y construyó la pila que lleva su nombre. Galvani murió disgustado por la idea del fracaso. En los últimos diez años de su vida, sin embargo, triunfó al convertir su nombre en un vocablo común: la electricidad permanente producida por dos metales en contacto se llamó electricidad galvánica, en oposición a la electricidad estática que se producía al frotar ámbar sobre vidrio. Ampère en 1820, también sugirió que el instrumento para detectar el paso de la corriente eléctrica se denominara galvanómetro en honor a Galvani. En la actualidad la palabra galvanómetro representa un aparato para medir pequeñas corrientes eléctricas, mientras que si estas son elevadas, se denomina amperímetro.

HELMHOLTZ, Hermann Ludwig Ferdinand von (1821-1894). Fisiólogo y físico alemán. Estudió medicina en Berlín. Fue profesor de fisiología en Königsberg (1849), más tarde en Bonn y posteriormente enseñó física en Berlín (1871). Difícil sería encontrar otro sabio de los tiempos modernos que haya ejercido tanto influjo en muchos terrenos de la ciencia; y ello fue solo posible a que sus geniales dotes de investigador y su habilidad de experimentador iban dirigidas y guiadas por una profunda penetración filosófica que le llevaba a las cuestiones fundamentales. En medicina hizo grandes estudios sobre los órganos de la vista y el oído. En 1850 inventó el oftalmoscopio. En física realizó trabajos en electrodinámica, pero su contribución más importante está relacionada con el principio de conservación de la energía, al que llegó por estudios en la acción muscular en el año 1847; Mayer había enunciado el principio de conservación de la energía en 1842, pero Helmholtz lo hizo con más detalle y de un modo más específico, así que por regla general, se le atribuye el honor del descubrimiento, aunque ahora hay una tendencia a compartirlo entre Helmholtz, Mayer y Joule. Se interesó por los trabajos de Maxwell y planteó el problema de situar la radiación electromagnética fuera del espectro visible a su discípulo Hertz, quien lo probó más tarde de un modo rotundo.

KIRCHHOFF, Gustav Robert (1824-1887). Físico alemán. Estudió matemáticas en Königsberg. En 1845 siendo aún estudiante, amplió la ley de Ohm a conductores de dos dimensiones y demostró las leyes que llevan su nombre y que relacionan las corrientes, tensiones y resistencias en los circuitos eléctricos. En 1848 y basándose como Ohm en la obra de Fourier (teoría del calor) estableció la teoría general del paso de la electricidad en los conductores de tres dimensiones. En 1847 le nombraron *Privatdozent* (profesor sin salario) de la Universidad de Berlín y tres años más tarde aceptó el puesto de catedrático de Física de la Universidad de Breslau. En 1854 le nombraron Catedrático de Física en Heilderberg. En esta universidad en 1859 demostró la ley fundamental de la radiación electromagnética: *para todos los cuerpos materiales, la relación entre el poder emisor y el de absorción para cada radiación es una función universal que depende únicamente de la temperatura y la longitud de onda*. Kirchhoff hizo este descubrimiento trabajando con Bunsen y cuando estudiaban el espectro óptico de los elementos químicos, lo que daría lugar a lo que se denominaría después análisis espectral (1860), demostraron que cuando un elemento químico se calienta hasta la incandescencia emite una luz con un color característico; al hacer pasar esta luz por un prisma, se produce un patrón de longitudes de onda propio de cada elemento. Aplicando esta técnica, Kirchhoff y Bunsen identificaron elementos como el cesio (1860) y el rubidio (1861). En 1874 obtuvo la cátedra de física matemática en la Universidad de Berlín. Hizo también importantes aportaciones en elasticidad, teoría mecánica del calor y óptica.

NORTON, Edward L. (1898-1983). Ingeniero eléctrico americano. Estuvo destinado en la armada americana durante la Primera Guerra Mundial. Al finalizar la guerra estudió en la Universidad de Maine y más tarde en el MIT donde finalizó sus estudios

de ingeniero eléctrico en 1922. Ingresó en ese mismo año en la Western Electric, y más tarde en 1925, cuando los laboratorios de investigación de esta empresa se unieron a los de la ATT para formar los Laboratorios de la Bell Telephone, Norton pasó a esta nueva compañía, donde permanecería el resto de su vida. Sus áreas de trabajo fueron: teoría de redes, relés, redes acústicas, direcciones de tiro (durante la Segunda Guerra Mundial), misiles guiados. Poseía más de 20 patentes en los campos de investigación anteriores (una de ellas tenía relación con el sistema de guiado de los misiles tipo Nike). Norton se hizo mundialmente conocido por el teorema que lleva su nombre que publicó en 1926; es un teorema dual del de Thévenin, e indica que se puede sustituir una red cualquiera por un generador de corriente en paralelo con una admitancia.

PLANTE, Gaston (1834-1889). Físico francés. Estudió en el Conservatorio de Arts et Metiers de París. Al graduarse, su primer trabajo fue como ayudante de Becquerel. Después entró a trabajar como químico en la empresa Christofle y Compañía, donde realizó investigaciones sobre la naturaleza de la polarización, que ya había comenzado a estudiar con Becquerel y que sería el inicio de lo que le llevaría más tarde a inventar en 1859 el acumulador eléctrico de plomo que lleva su nombre, constituido por placas de plomo sumergidas en ácido sulfúrico, que es esencialmente el mismo tipo que llevan hoy día los automóviles. La ventaja del acumulador frente a la pila de Volta es su posibilidad de recarga, lo que permite una mayor duración respecto a las pilas. El primer uso comercial del acumulador de Planté fue en el alumbrado de trenes en la línea de ferrocarril entre Brighton y la Costa Sur en octubre de 1881. En ese mismo año Planté recibió un Diploma de honor en la Exposición de París y fue nombrado Caballero de la Legión de Honor. En sus últimos años Planté realizó estudios sobre la electricidad atmosférica que publicó en un pequeño libro con el título: *Phénomènes Électriques de l'Atmosphère*. En 1879 la Academia francesa de Ciencias recopiló todos sus trabajos en un título único: *Recherches sur L'Electricité*. En este volumen se describen gran cantidad de experimentos y donde se presenta su célebre máquina reostática que utilizaba un conjunto de 800 acumuladores con la que conseguía obtener grandes tensiones y corrientes.

TELLEGEN, Bernard (1900-1990). Ingeniero holandés. Se graduó en ingeniería eléctrica en la Universidad de Delft en 1923. Al año siguiente ingresó en los Laboratorios de Investigación de la compañía multinacional Philips en Eindhoven (Holanda). Sus primeras investigaciones fueron sobre tubos de vacío o válvulas electrónicas. Como consecuencia de sus investigaciones, en 1926 inventó el pentodo, una válvula de cinco electrodos: ánodo, cátodo y tres rejillas. A continuación Tellegen se dedicó a los circuitos eléctricos, estando interesado en los problemas fundamentales de redes como dualidad, teoría de grafos y síntesis de redes. En 1948, estudiando las redes clásicas con elementos pasivos, llegó a la conclusión, de que era necesario añadir un nuevo elemento teórico a los componentes clásicos: resistencia, inductancia, capacidad y transformador y que bautizó con el nombre de *girador*. Durante algunos años publicó muchos artículos sobre este nuevo componente que no cumplía las relaciones de reciprocidad de circuitos y que era antisimétrico. Años después se aplicaron sus ideas para construir un girador práctico, que se utilizó en el campo de las microondas y que empleaba ferritas premagnetizadas. Al inventarse el amplificador operacional, se utilizó un circuito especial para implementar el girador; observándose que, tal como predecía Tellegen, al cargar el girador con un condensador, se obtenía una configuración con propiedades de inductancia. Estos resultados fueron muy importantes en el diseño electrónico, ya que se podía prescindir de la construcción de bobinas, que eran elementos caros, pesados y con un comportamiento no lineal debido a la saturación magnética. Otro de los trabajos más importantes de Tellegen fue la publicación en 1952 de un teorema general de redes que lleva su nombre, y que a grandes rasgos es una generalización del principio de conservación de la potencia en un circuito eléctrico. Entre los años 1946 y 1966, Tellegen fue profesor extraordinario de circuitos eléctricos en la Universidad de Delft. Desde 1942 a 1952 fue presidente de la Sociedad holandesa de electrónica y radio. Recibió en su vida grandes premios y condecoraciones: miembro honorario del Instituto Australiano de Ingenieros de Radio en 1953, Premio de Investigación del Instituto Real Holandés de Ingenieros en 1954, Medalla Edison del IEEE en 1973, por sus contribuciones significativas a la teoría de los circuitos eléctricos, incluyendo la invención del girador. En 1960 ingresó como académico en la Real Academia de Ciencias Holandesa y en 1970 fue nombrado Doctor Honoris Causa por la Universidad de Delft.

THÉVENIN, León Charles (1857-1926). Ingeniero francés. Estudió en la Politécnica. En 1878 ingresó como ingeniero en el Cuerpo de Telégrafos, puesto en el que permaneció hasta su jubilación en 1914. Durante este periodo normalizó la construcción de líneas aéreas telegráficas en Francia. En 1896 fue nombrado Director de la Escuela Profesional Superior donde enseñó matemáticas e ingeniería eléctrica. Su célebre teorema se publicó en 1883 en *Annales Telegraphiques* y más tarde se presentó en la Academia de Ciencias (*Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, diciembre de 1883, pág. 159). Realmente el teorema de Thévenin fue publicado en 1853 por H. Helmholtz en el *Analen der Physik und Chemie* de Poggendorf (pág. 211).

VAN VALKENBURG, Mac Elwyn (1921-1997). Ingeniero eléctrico americano. Se graduó en la Universidad de Utah en 1943, en plena Segunda Guerra Mundial, por lo que fue reclutado inmediatamente para trabajar en el Laboratorio de Radiación del Instituto Tecnológico de Massachussets (MIT), en el diseño de radares, bajo la dirección del gran profesor de circuitos eléctricos: Ernst Guillemin. En 1946 obtuvo el Máster en el MIT y volvió a la Universidad de Utah, como profesor del Departamento de Ingeniería Eléctrica. En 1949 se trasladó a la Universidad de Stanford, para realizar sus estudios de doctorado, recibiendo el grado de doctor en ingeniería eléctrica en 1952. En 1955 fue contratado como catedrático por la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign, permaneciendo allí hasta 1966. Entre 1966 y 1974 fue director del departamento de ingeniería eléctrica de la Universidad de Princeton. En 1974 volvió a la Universidad de Illinois, contratado como catedrático de circuitos eléctricos y en 1984 fue nombrado director de la Escuela de Ingeniería, cargo que ejerció hasta

su jubilación en 1988. Magnífico profesor de circuitos eléctricos; sabía contagiar a los alumnos su entusiasmo por la asignatura, desarrollando sus clases en un ambiente grato y distendido, auxiliado siempre de sus tizas de colores para destacar en la pizarra los conceptos más importantes de las redes eléctricas. Sus grandes dotes pedagógicas hicieron que los estudiantes le bautizaran con el sobrenombre de *gurú de los circuitos eléctricos*. En 1955 publicó la primera edición de su libro *Network Analysis*, que enseguida fue adoptado como libro de texto en diversas universidades por su claridad de exposición y traducido a varios idiomas, entre ellos el español. En 1960 escribió su segundo libro que trataba sobre la síntesis de redes eléctricas. En total publicó tres libros y en otros cuatro más intervino como coautor. Dirigió cerca de cincuenta tesis doctorales. Miembro de la Academia Nacional de Ingeniería de EE.UU, Medalla de Educación del IEEE, Medalla del Centenario del IEEE en 1984. Premio Guillemin. Editor de *Proceedings del IEEE* y también de las *Transactions on Circuit Theory* del IEEE.

VOLTA, Alessandro (1745-1827). Físico italiano. Estudió en su ciudad natal y sobre el año 1765 se sintió atraído por los experimentos eléctricos. En 1774 recibió su primer destino académico como profesor del Instituto de Como. Al año siguiente descubrió el electróforo; este aparato consistía en un disco metálico recubierto de ebonita y otro disco también metálico que disponía de un asa aislada eléctricamente; al frotar el disco de ebonita (por ejemplo con una gamuza) adquiere una carga eléctrica negativa; si se coloca encima el disco metálico, aparece en la superficie inferior de este una carga eléctrica positiva y en la superior negativa; esta carga negativa de arriba puede llevarse a tierra y perderse y repitiendo el proceso podemos crear una gran carga en el disco que sostenemos con el asa del superior. Este aparato acumulador de carga, sustituyó a la botella de Leyden como dispositivo acumulador de carga eléctrica y es el fundamento de los condensadores eléctricos. Catedrático de física aplicada de la Universidad de Pavía (1779). En 1781 construyó un electrómetro mejorando el aparato de Du Fay. En 1792 comprendió la importancia del descubrimiento de Galvani y aceptó en principio su teoría. Después de muchos experimentos en su laboratorio, rechazó completamente en 1793 la teoría de la electricidad animal de Galvani, demostrando que los músculos de la rana no se contraen si el «arco» que cierra el circuito está formado por un único metal. En 1800, utilizando discos de cobre, cinc y carbón impregnado en una solución salina, inventó su famosa pila que permitía producir un flujo continuo de corriente eléctrica.

WHEATSTONE, Charles (1802-1875). Físico inglés. Era hijo de un vendedor de instrumentos musicales. Lo educaron en una escuela privada pero no tuvo una formación universitaria oficial. En sus primeros años se dedicó a la acústica, fabricando diversos instrumentos musicales, por ejemplo en 1821 había demostrado el funcionamiento de una *lira encantada*, que era una aplicación curiosa de la transmisión del sonido por medio de barras metálicas. La descripción de este instrumento la hizo en 1831 ante la Royal Institution de Londres, comprobando que la velocidad de propagación del sonido en una barra sólida era 16 veces la de propagación en el aire. En 1833 se interesó por la electricidad y publicó en la Royal Society un artículo sobre la velocidad de la electricidad basado en un equipo diseñado por él mismo que consistía en un circuito abierto por tres puntos distintos en los que se producían descargas o chispas y se registraban estas mediante un espejo giratorio que permitía, de un modo curioso, calcular la velocidad de propagación de la chispa y que llegó a determinar con un error inferior al 3 %. Este trabajo le acreditó ante la comunidad científica por lo que le contrataron en 1834 como catedrático de física en el King's College de Londres, puesto en el que permanecería el resto de su vida. Más tarde junto con William Fothergill Cooke inventó el telégrafo en 1837 (Weber y Gauss habían fabricado otro en Gotinga en 1834 y el de Morse es de 1840). Realmente el telégrafo diseñado era muy primitivo y disponía de cinco hilos y cinco agujas magnéticas, de tal modo que al desviarse estas por acción de las corrientes se conseguían obtener diversas letras del alfabeto. En 1841 también construyó un generador eléctrico e hizo aportaciones en el diseño práctico de devanados. Sin embargo su nombre es más conocido en relación con el denominado puente de Wheatstone, que es un equipo para medir la resistencia de un circuito mediante un equilibrado de corrientes; curiosamente este puente de medida que lleva su nombre no fue inventado por él y se debe en realidad al también inglés Samuel Hunter Christie que lo inventó en 1833.



Referencias

- ARSHAD, M.: *Network Analysis and Circuits*. Infinity Sciercer Press LLC, Hingham, MA, Lausanne, 2008.
- BOITE, R.; NEIRYNCK, J.: *Traité d'Electricité. Tomo IV, Theorie des Reseaux de Kirchhoff*. Editions Georgi, Lausanne, 1983.
- BOYLESTAD, R. L.: *Introductory Circuit Analysis*, 4ª ed, Charles E. Merrill, Columbus, Ohio, 1982.
- BUDAK, A.: *Circuit Theory Fundamentals and Applications*. Prentice Hall inc, Englewood Cliffs, N.J., 1978.
- CAHEN, F.: *Electrotechnique. Tome I. Circuits et Réseaux en Régime Permanent*. Gauthier Villars Editeur, París, 1962.
- CANNON, R. H.: *Dynamics of Physical Systems*. Dover Publications, Inc, New York, 1967.
- CARLSON, A. B.: *Teoría de Circuitos*. Ed. Thomson, Madrid, 2002.
- CHIRLIAN, P. M.: *Basic Network Theory*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1969.

- DAHL, C. G. C.: *Electric Circuits. Theory and Applications*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1928.
- DESOER, C. A.; KUH, E. S.: *Basic Circuit Theory*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1969.
- DURNEY, C. H.; HARRIS, L. D.: *Circuitos Eléctricos. Teoría y Aplicaciones en Ingeniería*. CECSA, México, 1985.
- EDMINISTER, J. A.: *Schaum's Outline of Electric Circuits*, 2ª ed, McGraw-Hill Book Co., New York, 1983.
- FALLOT, M.: *Théorie générale des circuits électriques*. Ed. Dunod, París, 1960.
- FITZGERALD, A. E.; HIGGINBOTHAM, D.; GRABEL, A.: *Fundamentos de Ingeniería Eléctrica*, 4ª ed, McGraw-Hill de México, México, 1975.
- FRAILE, J.; GARCÍA, P.: *Instrumentación aplicada a la Ingeniería*. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 1987.
- GÓMEZ J.: *Circuitos Electricos, Vol I*. Universidad de Oviedo, Servicio de Publicaciones, Oviedo, 1990.
- GUILLEMEN, E. A.: *Introducción a la Teoría de los Circuitos Eléctricos*. Ed. Reverté, Barcelona, 1959.
- HARMAN, W.; LYTLE, D.: *Electrical and Mechanical Networks*. International Student Ed. McGraw-Hill Book Co., Kogakusha Company, Tokyo, 1962.
- HAYT, W. H. Jr; KEMMERLY, J. E.; DURBIN, S. M.: *Engineering Circuit Analysis*, 6ª ed, McGraw-Hill Book Co., New York, 2002.
- HOSTETTER, G. H.: *Engineering Network Analysis*. Harper & Row Pub., New York, 1984.
- HUELSMAN, L.: *Basic Circuit Theory*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- JOHNSON, D.; HILBURN, J.; JOHNSON, J. R.: *Basic Electric Circuit Analysis*, 2ª ed, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- KARNI, S.: *Applied Circuit Analysis*, J. Wiley & Sons, New York, 1988.
- KERCHNER, R. M.; CORCORAN, G. F.: *Circuitos de Corriente Alterna*. CECSA, México, 1959.
- LAGASSE, J.: *Estudio de los circuitos eléctricos*. Ed. Paraninfo, Madrid, 1963.
- LEPAGE, W. R.; SEELY, S.: *General Network Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1952.
- MEADOWS, R. G.: *Electric Network Analysis*. Penguin Books. Middlesex, England, 1972.
- MAXWELL, L. M.; REED, M. B.: *The Theory of Graphs*. Pergamon Press, New York, 1971.
- M.I.T., *Circuitos Eléctricos*. Departamento de Ingeniería Eléctrica del Massachusetts Institute of Technology, CECSA, México, 1959.
- PARRA, V.; PÉREZ, A.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.: *Circuitos Eléctricos. Volumen I*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid, 2003.
- PAUL, C. R.; NASAR, S. A.; UNNEWEHR, L. E.: *Introduction to Electrical Engineering*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1986.
- RAS OLIVA, E.: *Teoría de Circuitos. Fundamentos*, 3ª ed, Marcombo, Boixareu Editores, Barcelona, 1977.
- RAS OLIVA, E.: *Redes eléctricas y multipolos*. Marcombo, Boixareu Editores, Barcelona, 1980.
- RIZZONI, G.: *Principios y Aplicaciones de Ingeniería Eléctrica*, 3ª e, McGraw-Hill, Bogotá, 2001.
- SCOTT, D. E.: *Introducción al Análisis de Circuitos. Un Enfoque Sistémico*. McGraw-Hill/Interamericana de España S.A., Madrid, 1988.
- SHENKMAN, A.: *Circuit Analysis for Power Engineering Handbook*. Kluwer Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1998.
- SKILLING, H. H.: *Redes Eléctricas*. Limusa Wiley, México, 1977.
- STARR, A. T.: *Electric Circuits and Wave Filters*. Sir Isaac Pitman & Sons, London, 1948.
- STRUM, R. D.; WARD, J. R.: *Electric Circuits and Networks*, 2ª ed, Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- TOMAS, R. E.; ROSA, A. J.: *The Analysis and Design of Linear Circuits*. Fifth Ed. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, NJ, 2006.
- VAN VALKENBURG, H. E.: *Análisis de Redes*. Ed. Limusa-Wiley, México, 1977.
- WILDI, T.: *Tecnología de los Sistemas Eléctricos de Potencia*. Ed. Hispano Europea, Barcelona, 1983.
- ZEVEKE, G.; IONKIN, P.: *Analysis of Electric Circuits*. Mir Publisher, Moscú, 1973.

Capítulo 2

Circuitos de corriente alterna sinusoidal

- 2.1 Introducción
- 2.2 Onda sinusoidal: generación y valores asociados
- 2.3 Representación compleja de una magnitud sinusoidal
- 2.4 Derivada e integral de una magnitud sinusoidal
- 2.5 El dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia
- 2.6 Respuesta sinusoidal de los elementos pasivos
- 2.7 Impedancia y admitancia complejas
- 2.8 Análisis de circuitos en régimen permanente sinusoidal
- 2.9 Potencia en un circuito eléctrico en régimen de corriente alterna sinusoidal
- 2.10 Potencia compleja
- 2.11 Factor de potencia: su importancia práctica
- 2.12 Corrección del factor de potencia
- 2.13 Medida de la potencia en c.a.
- 2.14 Transferencia máxima de potencia
- 2.15 Resonancia en c.a.
- 2.16 Los filtros eléctricos
- 2.17 Circuitos eléctricos con señales no sinusoidales

■ 2.1. Introducción

En el capítulo anterior, se han desarrollado las técnicas empleadas en teoría de circuitos, resolviendo ejemplos con excitaciones de c.c. para hacer más simple la aplicación de los teoremas estudiados. Al analizar las redes de corriente alterna, surge a primera vista una dificultad para resolver directamente las ecuaciones de comportamiento de los circuitos, ya que obedecen en general a expresiones integrodiferenciales. Sin embargo y como se verá en este capítulo si se utiliza una transformación fasorial, las ecuaciones se convierten en expresiones algebraicas definidas por números complejos, observándose entonces que su estudio es bastante sistemático, guardando gran analogía con el desarrollo visto en el capítulo anterior. La idea de emplear los números complejos en el estudio de la corriente alterna data del año 1896 y se debe a C. P. Steinmetz (un insigne ingeniero de la Compañía General Electric), que denominó a este proceso: *método simbólico* y que simplificaría el estudio de la c.a.

Al hablar de corriente alterna, se sobreentiende que se refiere a la c.a. de tipo sinusoidal, fundamentalmente esto es así, porque la onda seno es la que se obtiene en los generadores de c.a. (alternadores) de las centrales eléctricas y constituye además la base de la producción, transporte y distribución de la energía eléctrica, debido a que la corriente alterna puede adaptar su tensión a los valores requeridos por medio de transformadores, con lo que se logra un gran rendimiento en su utilización. De hecho la corriente alterna se introduce en la ingeniería eléctrica cuando Lucien Gaulard y John-Dixon Gibbs descubren en 1884 lo que ellos denominaron generador secundario y que más tarde, tras algunas modificaciones realizadas por Deri, Blathy y Zypernowsky de la Compañía Ganz de Budapest, se convertiría en el transformador. El transformador sería la base para el desarrollo de las redes de transporte y distribución con c.a. que comenzó en el año 1885.

Como se ha señalado en el Epígrafe 1.4, una de las características de las señales periódicas es la frecuencia, que es el número de ciclos por segundo (Hz); cuando se decidió el empleo de la c.a. hubo que elegir el valor de esta frecuencia; para valores de 15-20 Hz, la caída de tensión en las líneas de transporte de energía (debido a la resistencia y a la reactancia de la línea) es reducida, pero las lámparas parpadean y los motores de c.a. tienen una vibración molesta; a 133 Hz, los transformadores y algunas máquinas eléctricas, pueden ser más pequeños para la misma potencia, sin embargo las caídas de tensión son más elevadas y la tracción eléctrica es difícil (en España la tracción eléctrica se hace en c.c. a 3.000 V, se exceptúa el tren de alta velocidad AVE que funciona a 25.000 V de c.a. a 50 Hz). Por ello finalmente se estableció un convencionalismo y Europa tomó un valor de 50 Hz y EE.UU. y gran parte de su continente eligió 60 Hz, que son los dos valores existentes actualmente en el mundo para generación de energía eléctrica. Se utilizan en el campo de la Electrotecnia frecuencias más altas, que son comunes por ejemplo en los aviones, donde las líneas de transporte son cortas y es vital la ligereza de las máquinas y por lo general usan frecuencias de 400 Hz. En el campo de la Electrónica y Comunicaciones se emplean frecuencias más elevadas que pueden llegar hasta los Gigahercios ($1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$) distribuidas según indica la Tabla 2.1. Por ejemplo las emisoras de radio comerciales emiten en AM en el rango de 550 a 1.650 kHz, mientras que la banda de FM se extiende desde 88 a 108 MHz.

Desde el punto de vista de la teoría de circuitos la onda sinusoidal presenta las ventajas siguientes:

Tabla 2.1. Distribución de frecuencias y denominación

Rango de frecuencias	Denominación
3-30 kHz (Banda 4)	Muy baja frecuencia (VLF)
30-300 kHz (Banda 5)	Baja frecuencia (LF)
300 kHz-3 MHz (Banda 6)	Media frecuencia (MF)
3-30 MHz (Banda 7)	Alta frecuencia (HF)
30-300 MHz (Banda 8)	Muy alta frecuencia (VHF)
300 MHz-3 GHz (Banda 9)	Ultra alta frecuencia (UHF)
3-30 GHz (Banda 10)	Super alta frecuencia (SHF)
30-300 GHz (Banda 11)	Extra alta frecuencia (EHF)

NOTA: La banda N se extiende desde $0,3 \cdot 10^N$ Hz hasta $3 \cdot 10^N$ Hz.

1. Se puede diferenciar e integrar repetidamente y seguir siendo una senoide de la misma frecuencia.
2. La suma de ondas sinusoidales de igual frecuencia, pero de amplitud y fase¹ arbitrarias es una senoide de la misma frecuencia, lo cual es interesante para aplicar las leyes de Kirchhoff.
3. Admite una representación del tipo exponencial, lo cual destaca aún más los dos puntos anteriores, ya que permite operar con vectores giratorios denominados **fasores**, que admiten una representación en el plano complejo.

Por ello los problemas de circuitos de c.a. utilizan como base operativa los números complejos. Es conveniente que el lector repase el álgebra compleja de un curso de Análisis Matemático antes de comenzar este capítulo. Además se ha de destacar que, de acuerdo con el desarrollo en serie de Fourier, cualquier función periódica puede representarse por una suma de ondas sinusoidales de diferentes frecuencias, el análisis puede extenderse incluso a señales no periódicas y discretas empleando la integral de Fourier. Todas estas propiedades destacan las grandes ventajas de las ondas sinusoidales en cualquier campo de la Física.

Conviene tener en cuenta, sin embargo, que debido al cambio de polaridad con el tiempo, las corrientes alternas no pueden emplearse en la electrólisis, ni tampoco en baños y cubas electrolíticas (galvanoplastia). Otro tanto ocurre con la carga de acumuladores o baterías eléctricas y también en la tracción eléctrica con motores de c.c. que necesitan este tipo de corriente para su funcionamiento y similarmente en los trenes de laminación requeridos en acerías e industrias papeleras. En estos casos es preciso incorporar a las instalaciones *grupos rectificadores* que transformen la c.a. de la red en c.c.

Antiguamente se empleaban para esta misión rectificadores de vapor de mercurio, más tarde se utilizaron placas de selenio y en la actualidad se trabaja con rectificadores de silicio (constituídos por diodos semiconductores con dos terminales de acceso externo denominados: ánodo y cátodo; estos diodos son elementos no lineales que únicamente conducen en el sentido ánodo-cátodo, de este modo al incluirlos en un circuito alimentado por c.a. esta se transforma en corriente unidireccional, que más tarde se filtra para que dé lugar a una c.c. libre de rizado, es decir exenta de componentes alternas).

¹ El concepto de fase se explica en el Epígrafe 2.2.

Para controlar la tensión rectificada se emplea comúnmente el rectificador controlado de silicio o *tiristor* (que es un dispositivo electrónico que tiene tres uniones semiconductoras y que dispone de tres terminales de acceso externo: ánodo, cátodo y puerta; este elemento solamente conduce en el sentido ánodo-cátodo y a partir del instante en que se da una señal o impulso de control a la puerta, lo que permite variar la magnitud de la c.c. de salida).

Desde el punto de vista fisiológico las tensiones alternas de baja frecuencia son más peligrosas que las continuas correspondientes. Se puede afirmar que una tensión alterna de 127 V, 50 Hz es tan peligrosa como una c.c. a 220 V; por el contrario las tensiones alternas de alta frecuencia son inofensivas en virtud de su pequeña profundidad de penetración y por ello se utilizan en fisioterapia mediante determinados aparatos de diatermia (por ejemplo en el tratamiento del reumatismo y en la rehabilitación de algunas enfermedades óseas y musculares).

2.2. Onda sinusoidal: generación y valores asociados

El esquema básico de generación de una onda sinusoidal es el mostrado en la Figura 2.1 y constituye la versión más simple de un alternador (generador de c.a.). Se tiene una espira de superficie S (m^2) girando sobre su eje a una velocidad angular constante de ω rad/seg, dentro de un *campo magnético uniforme* producido por un imán o en general electroimán, de valor B teslas (T). (El movimiento de la espira se debe a un medio mecánico exterior, que en el caso de una central eléctrica es una turbina).

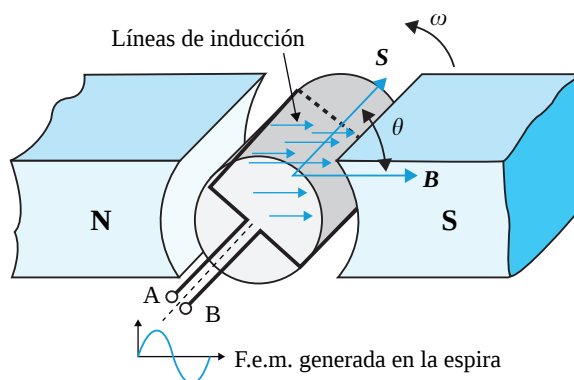


Figura 2.1 Generación de una f.e.m. sinusoidal

El flujo magnético que atraviesa la espira cuando los vectores S (Superficie) y B (inducción) forman un ángulo $\theta = \omega t$, teniendo en cuenta que la inducción es uniforme en todos los puntos de la superficie de la espira, es:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \omega t \quad (2.1)$$

como quiera que el flujo anterior varía con el tiempo, de acuerdo con la ley de Faraday se producirá una f.e.m. inducida de valor:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (BS \cos \omega t) = BS\omega \sin \omega t \quad (2.2)$$

que responde a la forma general:

$$e(t) = E_m \sin \omega t \quad (2.3)$$

donde se ha denominado E_m al producto $BS\omega$. La expresión (2.3) representa la f.e.m. instantánea (*dependiente del tiempo*) engendrada en la bobina y cuya evolución con el tiempo es de forma sinusoidal (Figura 2.2). El valor instantáneo dependiente del tiempo se representa por la letra e minúscula; E_m es la amplitud de la onda, que también recibe el nombre de *valor máximo*, *valor de pico* o *valor de cresta*; ω se conoce con el nombre de pulsación o frecuencia angular y se mide en rad/s.

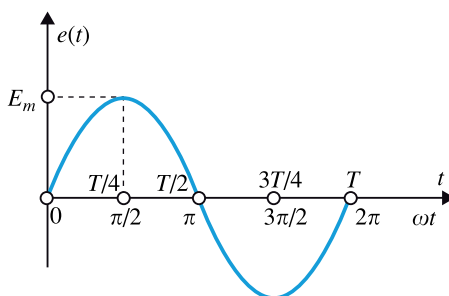


Figura 2.2 Onda sinusoidal

Si se denomina T (segundos) el periodo de la onda, es decir el tiempo de duración de un ciclo, la relación con la pulsación ω es:

$$\omega T = 2\pi \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.4)$$

la frecuencia de la onda es el número de ciclos por segundo y es la inversa del periodo T :

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{Hz}] \quad (2.5)$$

cuya unidad es el hercio. De las ecuaciones (2.4) y (2.5) se deduce:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad [\text{rad/s}] \quad (2.6)$$

por ejemplo la pulsación de la onda sinusoidal para una señal de c.a. en España donde $f = 50$ Hz, tiene un valor $\omega = 2\pi 50 = 314$ rad/s y corresponde a un periodo $T = 1/50 = 20$ milisegundos.

En Ingeniería Eléctrica, cuando se analizan circuitos de c.a., en los que están implicadas ondas seno y ondas coseno, resulta muy conveniente trabajar con un solo tipo de ondas (bien sea seno o bien coseno). Las ventajas de ello se comprobarán más adelante. En este texto, se ha elegido como función de trabajo la forma coseno, de este modo, si se tienen señales tipo seno, se transferirán a la forma coseno, basándose en la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.7)$$

de este modo la señal de f.e.m. (2.3) se expresa como coseno:

$$e(t) = E_m \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.8)$$

La forma de onda más general responde a la expresión siguiente:

$$y = f(t) = Y_m \cos (\omega t + \varphi) \quad (2.9)$$

$f(t)$ representa el valor instantáneo de la señal, que puede ser una f.e.m., tensión corriente, ..., Y_m expresa la amplitud máxima de la señal; φ se denomina *ángulo de fase inicial* o simplemente *fase*. En la Figura 2.3 se ha dibujado la señal (2.9), donde se ha supuesto que φ es positivo. El ángulo de fase φ es el argumento de la onda en el tiempo $t = 0$. Si se tiene en cuenta (2.9), al expresar ω en rad/s y t en segundos, el producto ωt se mide en radianes, por lo que φ debe expresarse también en radianes.

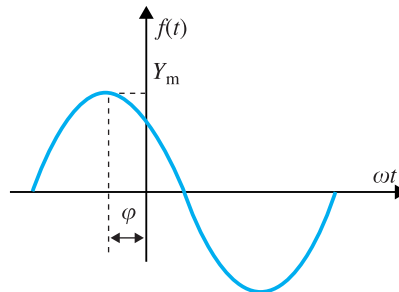


Figura 2.3 Ángulo de fase de una onda coseno

En la práctica de la ingeniería resulta sin embargo más útil trabajar con φ en grados (sexagesimales), por lo que las expresiones de tensión y corriente siguientes:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos (\omega t + \varphi_u) = U_m \cos (\omega t + 30^\circ) \\ i(t) &= I_m \cos (\omega t + \varphi_i) = I_m \cos (\omega t - 45^\circ) \end{aligned} \quad (2.10)$$

aunque son *inaceptables dimensionalmente*, serán válidas para nosotros. (La justificación de esta decisión se basa en que resulta más intuitivo para cualquier persona imaginar la posición angular expresada en grados, que medida en radianes). En la Figura 2.4 se han dibujado las señales indicadas en (2.10).

Obsérvese que la fase de cada onda indica el ángulo que forma el pico de la onda con el eje de ordenadas ($\omega t = 0$). El ángulo es positivo cuando el pico queda a la izquierda

del eje de ordenadas y negativo cuando el pico está a la derecha. Se denomina *diferencia de fase* o *desfase* entre dos ondas sinusoidales de la misma frecuencia, a la diferencia entre sus fases respectivas. Así para el ejemplo de la Figura 2.4 entre las ondas $u(t)$ e $i(t)$ existe un desfase de:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 30^\circ - (-45^\circ) = 75^\circ$$

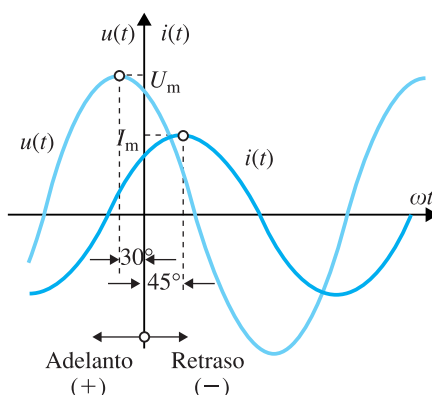


Figura 2.4 Desfase entre dos ondas sinusoidales

Cuando el desfase es positivo, quiere decir que la onda primera se adelanta a la segunda, o al contrario, que la segunda onda se retrasa respecto de la primera. Así en la Figura 2.4, la señal de tensión está adelantada 75° respecto a la corriente, o esta se retrasa 75° respecto a la tensión. Cuando el desfase es 0° , se dice entonces que ambas ondas están en fase. Si el desfase es $\pm 90^\circ$, ambas ondas están en cuadratura y si es 180° entonces están en oposición. Obsérvese en la Figura 2.4 que al modificar el origen de fases (origen de tiempos) se modifican las fases de las señales, sin embargo la diferencia de fase o desfase entre ellas permanece constante, por ello el desfase entre las ondas es independiente del origen.

Como ya se indicó en el capítulo anterior al estudiar las ondas periódicas, existen dos valores importantes que se emplean en el análisis de este tipo de ondas: el valor medio y el valor eficaz. De acuerdo con (1.10), el valor medio de la onda sinusoidal (2.9) es igual a:

$$Y_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T Y_m \cos(\omega t + \varphi) dt = 0 \quad (2.11)$$

es inmediato comprobar que la integral anterior es igual a cero, ya que el área correspondiente a la parte positiva de la onda es igual y de signo contrario a la existente en la parte negativa. Cualquier onda con simetría impar tendrá esta propiedad. El valor eficaz de una señal sinusoidal se puede calcular mediante la expresión (1.11):

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (2.12)$$

y sustituyendo el valor (2.9) resulta:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T Y_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} \quad (2.13)$$

para resolver la integral anterior efectuamos el cambio de variable:

$$\omega t + \varphi = \alpha \Rightarrow \omega dt = d\alpha \quad (2.14)$$

para $t = 0$ se tiene $\alpha = \varphi$ y para $t = T$ se tiene $2\pi + \varphi$, donde se ha tenido en cuenta que $\omega T = 2\pi$. Al sustituir los valores de (2.14) en (2.13) se obtiene:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} Y_m^2 \cos^2 \alpha d\alpha} = \sqrt{\frac{Y_m^2}{2\pi} \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} d\alpha} \quad (2.15)$$

que corresponde a un valor eficaz:

$$Y = \frac{Y_m}{\sqrt{2}} \quad (2.16)$$

relación importante y que conviene no olvidar *en el estudio de la c.a. sinusoidal*. En el estudio de los circuitos eléctricos es de gran utilidad el empleo de magnitudes eficaces debido al significado físico que las mismas representan. Considérese por ejemplo una señal de corriente alterna de la forma:

$$i = I_m \cos \omega t \quad (2.17)$$

la energía eléctrica que disipará esta corriente al circular por una resistencia R en un tiempo T (periodo de la onda) es igual a:

$$W(t) = \int_0^T Ri^2(t) dt \quad (2.18)$$

Si se considera ahora una corriente continua I , que atravesase la misma resistencia R , disipará una energía en el mismo periodo de tiempo T :

$$W(t) = \int_0^T Ri^2 dt = RI^2 T \quad (2.19)$$

el valor eficaz I de una corriente periódica es precisamente el valor de una corriente continua que al circular por una resistencia R produce en un tiempo T la misma cantidad de energía disipada. Este valor se obtiene igualando (2.18) y (2.19):

$$RI^2 T = \int_0^T Ri^2(t) dt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (2.20)$$

que como vemos coincide con la definición (2.12). Al ser $i(t)$ sinusoidal, la integral (2.20) da lugar a:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (2.21)$$

Se debe destacar la simbología de estos valores. *Las magnitudes con minúscula representan los valores instantáneos dependientes del tiempo*, por ejemplo las expresiones (2.8), (2.9), (2.10) y (2.17) representan magnitudes instantáneas. *Los valores eficaces se representan por la misma letra que las magnitudes instantáneas pero con mayúscula y sin subíndices alfabéticos*, por ejemplo la magnitud Y en (2.12) o I en (2.21) indican valores eficaces. Las cantidades máximas se representan con mayúscula y el subíndice «m»: E_m , Y_m , I_m , ... Teniendo en cuenta (2.9) y (2.16), se podrá escribir el valor instantáneo $y(t)$ por la expresión:

$$y = \sqrt{2} Y \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.22)$$

o en el caso de la corriente eléctrica (2.17), teniendo en cuenta (2.21) resultará:

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos \omega t \quad (2.23)$$

obsérvese tanto en (2.22) y (2.23) que el valor eficaz (Y o I) se introduce en la expresión instantánea de un modo más explícito que en (2.9) o (2.17). Generalmente al definir una señal alterna (sinusoidal) se fijan el valor eficaz y la frecuencia. Por ejemplo la tensión disponible en un enchufe de un domicilio doméstico en España es de 230 V (eficaces) y 50 Hz ($\omega = 314$ rad/s), por consiguiente la expresión instantánea será de la forma:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 230 \cdot \cos(314t + \varphi_u) \text{ voltios} \quad (2.24)$$

donde φ_u es el ángulo de referencia inicial o fase.

2.3. Representación compleja de una magnitud sinusoidal

Las funciones sinusoidales:

$$y(t) = \sqrt{2} Y \cos(\omega t + \varphi) \quad ; \quad y(t) = \sqrt{2} Y \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.25)$$

se pueden considerar que proceden de la proyección de un vector giratorio sobre los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas (o mejor coordenadas real e imaginaria del plano complejo). Para demostrar lo anterior en la Figura 2.5 se ha dibujado un vector $\overline{OM}_0$ de módulo $Y\sqrt{2}$ que forma con el eje real un ángulo φ , en el tiempo $t = 0$. Como sabemos de álgebra compleja, el vector $\overline{OM}_0$ se puede representar en forma exponencial por la expresión:

$$\overline{OM}_0 = \sqrt{2} Y e^{j\varphi} \quad (2.26)$$

ahora bien si este vector gira en sentido contrario a las agujas del reloj, a una velocidad angular ω (rad/s); en un instante t medido a partir de la posición inicial $\overline{OM}_0$, habrá recorrido un ángulo ωt , que unido al inicial φ , supondrá un argumento θ total:

$$\theta = \omega t + \varphi \quad (2.27)$$

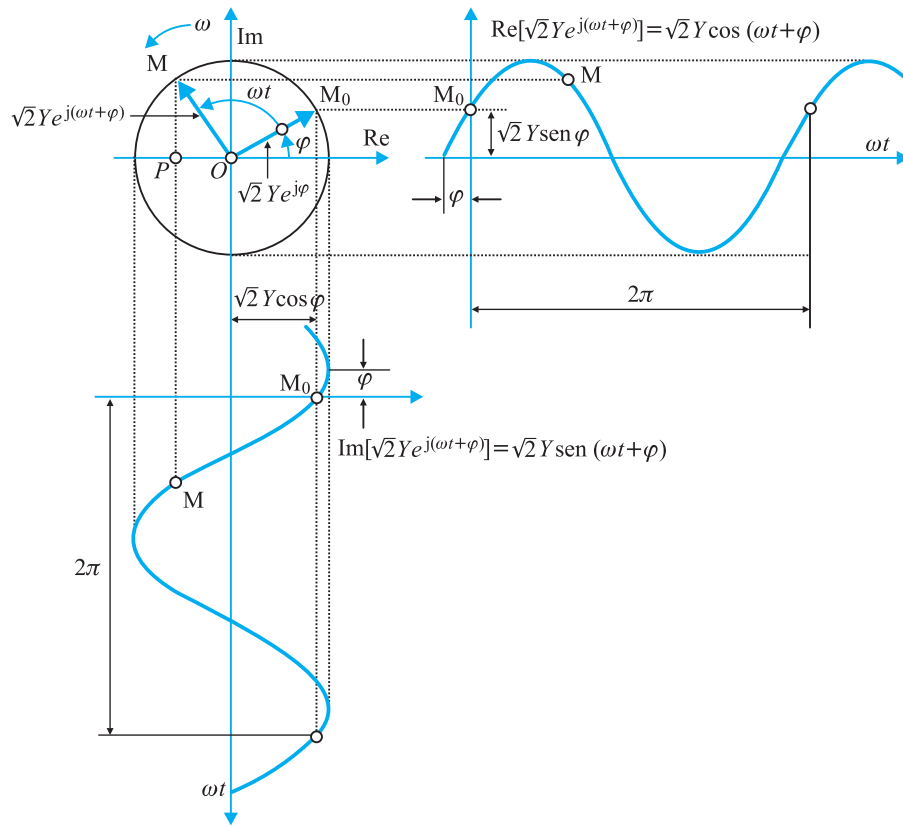


Figura 2.5 Vector giratorio y sus proyecciones: horizontal (coseno) y vertical (seno)

la posición correspondiente se señala en la Figura 2.5 por el vector $\overline{OM}_0$, que admite la siguiente expresión exponencial:

$$\overline{OM} = \sqrt{2} Y e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (2.28)$$

ahora bien, teniendo en cuenta la identidad de Euler, la expresión anterior se puede escribir de una forma equivalente:

$$\overline{OM} = \sqrt{2} Y \cos(\omega t + \varphi) + j \sqrt{2} Y \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.29)$$

la parte real de la expresión anterior es igual a:

$$\text{Re}[\sqrt{2} Y e^{j(\omega t + \varphi)}] = \sqrt{2} Y \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.30)$$

que representa la proyección en el eje real (eje X) del vector giratorio ($\sqrt{2} Y$). La parte imaginaria de (2.29) es:

$$\text{Im}[\sqrt{2} Y e^{j(\omega t + \varphi)}] = \sqrt{2} Y \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.31)$$

que representa la proyección sobre el eje imaginario (eje Y) del vector giratorio ($\sqrt{2} Y$). En la Figura 2.5 se muestran ambas componentes, real e imaginaria, que corresponden a las

ondas coseno o seno. De este modo se infiere que el conocimiento del vector giratorio $\sqrt{2} Y e^{j(\omega t + \varphi)}$ hace que se conozca la evolución de una onda sinusoidal con el tiempo. El vector giratorio (2.28) se puede representar también del siguiente modo:

$$(\sqrt{2} Y e^{j\varphi}) e^{j\omega t} \quad (2.32)$$

la parte interior del paréntesis, representa la posición del vector en $t = 0$, mientras que el término $e^{j\omega t}$ cuyo módulo es la unidad, indica el movimiento del vector. (En cierto modo, se puede considerar que $e^{j\omega t}$ es un operador matemático que aplicado a un vector hace que este gire). Se denomina **fasor** a la cantidad compleja:

$$\underline{Y} = \sqrt{2} Y e^{j\varphi} \quad (2.33)$$

de esta nomenclatura se deduce, de un modo inmediato, el tamaño del vector ($\sqrt{2} Y$) y su posición en $t = 0$, definida por el ángulo φ . En la práctica de la ingeniería eléctrica se prefiere hacer uso de fasores en valores eficaces y de acuerdo con las Normas UNE-EN 60027-1 (*Símbolos literales utilizados en Electrotecnia*) y UNE-EN 60375 (*Convenios relativos a los circuitos eléctricos y magnéticos*) se representan los fasores en letra itálica (inclinada) subrayándose el símbolo de la magnitud, tal como se indica a continuación:

$$\underline{Y} = Y e^{j\varphi} \quad (2.34)$$

La variable compleja anterior admite una representación en forma polar (notación de Kennelly):

$$\underline{Y} = Y \angle \varphi \quad (2.35)$$

Se observa que conocido el valor de un *fasor* (módulo Y o $\sqrt{2} Y$ y su fase φ) queda determinada la evolución sinusoidal. Si se utilizan siempre funciones coseno, el fasor (2.35) da lugar a:

$$\text{Re}[\sqrt{2} \underline{Y} e^{j\omega t}] = \text{Re}[\sqrt{2} Y e^{j\varphi} e^{j\omega t}] = \sqrt{2} Y \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.36)$$

La idea de utilizar vectores giratorios para representar señales sinusoidales se debe a Fresnel, sin embargo su aplicación a la Electricidad es debida a Steinmetz y Kennelly. La representación fasorial permite ver con sencillez el desfase entre diferentes magnitudes sinusoidales e interpretar geoméricamente las operaciones efectuadas sobre las magnitudes que representan. Considérese por ejemplo los siguientes valores instantáneos de tensión y corriente:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u) \quad ; \quad i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (2.37)$$

los correspondientes valores fasoriales son:

$$\underline{U} = U \angle \varphi_u \quad ; \quad \underline{I} = I \angle \varphi_i \quad (2.38)$$

cuya representación se muestra en la Figura 2.6a (en valores eficaces). Obsérvese que ambos fasores al girar a la misma velocidad ω , siempre tendrán la misma posición relativa. El

desfase de los fasores de la Figura 2.6a es: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$, lo que indica que la tensión se adelanta a la corriente (o la corriente se retrasa a la tensión).

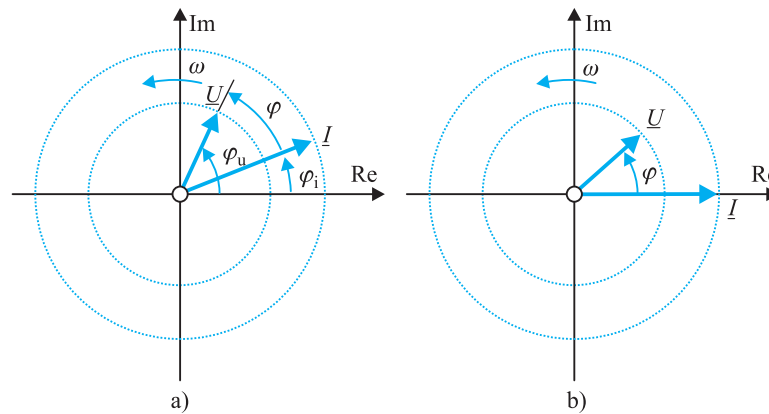


Figura 2.6 Representación fasorial de tensiones y corrientes

En muchos casos es conveniente tomar una de las señales como referencia de fases, lo que simplifica el cálculo con los números complejos. Por ejemplo en la Figura 2.6b, se ha repetido la Figura 2.6a tomando la corriente como referencia, el desfase entre ambos vectores giratorios sigue siendo φ , pero el instante en que se han dibujado los fasores ya no es en $t = 0$, sino otro diferente.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.1

Calcular la suma de las tensiones instantáneas: $u_1(t) = 20 \cos(100t + 30^\circ)$, $u_2(t) = 30 \cos(100t + 60^\circ)$; utilizando fasores equivalentes máximos. Representar: a) diagrama fasorial, b) diagrama en el tiempo.

Solución

Los fasores máximos son:

$$\underline{U}_1 = 20 \angle 30^\circ \quad ; \quad \underline{U}_2 = 30 \angle 60^\circ$$

cuya suma es:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 20 \angle 30^\circ + 30 \angle 60^\circ = (17,32 + j10) + (15 + j25,98) = 32,32 + j35,98$$

es decir:

$$\underline{U}_T = 48,4 \angle 48,1^\circ = 48,4 e^{j48,1^\circ}$$

en la Figura 2.7 se muestra la suma fasorial correspondiente y la representación de las ondas en el tiempo. La expresión instantánea de la tensión total es por lo tanto:

$$u_T(t) = \text{Re}[48,4 e^{j48,1^\circ} e^{j\omega t}] = 48,4 \cos(100t + 48,1^\circ)$$

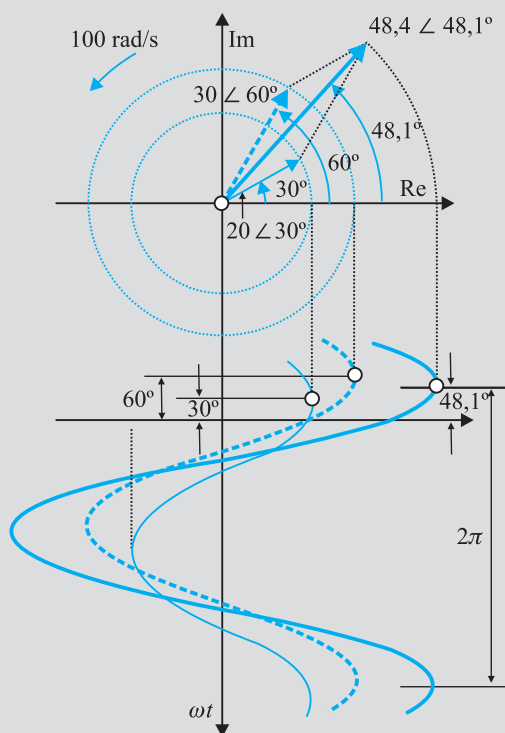


Figura 2.7 Ejemplo de aplicación 2.1

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.2**

Calcular la suma de las siguientes corrientes: $i_1(t) = \sqrt{2} 10 \cos(3t + 30^\circ)$; $i_2(t) = \sqrt{2} 20 \cos(3t - 60^\circ)$, en la forma $i_T(t) = \sqrt{2} I \cos(3t + \varphi)$ utilizando fasores equivalentes (eficaces).

Solución

Los fasores eficaces de ambas corrientes son:

$$\underline{I}_1 = 10 \angle 30^\circ \quad ; \quad \underline{I}_2 = 20 \angle -60^\circ$$

La suma de ambas corrientes complejas es igual a:

$$\underline{I}_T = 10 \angle 30^\circ + 20 \angle -60^\circ \approx (8,7 + j5) + (10 - j17,3) \approx 18,7 - j12,3$$

es decir:

$$\underline{I}_T = 22,4 \angle -33,4^\circ$$

cuyo diagrama fasorial se muestra en la Figura 2.8. Por consiguiente el valor instantáneo de la corriente es:

$$i_T(t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2} 22,4 e^{-j33,4^\circ} e^{j3t}] = \sqrt{2} 22,4 \cos(3t - 33,4^\circ)$$

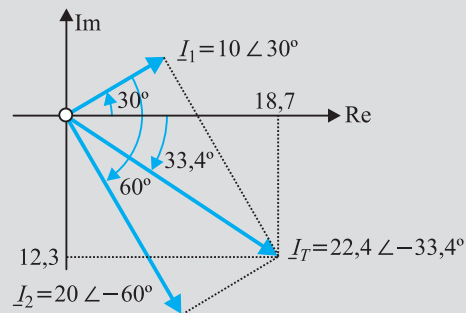


Figura 2.8 Suma de fasores del ejemplo de aplicación 2.2

El lector puede considerar muy artificioso trabajar con fasores eficaces, ya que las expresiones instantáneas finales utilizan valores máximos así que *¿por qué no trabajar directamente con fasores máximos como en el problema anterior?* Efectivamente en este problema sería más simple utilizar fasores máximos, pero es conveniente que el lector se acostumbre a trabajar con fasores eficaces, porque como se verá más adelante es más útil en el estudio de los circuitos eléctricos.

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.3

Calcular la suma de las siguientes tensiones: $u_1(t) = \sqrt{2} \, 10 \sin(10t + 45^\circ)$; $u_2(t) = 20 \cos(10t + 60^\circ)$ en la forma: $u_T(t) = \sqrt{2} \, U \cos(10t + \varphi)$ utilizando fasores equivalentes (eficaces).

Solución

Antes de comenzar el problema han de referirse ambas señales a la expresión coseno identificando claramente los valores eficaces. Así resulta:

$$u_1(t) = \sqrt{2} \, 10 \sin(10t + 45^\circ) = \sqrt{2} \, 10 \cos(10t + 45^\circ - 90^\circ) = \sqrt{2} \, 10 \cos(10t - 45^\circ)$$

$$u_2(t) = 20 \cos(10t + 60^\circ) = \sqrt{2} \, \frac{20}{\sqrt{2}} \cos(10t + 60^\circ)$$

de este modo se identifican fácilmente los fasores eficaces:

$$\underline{U}_1 = 10 \angle -45^\circ \quad ; \quad \underline{U}_2 = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ$$

que se pueden representar en un diagrama fasorial. La suma de ambas tensiones complejas es:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 10 \angle -45^\circ + \frac{20}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ = (7,07 - j7,07) + (7,07 + j12,25)$$

es decir:

$$\underline{U}_T = (14,14 + j5,18) \approx 15,1 \angle 20,1^\circ$$

que corresponde a un valor instantáneo:

$$u_T(t) = \sqrt{2} \, 15,1 \cos(10t + 20,1^\circ)$$

2.4. Derivada e integral de una magnitud sinusoidal

Consideremos una señal sinusoidal de valor eficaz Y y fase φ . Su valor instantáneo es por consiguiente:

$$y(t) = \sqrt{2} Y \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.39)$$

la derivada con respecto al tiempo de la señal anterior vale:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\sqrt{2} Y \omega \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} Y \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.40)$$

que representa una función sinusoidal, cuyo valor eficaz es ω veces el valor eficaz Y de la señal $y(t)$ y que va adelantada 90° respecto de ella. La integral de $y(t)$ (integral particular, supuesta la constante de integración nula) vale:

$$\int y(t) dt = \sqrt{2} \frac{Y}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} \frac{Y}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.41)$$

que representa una función sinusoidal, cuyo valor eficaz es $1/\omega$ veces el valor eficaz Y de la señal $y(t)$ y que va retrasada 90° respecto de ella. Los resultados anteriores se pueden obtener también partiendo de funciones exponenciales, lo que permite además ver el significado geométrico de las operaciones: derivación e integración. Si se parte de la función exponencial $y_e(t)$:

$$y_e(t) = \sqrt{2} Y e^{j(\omega t + \varphi)} = \sqrt{2} Y e^{j\varphi} e^{j\omega t} \quad (2.42)$$

cuya parte real es la función de partida señalada en (2.39), ya que se cumple:

$$\text{Re}[y_e(t)] = y(t)$$

Al derivar e integrar (2.42) empleando el operador derivada D e integral $1/D$ respectivamente se obtiene:

$$Dy_e = \sqrt{2} Y e^{j\varphi} j\omega e^{j\omega t} = j\omega y_e \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{D} y_e = \sqrt{2} Y e^{j\varphi} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} y_e \quad (2.44)$$

cuyo resultado nos indica que en el campo exponencial, el operador D equivale a $j\omega$, y el operador $1/D$ equivale a $1/j\omega$. Por otro lado de acuerdo con la fórmula de Euler, se puede escribir:

$$j = e^{j\pi/2} \quad ; \quad \frac{1}{j} = -j = e^{-j\pi/2} \quad (2.45)$$

que llevando a (2.43) y (2.44) da lugar a:

$$Dy_e = \sqrt{2} Y e^{j\varphi} e^{j\pi/2} \omega e^{j\omega t} = \sqrt{2} Y \omega e^{j(\varphi + \pi/2)} e^{j\omega t} \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{D} y_e = \sqrt{2} Y e^{j\varphi} \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \frac{Y}{\omega} e^{j(\varphi - \pi/2)} e^{j\omega t} \quad (2.47)$$

el lector puede comprobar que al tomar la parte real de (2.46) y (2.47) se obtienen las mismas expresiones instantáneas sinusoidales calculadas directamente en (2.40) y (2.41). Para ver el significado geométrico de las expresiones anteriores, se deduce que los fasores equivalentes a:

$$y_e(t) \text{ o } y(t) \quad ; \quad Dy_e \quad ; \quad \frac{1}{D}y_e$$

son:

$$\begin{aligned} y_e &\Rightarrow \underline{Y} = Y e^{j\varphi} = Y \angle \varphi \\ Dy_e &\Rightarrow Y \omega e^{j(\varphi + \pi/2)} = Y \omega \angle (\varphi + \pi/2) = j\omega \underline{Y} \\ \frac{1}{D}y_e &\Rightarrow \frac{Y}{\omega} e^{j(\varphi - \pi/2)} = \frac{Y}{\omega} \angle (\varphi - \pi/2) = \frac{\underline{Y}}{j\omega} \end{aligned} \quad (2.48)$$

en la Figura 2.9 se han representado los tres fasores simultáneamente. Se observa que: **el fador que representa la derivada (la integral) de una función sinusoidal se obtiene a partir del fador representativo de la misma multiplicando (dividiendo) su módulo por la pulsación ω y aumentando (disminuyendo) su fase en $\pi/2$, es decir 90° .**

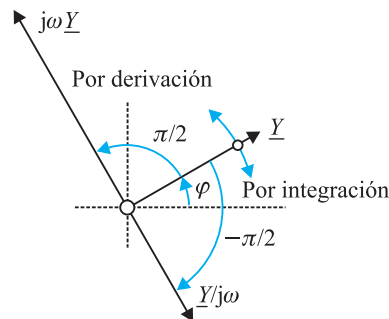


Figura 2.9 Fador: su derivada y su integral

■ 2.5. El dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia

Vamos a demostrar en este epígrafe la utilidad de la función exponencial (en definitiva de los fasores), en el análisis de los circuitos de corriente alterna. Consideremos el circuito de la Figura 2.10, formado por una resistencia R en serie con una inductancia L , alimentadas por un generador de tensión sinusoidal, cuya expresión instantánea es:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (2.49)$$

el problema consiste en calcular la expresión instantánea de la corriente $i(t)$ que circula por la malla del circuito. Las polaridades señaladas en la Figura 2.10 representan los signos de las tensiones en el momento considerado.

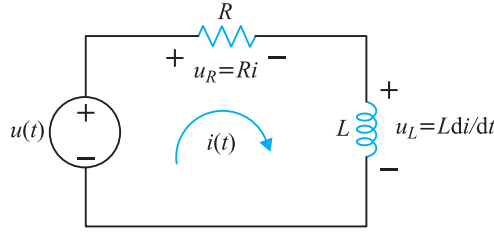


Figura 2.10 Circuito R-L en corriente alterna

Al aplicar el segundo lema de Kirchhoff a la malla de la Figura 2.10 se obtiene:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (2.50)$$

la ecuación anterior define el comportamiento del circuito *en el dominio del tiempo*. Tal denominación se utiliza en las redes, cuando se conocen o desean calcular las expresiones de $u(t)$ e $i(t)$ en función del tiempo. En este capítulo nos interesa calcular la solución particular de (2.50) que representa la respuesta en *régimen permanente* de la red² y que también se denomina *respuesta forzada*. Esta solución no se va a obtener directamente por integración de la ecuación diferencial (2.50) en el dominio del tiempo, sino empleando una *transformación fasorial*. Para proceder a esta transformación, vamos a considerar que la tensión del generador es exponencial:

$$u_e(t) = \sqrt{2} U e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \sqrt{2} U e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \underline{U} e^{j\omega t} \quad (2.51)$$

donde:

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$$

representa el fasor eficaz de la tensión generadora. Obsérvese que la tensión real $u(t)$ es la parte real de $u_e(t)$, es decir $u(t) = \text{Re}[u_e(t)]$. La ecuación (2.50) se convierte en:

$$L \frac{di_e}{dt} + Ri_e = \sqrt{2} \underline{U} e^{j\omega t} \quad (2.52)$$

cuya solución i_e está relacionada con la corriente real i por:

$$i = \text{Re}[i_e] \quad (2.53)$$

Es razonable suponer que la solución de (2.52) es una corriente exponencial de la forma:

$$i_e(t) = \sqrt{2} \underline{I} e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \quad (2.54)$$

donde:

$$\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$$

² La solución de la homogénea de (2.50) constituye la respuesta transitoria que es una función exponencial que tiende a cero con el tiempo. Ver comentarios prácticos al final del Epígrafe 2.5.

indica el valor fasorial de la corriente. De acuerdo con el epígrafe anterior, la derivada de $i_e(t)$ será igual a:

$$\frac{di_e(t)}{dt} = \sqrt{2} j\omega \underline{I} e^{j\omega t} \quad (2.55)$$

al sustituir (2.54) y (2.55) en (2.52) se obtiene:

$$\sqrt{2} j\omega L \underline{I} e^{j\omega t} + \sqrt{2} R \underline{I} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \underline{U} e^{j\omega t} \quad (2.56)$$

que dividiendo por $\sqrt{2} e^{j\omega t}$ da lugar a:

$$j\omega L \underline{I} + R \underline{I} = \underline{U} \quad (2.57)$$

de donde se deduce:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L} = \frac{U \angle \varphi_u}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \varphi} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (\varphi_u - \varphi) \quad (2.58)$$

siendo el valor de φ :

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

La corriente exponencial $i_e(t)$ se obtiene sustituyendo (2.58) en (2.54), lo que da lugar a:

$$i_e(t) = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t + \varphi_u - \varphi)} \quad (2.59)$$

que al tomar la parte real, se obtiene según (2.53) la corriente sinusoidal $i(t)$:

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \varphi_u - \varphi) \quad (2.60)$$

la corriente anterior es la solución de la ecuación diferencial de partida (2.50). La ecuación fasorial (2.57) define el comportamiento del circuito en el *dominio de la frecuencia*, y es una ecuación análoga a la de partida (2.50) que definía el comportamiento del circuito en el *dominio del tiempo*. Es importante que el lector comprenda en este ejemplo simple, el proceso de transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, que permite pasar de la ecuación (2.50) a la (2.57), lo que significa transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica, cuya solución es muy simple aplicando las reglas del álgebra compleja. En la Figura 2.11 se muestra el proceso general de transformación, cuya metodología se ajusta a las siguientes normas:

1. Describir todos los generadores del circuito en términos de la función coseno:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u)$$

de acuerdo con esto el fasor correspondiente será de la forma:

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u} = U \angle \varphi_u$$

en el caso de que existan fuentes expresadas en términos del seno, transformarlas en coseno de acuerdo con la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Transformar las ecuaciones diferenciales (o integro-diferenciales) de la red en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, para ello sustituir el operador D por $j\omega$ y el operador $1/D$ por $1/j\omega$, expresando también los valores de tensiones y corrientes en la forma fasorial.
3. Resolver las ecuaciones fasoriales resultantes, utilizando procedimientos del álgebra compleja, determinando de este modo las corrientes de la red.
4. Los fasores de las corrientes proporcionan los datos de magnitud y fase. A partir de ellos, escribir las expresiones instantáneas de las corrientes.

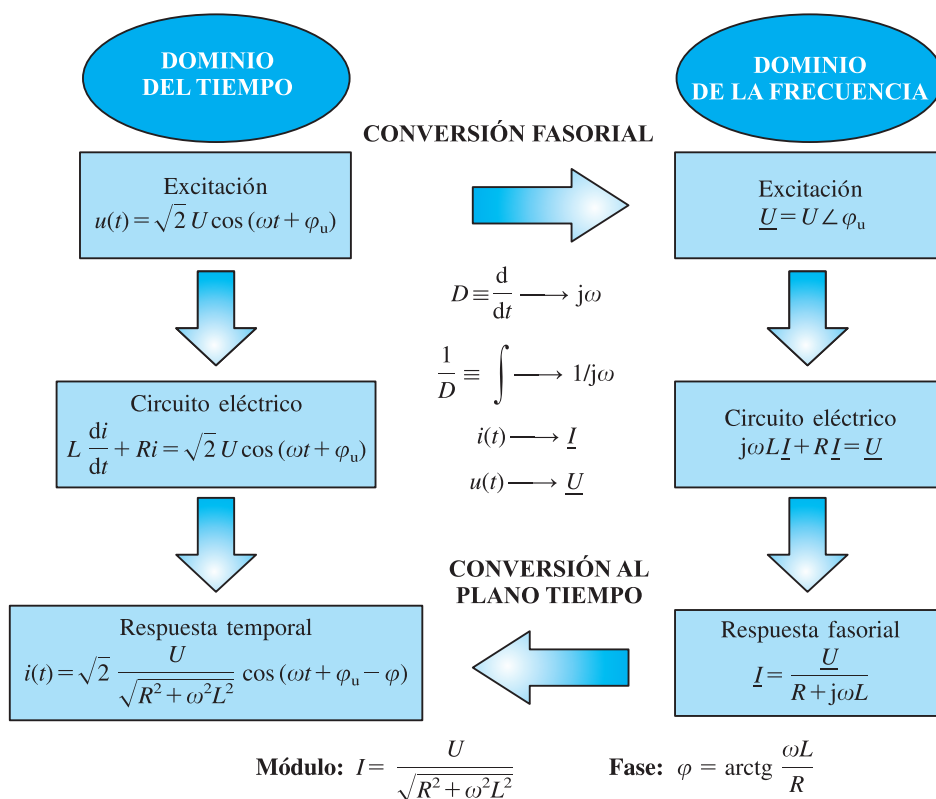


Figura 2.11 Transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia

La metodología aquí descrita, aunque es ventajosa, se puede optimizar todavía más. Cuando se estudien las respuestas sinusoidales de los elementos pasivos en el epígrafe siguiente y se defina el concepto de impedancia compleja seremos capaces de escribir directamente las ecuaciones fasoriales de un circuito, sin necesidad de preparar las ecuaciones integro-diferenciales que lo definen. Con ello se ahorrará una gran cantidad de tiempo y esfuerzo, evitando muchos de los pasos matemáticos que aquí se han seguido.



Amplíe sus conocimientos

Solución completa de un circuito en c.a. sinusoidal

Como se ha indicado en este epígrafe 2.5, la solución (2.60) de la ecuación diferencial (2.50) es la respuesta en régimen permanente del circuito R - L serie. La solución general incluye además otro sumando que se denomina término transitorio. Es fácil determinar la solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden. Considérese para ello la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{di}{dt} + pi = q(t) \quad (1)$$

en la que $i = i(t)$ es la corriente, p es una constante y $q(t)$ una función de la variable independiente t (que en algún caso particular puede ser incluso una constante). La ecuación anterior no se modifica si se multiplica cada miembro de la misma por el mismo factor. Supóngase que este factor es igual a e^{pt} , entonces la ecuación (1) se transforma en:

$$e^{pt} \frac{di}{dt} + pie^{pt} = q(t)e^{pt} \quad (2)$$

que se puede escribir también de este modo:

$$\frac{d}{dt} (ie^{pt}) = q(t)e^{pt} \quad (3)$$

cuya integración conduce al siguiente resultado:

$$ie^{pt} = \int q(t)e^{pt} dt + K \quad (4)$$

donde K es una constante. La ecuación anterior se puede poner así:

$$i(t) = e^{-pt} \int q(t)e^{pt} dt + Ke^{-pt} \quad (5)$$

que es la solución general de la ecuación diferencial (1). El factor e^{pt} que convierte (1) en la ecuación (2), para que se pueda integrar directamente, se denomina **factor integrante** de (1). En definitiva, este factor convierte la ecuación original (1) en una diferencial exacta. Muchas ecuaciones diferenciales se pueden resolver encontrando un factor integrante adecuado; sin embargo, puede no ser fácil en la práctica saber cuál es el factor adecuado y en los cursos de Análisis Matemático se estudian procedimientos para descubrir factores integrantes para algunas ecuaciones especiales como en el caso de la ecuación diferencial (1). Si se aplican estos conceptos para calcular la solución general de la ecuación (2.52) que corresponde a la excitación exponencial de un circuito R - L , es decir se debe determinar la solución de la siguiente ecuación:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \sqrt{2} U e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad (6)$$

que se puede poner de este modo:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \sqrt{2} \frac{U}{L} e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad (7)$$

que al comparar con (1) da lugar a las equivalencias siguientes:

$$p = \frac{R}{L} \quad ; \quad q(t) = \sqrt{2} \frac{U}{L} e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad (8)$$

por lo que al sustituir (8) en (5) nos lleva a la solución general siguiente:

$$i(t) = e^{-R/Lt} \int \sqrt{2} \frac{U}{L} e^{j(\omega t + \varphi_u)} e^{R/Lt} dt + K e^{-R/Lt} \quad (9)$$

cuyo resultado es inmediato:

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{U}{R + j\omega L} e^{j(\omega t + \varphi_u)} + K e^{-R/Lt} \quad (10)$$

el primer sumando de la ecuación anterior es la solución particular o de régimen permanente que coincide con la solución (2.59) y el segundo sumando es la función complementaria, o solución de la ecuación homogénea de (6), es decir: el primer sumando de la ecuación anterior es la integral particular de (6) y el segundo es la función complementaria o integral de la homogénea de (6), es decir, el resultado que se obtiene al anular el segundo miembro, o de otro modo, el primer sumando de (10) es la respuesta en régimen permanente del circuito y el segundo sumando es la respuesta transitoria. Se puede determinar la constante K que aparece en el término transitorio de (10) conociendo el valor de la corriente en un determinado instante de tiempo. Si se considera, por ejemplo, que $i(t) = 0$ para $t = 0$, la ecuación (10) se transforma en:

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{U}{R + j\omega L} e^{j(\omega t + \varphi_u)} - \sqrt{2} \frac{U e^{j\varphi_u}}{R + j\omega L} e^{-R/Lt} \quad (11)$$

es decir:

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t + \varphi_u - \varphi)} - \sqrt{2} \frac{U e^{j(\varphi_u - \varphi)}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-R/Lt} \quad (12)$$

donde $\varphi = \arctg(\omega L/R)$. En el caso de que la función de excitación sea tipo coseno, en vez de exponencial, al tomar la parte real de (12) resulta:

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi) - \sqrt{2} \frac{U \cos(\varphi_u - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-R/Lt} \quad (13)$$

cuyo primer sumando coincide con el resultado (2.60), es decir, es la respuesta en régimen permanente y el segundo sumando de (13) es la respuesta transitoria que se anula cuando el tiempo t tiende a infinito. En este capítulo se analizan las respuestas de los circuitos eléctricos exclusivamente en régimen permanente. En el Capítulo 4 se estudian los circuitos en régimen transitorio. El régimen transitorio, a pesar de su corta duración, es de gran importancia en la Ingeniería Eléctrica, para determinar los efectos de sobrecorrientes y sobretensiones que aparecen en los momentos de apertura y cierre de interruptores en una red eléctrica, generadores de forma de onda en electrónica, estudio de cortocircuitos, etc.

2.6. Respuesta sinusoidal de los elementos pasivos

Vamos a analizar en este epígrafe la respuesta en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia de los tres elementos pasivos simples: resistencia, inductancia y capacidad. Supóngase que se conoce la corriente que circula por estos elementos y que sea de la forma:

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (2.61)$$

se trata de calcular la tensión terminal existente en cada uno de ellos que responderá a la forma general:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (2.62)$$

la solución del problema será encontrar los valores de U y φ_u en función de I y φ_i y de los parámetros R , L y C . Las expresiones fasoriales de la tensión y de la corriente son:

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u} = U \angle \varphi_u \quad ; \quad \underline{I} = I e^{j\varphi_i} = I \angle \varphi_i \quad (2.63)$$

A partir de estas expresiones y conociendo las relaciones entre $u(t)$ e $i(t)$ para cada elemento pasivo, podremos determinar su respuesta sinusoidal; y así se tiene:

a) Resistencia

En la Figura 2.12a se ha representado una resistencia en el dominio del tiempo. De acuerdo con la ley de Ohm, se cumple:

$$u(t) = Ri(t) \quad (2.64)$$

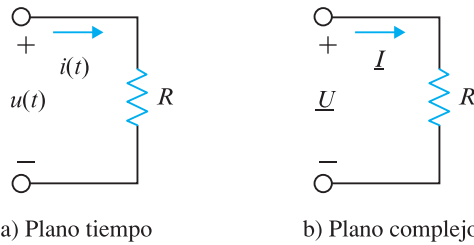


Figura 2.12 Relación tensión-corriente en una resistencia

la relación anterior en el dominio de la frecuencia (campo complejo) de acuerdo con las reglas establecidas en el apartado anterior es:

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} \quad (2.65)$$

En la Figura 2.12b se muestra el circuito equivalente correspondiente a la ecuación fasorial (2.65), que representa en definitiva un circuito en el dominio de la frecuencia. El lector puede observar la analogía entre (2.64) y (2.65). Si se tiene en cuenta (2.63) y (2.65) resulta:

$$U \angle \varphi_u = RI \angle \varphi_i \quad (2.66)$$

de donde se deduce:

$$U = RI \quad ; \quad \varphi_u = \varphi_i \quad (2.67)$$

por consiguiente los valores sinusoidales de la corriente y la tensión en una resistencia son:

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i) \quad ; \quad u(t) = \sqrt{2} RI \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (2.68)$$

en la Figura 2.13a se muestran estas señales sinusoidales tal como se verían en un osciloscopio, que van en fase ($\varphi_u = \varphi_i$) y cuyos valores eficaces están relacionados según deter-

mina la ley de Ohm de acuerdo con (2.67). En la Figura 2.13b se ha representado el diagrama fasorial correspondiente. Ambos fasores están alineados ya que las dos sinusoides están en fase.

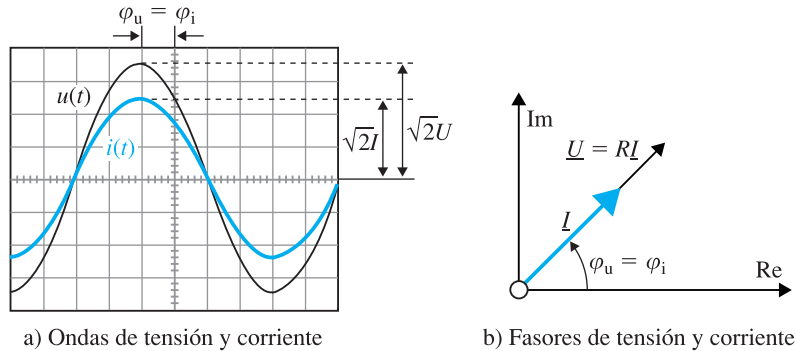


Figura 2.13 Respuesta de una resistencia en corriente alterna

b) Inductancia

En la Figura 2.14a se ha representado una bobina en el dominio del tiempo. Sabemos que la relación entre la tensión aplicada $u(t)$ y la corriente $i(t)$ es igual a:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.69)$$

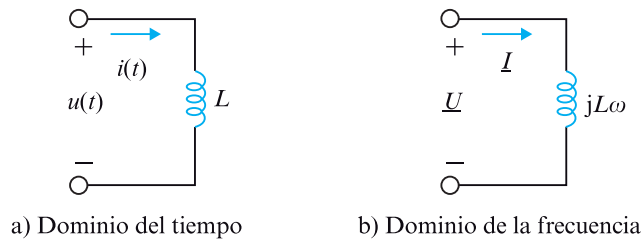


Figura 2.14 Relación tensión-corriente en una inductancia

la relación anterior en el dominio de la frecuencia (sustituyendo el operador derivada por $j\omega$) es:

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I} \quad (2.70)$$

cuyo circuito equivalente se muestra en la Figura 2.14b. Observamos en (2.70), una ecuación análoga a la ley de Ohm, en la que la tensión compleja es proporcional a la corriente compleja por medio de un factor de proporcionalidad que vale $j\omega L$.

Si se tiene en cuenta (2.63) y (2.70) resulta:

$$U \angle \varphi_u = j\omega L I \angle \varphi_i = \omega L I \angle (\varphi_i + 90^\circ) \quad (2.71)$$

es decir:

$$U = \omega L I \quad ; \quad \varphi_u = \varphi_i + 90^\circ \quad (2.72)$$

de este modo los valores instantáneos $u(t)$ e $i(t)$ en una inductancia son:

$$u(t) = \sqrt{2} \omega L I \cos(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) \quad ; \quad i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (2.73)$$

en la Figura 2.15 se han representado estas dos señales tal como se verían en un osciloscopio. Se observa que la tensión está adelantada respecto de la corriente un ángulo de 90° . El módulo eficaz de la tensión U es igual a $\omega L I$. En la Figura 2.15b se han representado los fasores correspondientes, y se observa que $\underline{U}$ está adelantado 90° respecto de $\underline{I}$, es decir están en cuadratura.

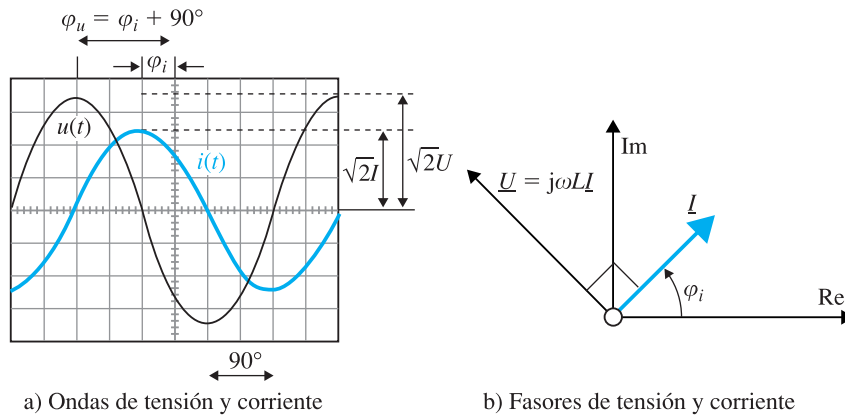


Figura 2.15 Respuesta de una inductancia en corriente alterna

c) Capacidad

En la Figura 2.16a se ha representado un condensador en el dominio del tiempo. Sabemos que la relación entre la tensión $u(t)$ y la corriente $i(t)$ es de la forma:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2.74)$$

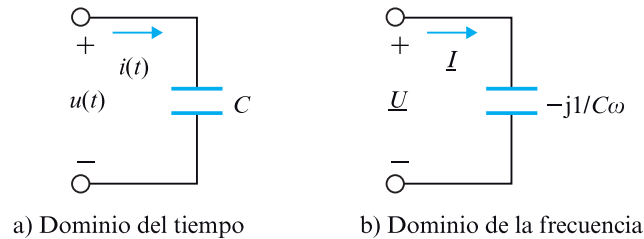


Figura 2.16 Relación tensión-corriente en una capacidad

la relación anterior en el dominio de la frecuencia (sustituyendo el operador integral por $1/j\omega$) es:

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I} \quad (2.75)$$

cuyo circuito equivalente se ha representado en la Figura 2.16b. La tensión compleja $\underline{U}$ es proporcional a la corriente compleja $\underline{I}$, mediante el factor $1/j\omega C$ o lo que es equivalente $-j(1/\omega C)$. Si se tiene en cuenta (2.63) y (2.75) resulta:

$$U \angle \varphi_u = -j \frac{1}{\omega C} I \angle \varphi_i = \frac{1}{\omega C} I \angle (\varphi_i - 90^\circ) \quad (2.76)$$

es decir:

$$U = \frac{1}{\omega C} I \quad ; \quad \varphi_u = \varphi_i - 90^\circ \quad (2.77)$$

de este modo los valores instantáneos $u(t)$ e $i(t)$ en una capacidad son:

$$u(t) = \sqrt{2} \frac{1}{\omega C} I \cos(\omega t + \varphi_i - 90^\circ) \quad ; \quad i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (2.78)$$

en la Figura 2.17a se han representado las dos señales tal como se verían en un osciloscopio. La tensión está retrasada a la corriente un ángulo de 90° . En la Figura 2.17b se han representado los fasores correspondientes, que están en cuadratura.

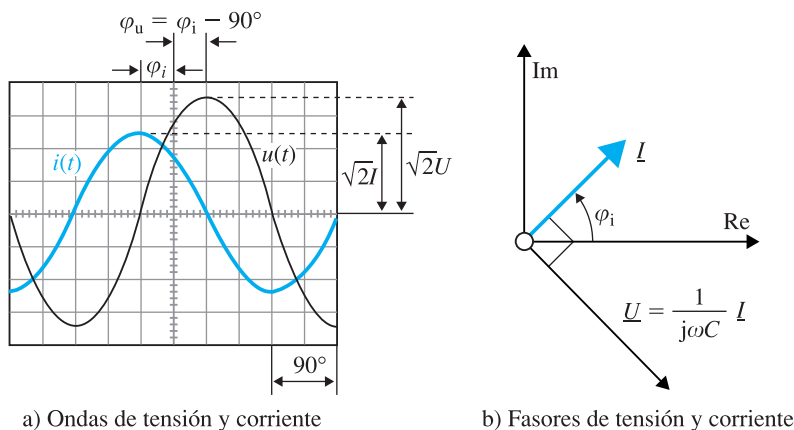


Figura 2.17 Respuesta de una capacidad en corriente alterna

2.7. Impedancia y admitancia complejas

Las relaciones fasoriales $\underline{U} = f(\underline{I})$ de los elementos pasivos simples calculadas en el epígrafe anterior son de la forma:

Resistencia: $\underline{U} = R \underline{I}$

Inductancia: $\underline{U} = j\omega L \underline{I} \quad (2.79)$

Capacidad: $\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}$

las ecuaciones anteriores indican que el fasor tensión puede expresarse como el producto de una cierta expresión compleja, que en el caso de una resistencia se reduce a una constante por el fasor corriente. De un modo análogo al estudiado en el epígrafe del capítulo anterior, la expresión compleja anterior cociente entre el fasor tensión y el fasor corriente se denomina *impedancia compleja* $\underline{Z}(j\omega)$. En la Figura 2.18 se muestra el símbolo de la impedancia compleja (que es un rectángulo), de tal forma que se cumple la denominada *ley de Ohm en notación fasorial*:

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \quad (2.80)$$

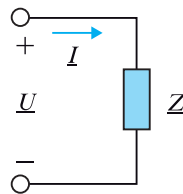


Figura 2.18 Símbolo de la impedancia

La relación (2.80) engloba las tres ecuaciones (2.79). Es importante hacer notar que $\underline{Z}$ o $\underline{Z}(j\omega)$ es un número complejo, pero **no es un fasor**, ya que no se corresponde con ninguna función sinusoidal en el dominio del tiempo como le ocurre a los fasores de tensión y corriente. Comparando (2.80) con (2.79) vemos que se cumple:

$$\text{Resistencia: } \underline{Z} = R$$

$$\text{Inductancia: } \underline{Z} = j\omega L \quad (2.81)$$

$$\text{Capacidad: } \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$$

en estas ecuaciones, cada término es el cociente entre un fasor de tensión y un fasor de corriente, en consecuencia R , $j\omega L$, $-j(1/\omega C)$ y en general $\underline{Z}$ se medirán en *ohmios*. Para la resistencia, la impedancia es un número real; para la inductancia, es un número imaginario puro con argumento $\pi/2$ y para la capacidad, es un número imaginario puro con argumento $-\pi/2$. Como ocurre con cualquier número complejo, la impedancia se puede expresar en forma binómica o rectangular del siguiente modo:

$$\underline{Z} = R + jX \quad (2.82)$$

la parte real de $\underline{Z}$ es la componente resistiva o simplemente *resistencia*, la parte imaginaria es la componente reactiva o simplemente *reactancia*. Tanto R , como X y como $\underline{Z}$ se medirán en ohmios. Comparando (2.82) con (2.81) vemos que una inductancia presenta una reactancia positiva ($X > 0$) mientras que una capacidad supone una reactancia negativa ($X < 0$). En la Figura 2.19 se ha representado la relación (2.82), el módulo y argumento de la impedancia son respectivamente:

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad ; \quad \theta = \arctg \frac{X}{R} \quad (2.83)$$

y por consiguiente se cumple en el *triángulo de impedancias* de la Figura 2.19 las relaciones siguientes:

$$R = Z \cos \theta \quad ; \quad X = Z \sin \theta \quad (2.84)$$

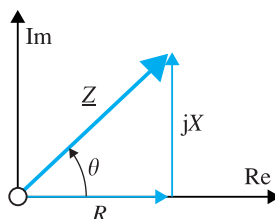


Figura 2.19 Triángulo de impedancias

La inversa de la impedancia se denomina *admitancia* $\underline{Y}$ y se cumple:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB \quad (2.85)$$

la parte real de la admitancia se denomina conductancia G , y la parte imaginaria recibe el nombre de *susceptancia* B . Las magnitudes G , B e Y se miden en *siemens* ya que proceden del cociente entre una corriente y una tensión. Las relaciones entre R , X , G y B se deducen de la definición (2.85):

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{1}{R + jX} \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \quad (2.86)$$

de donde resulta:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad ; \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (2.87)$$

debe destacarse entonces que G no es la inversa de R , excepto en el caso de tener un circuito simplemente resistivo (ya que entonces $X = 0$). De un modo similar la susceptancia B no es la inversa de X , pero en un circuito reactivo puro (en el que $R = 0$) se tiene que $B = -1/X$. Si se aplica la definición (2.85) a los elementos pasivos simples se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Resistencia:} \quad & \underline{Y} = G \\ \text{Inductancia:} \quad & \underline{Y} = -j/L\omega \\ \text{Capacidad:} \quad & \underline{Y} = j\omega C \end{aligned} \quad (2.88)$$

que son las expresiones de las admitancias de los elementos pasivos simples.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.4

Se dispone de un dipolo pasivo alimentado por una tensión sinusoidal:

$$u(t) = 10\sqrt{2} \cos 10t + 20 \sin (10t + 45^\circ)$$

Si la corriente absorbida es: $i(t) = 10 \cos (10t + 45^\circ)$ determinar la impedancia equivalente del dipolo.

Solución

Los fasores de tensión eficaz y de corriente son respectivamente:

$$\underline{U} = 10 \angle 0^\circ + \frac{20}{\sqrt{2}} \angle (45^\circ - 90^\circ) = 20 - j10 \quad ; \quad \underline{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 5 + j5$$

por consiguiente la impedancia compleja equivalente del dipolo es igual a:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{20 - j10}{5 + j5} = 1 - j3 \, \Omega$$

que representa una resistencia de $1 \, \Omega$ en serie con un condensador de capacidad:

$$3 = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{1}{3 \cdot 10} = 0,0333 \text{ Faradios}$$

■ 2.8. Análisis de circuitos en régimen permanente sinusoidal

■ 2.8.1. Generalidades

El análisis de circuitos excitados por c.a. sinusoidal puede hacerse en el dominio de la frecuencia utilizando la representación fasorial, bien en forma gráfica o analítica. En el Epígrafe 2.5 se desarrolló un procedimiento analítico que permitía pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, para ello se sustituían las excitaciones sinusoidales por excitaciones exponenciales, se escribían a continuación las ecuaciones integro-diferenciales que describían el comportamiento del circuito, sustituyendo los operadores derivada e integral por $j\omega$ y $1/j\omega$ respectivamente, y al dividir el sistema de ecuaciones por $e^{j\omega t}$ se obtenían estas ecuaciones fasoriales correspondientes. Una vez resueltas estas ecuaciones por procedimientos algebraicos se multiplicaban las soluciones por $\sqrt{2} e^{j\omega t}$ y tomando la parte real se volvía al dominio del tiempo.

El proceso de cálculo anterior se puede optimizar teniendo en cuenta el concepto de impedancia compleja desarrollado en el Epígrafe 2.7. La idea consiste en sustituir la red en el dominio del tiempo por una red fasorial en el dominio de la frecuencia, a la cual se aplicarán los lemas de Kirchhoff directamente en forma fasorial. La red fasorial se deriva directamente de la red en el dominio del tiempo, sustituyendo las tensiones y corrientes por sus fasores correspondientes y cambiando los elementos de la red por las impedancias complejas (ver Tabla 2.2).

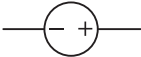
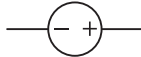
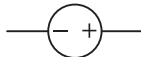
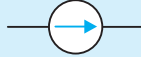
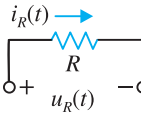
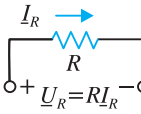
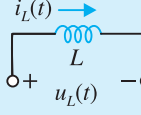
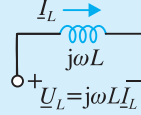
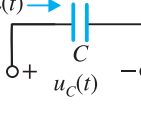
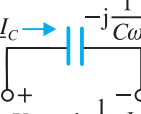
A continuación se puede resolver la red aplicando los lemas de Kirchhoff en forma compleja, que se enunciarían así:

Primer lema de Kirchhoff:

En un nudo, la suma de los fasores de corriente (corrientes complejas) es igual a cero, es decir:

$$\sum \underline{I} = 0 \quad (2.89)$$

Tabla 2.2. Tabla de conversión del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia compleja

Circuito en el dominio del tiempo	Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia compleja
1) Generador de tensión $u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha)$  $u(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \alpha)$ 	1) Generador de tensión $\underline{U} = U \angle \alpha$  $\underline{U} = U \angle (\alpha - 90^\circ)$ 
2) Generador de corriente $i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \beta)$ 	2) Generador de corriente $\underline{I} = I \angle \beta$ 
3) Resistencia 	3) Resistencia 
4) Inductancia 	4) Inductancia 
5) Capacidad 	5) Capacidad 

Segundo lema de Kirchhoff:

En un lazo o malla, la suma de las elevaciones de potencial de los generadores expresada en forma compleja es igual a la suma de las caídas de potencial en las impedancias complejas, es decir:

$$\sum \underline{U}_g = \sum \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad (2.90)$$

Todos los teoremas de circuitos desarrollados en el capítulo anterior son aplicables al régimen sinusoidal, expresando las tensiones y corrientes en forma fasorial y sustituyendo las impedancias operacionales por impedancias complejas.

Consideremos el circuito de la Figura 2.10 resuelto en el Epígrafe 2.5 y que se dibuja en la Figura 2.20a. El circuito equivalente en el dominio de la frecuencia es el indicado en la Figura 2.20b. Al aplicar el segundo lema de Kirchhoff en forma fasorial a esta red resulta:

$$\underline{U} = U \angle \varphi_u = R \underline{I} + j\omega L \underline{I} \quad (2.91)$$

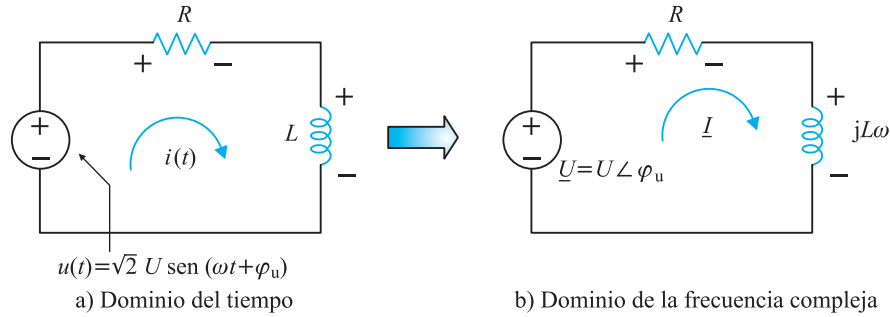


Figura 2.20 Circuito serie R-L

que coincide con la ecuación (2.58) pero escrita aquí de un modo más directo. De la ecuación anterior se deduce:

$$\underline{I} = \frac{U \angle \varphi_u}{R + j\omega L} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (\varphi_u - \varphi) \quad (2.92)$$

donde $\varphi = \arctg(L\omega/R)$. La intensidad instantánea es por consiguiente igual a:

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi) \quad (2.93)$$

Si se compara el procedimiento desarrollado aquí, con el analizado en el Epígrafe 2.5, se confirma la gran eficacia de este método, consistente en representar *a priori* el circuito fasorial, y trabajar con él directamente. Es más, es habitual en la Teoría de Circuitos, presentar los ejercicios y problemas en forma fasorial desde su inicio, dándose por entendido que proceden de un dominio del tiempo sinusoidal.

En muchos problemas es instructivo también trabajar con diagramas fasoriales, que se pueden dibujar conociendo las relaciones entre los fasores de tensión y corriente de los elementos pasivos simples que se explicaron en el Epígrafe 2.6. Para ilustrar este procedimiento consideremos el esquema de la Figura 2.20b. Al tratarse de un *circuito serie*, lo más conveniente es elegir la corriente como fasor de referencia (cuando se trata de circuitos en paralelo es más idóneo tomar la tensión como fasor de referencia). En nuestro caso resulta:

$$\underline{I} = I \angle 0^\circ \quad (2.94)$$

los fasores correspondientes a las tensiones del circuito son:

$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= R \underline{I} = R I \angle 0^\circ \\ \underline{U}_L &= j\omega L \underline{I} = \omega L I \angle 90^\circ \end{aligned} \quad (2.95)$$

lo que confirma lo explicado en el Epígrafe 2.6, de que la tensión en una resistencia está en fase con la corriente, mientras que la tensión en una inductancia se adelanta 90° respecto de la corriente. La tensión del generador es la suma de ambas tensiones:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I \angle \varphi \quad (2.96)$$

donde:

$$\varphi = \arctg \frac{L\omega}{R}$$

En la Figura 2.21a se muestra el diagrama fasorial correspondiente, que representa la suma compleja (2.96). Como quiera que en este problema se fijó el fasor de tensión con una fase de φ_u grados, se observa en la Figura 2.21a que la tensión aplicada U forma φ grados con la referencia del eje real.

Por consiguiente para obtener el diagrama real se debe hacer girar la Figura 2.21a hasta que la fase de U sea igual a φ_u grados. En la Figura 2.21b se ha dibujado el diagrama correspondiente. De aquí se deduce el ángulo $\varphi_i = \varphi_u - \varphi$ y de (2.96) el módulo de la corriente I , resultando:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad ; \quad \varphi_i = \varphi_u - \varphi \quad (2.97)$$

valor que coincide con el obtenido en (2.92). Cuando se tienen circuitos tipo serie, lo normal es construir los diagramas fasoriales tomando la corriente como referencia ya que es el fasor común a todos los elementos de la red. Sin embargo cuando se tienen circuitos con ramas en paralelo, se prefiere tomar la tensión aplicada como referencia ya que ella representa el fasor común a todas las ramas.

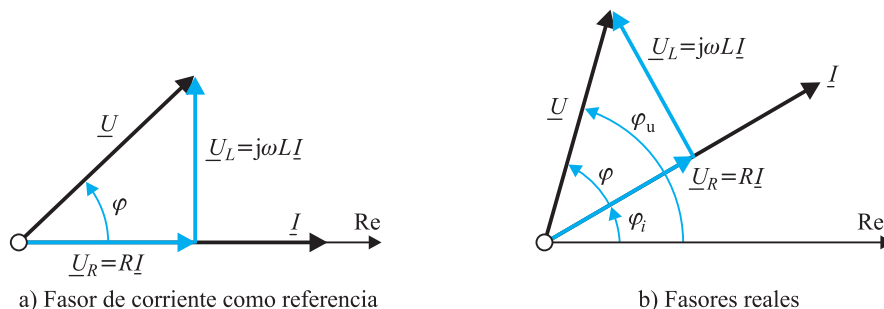


Figura 2.21 Diagrama fasorial de tensiones y corriente en un circuito serie R-L



EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.5

En la red de la Figura 2.22, el generador tiene una frecuencia de 50 Hz. Las lecturas de los aparatos de medida son: $V_R = 30$ V; $V_L = 70$ V; $V_C = 100$ V; $I = 10$ A. Dibujar el diagrama fasorial del circuito, y deducir a partir de él: a) tensión del generador U_s ; b) valores de R , L y C .

Nota: Los voltímetros y amperímetros miden los módulos de los valores eficaces de tensiones y corrientes respectivamente, y por consiguiente sus lecturas son cantidades escalares.

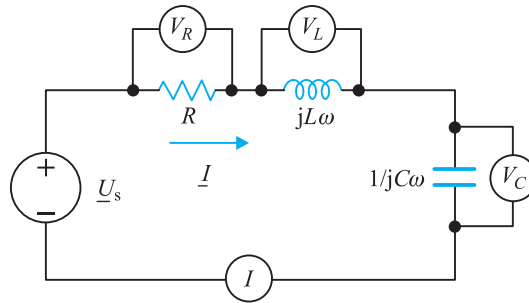


Figura 2.22 Ejemplo de aplicación 2.5

Solución

a) En la Figura 2.23 se ha dibujado el diagrama fasorial correspondiente. El dibujo del diagrama comienza representado a escala el vector $\underline{OQ} = \underline{I} = 10 \angle 0^\circ$, que se toma como fasor de referencia. La tensión $\underline{U}_R$ estará en fase con $\underline{I}$, ya que la tensión en una resistencia está en fase con la corriente, su expresión fasorial es: $\underline{U}_R = 30 \angle 0^\circ$ y corresponde al vector OM de la Figura 2.23. A continuación se dibuja el vector MN que corresponde a la tensión en bornes de la inductancia que según sabemos se adelanta 90° a la corriente. La expresión fasorial correspondiente es $\underline{U}_L = 70 \angle 90^\circ$. Después se dibuja el vector NP que corresponde a la tensión en bornes del condensador que se retrasa 90° respecto de la corriente (repasar Epígrafe 2.6). Esta tensión se escribe en forma fasorial: $\underline{U}_C = 100 \angle -90^\circ$.

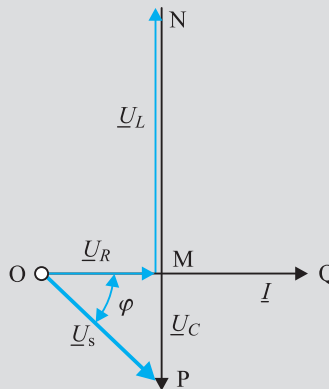


Figura 2.23 Fasores de tensiones del ejemplo 2.5

El valor de la magnitud de $\underline{U}_s$ se obtiene, según preconiza el segundo lema de Kirchhoff, como la suma:

$$\underline{U}_s = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C \quad (2.98)$$

que corresponde al vector OP de la Figura 2.23. Si se ha dibujado esta figura a escala, se puede medir directamente con una regla la magnitud OP que nos da el módulo de la tensión del generador. Esta tensión se puede obtener de forma analítica, resolviendo la ecuación (2.98) ya que se conocen las expresiones fasoriales de las tensiones. Y así resulta:

$$\underline{U}_s = 30 \angle 0^\circ + 70 \angle +90^\circ + 100 \angle -90^\circ = 30 - j30 = 30\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

Por consiguiente el módulo de $\underline{U}_s$ es igual a $30\sqrt{2}$ es decir 42,43 voltios, siendo el ángulo φ de la Figura 2.23 de 45° . Es un *error muy común entre los principiantes*, el realizar la suma (2.98) en forma aritmética, y decir que la tensión de la fuente es igual a $30 + 70 + 100 = 200$ V. El error proviene de no tener en cuenta que se está operando con fasores. La relación (2.98) es la correcta, y expresa una suma vectorial, que al traducir a magnitudes se transforma en:

$$|\underline{U}_s| = |\underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C| \neq |\underline{U}_R| + |\underline{U}_L| + |\underline{U}_C| \quad (2.99)$$

es decir el módulo de la tensión del generador es igual al módulo de la suma vectorial de las tensiones parciales, que es diferente a la suma de los módulos de cada tensión. Suele sorprender también el hecho (que aquí sucede) de que existan tensiones internas en el circuito, superiores incluso a la del generador, como en este caso aparecen en la inductancia (70 V) y el condensador (100 V) que son mayores que los 42,43 V de la fuente de la alimentación. Lo anterior se debe al carácter fasorial (vectorial) de las tensiones.

b) Los valores de los parámetros del circuito se obtienen directamente de las relaciones entre las magnitudes de las tensiones leídas con los voltímetros y la corriente del amperímetro, y así resulta:

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{30}{10} = 3 \, \Omega \quad ; \quad L\omega = \frac{U_L}{I} = \frac{70}{10} = 7 \, \Omega \quad ; \quad \frac{1}{C\omega} = \frac{U_C}{I} = \frac{100}{10} = 10 \, \Omega$$

y teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi f$ y que $f = 50$ Hz, da lugar a:

$$R = 3 \, \Omega \quad ; \quad L = \frac{7}{2\pi 50} = 22,28 \, \text{mH} \quad ; \quad C = \frac{1}{10 \cdot 2\pi 50} = 318,3 \, \mu\text{F}$$



EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.6

En el circuito de la Figura 2.24, se han registrado las lecturas de los siguientes aparatos de medida (que por simplicidad no se han mostrado en la Figura): $|\underline{I}_2| = 5$ A; $|\underline{U}_{R2}| = 35$ V; $|\underline{U}_{C2}| = 120$ V; $|\underline{I}_3| = 3$ A; $|\underline{U}_{R3}| = 75$ V. Determinar: a) Lecturas de dos voltímetros colocados de tal manera que midan respectivamente la tensión $\underline{U}_g$ del generador y $\underline{U}_{L3}$ de la inductancia L_3 . b) Lectura de un amperímetro que mida la corriente total $\underline{I}_1$ suministrada por el generador.

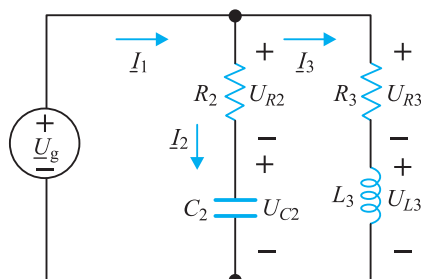


Figura 2.24 Ejemplo de aplicación 2.6

Solución

a) Se observa que se dispone de todos los datos de la rama 2. Si se elige la corriente $\underline{I}_2$ como fador de referencia, podemos escribir:

$$\underline{I}_2 = 5 \angle 0^\circ$$

y por consiguiente las tensiones $\underline{U}_{R2}$ y $\underline{U}_{C2}$ responden a las expresiones:

$$\underline{U}_{R2} = 35 \angle 0^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{C2} = 120 \angle -90^\circ$$

ya que la tensión en R_2 va en fase con $\underline{I}_2$ y la de C_2 se retrasa 90° respecto de $\underline{I}_2$. De este modo la d.d.p. entre M y N que representa la tensión del generador $\underline{U}_g$ tiene el siguiente valor:

$$\underline{U}_g = \underline{U}_{R2} + \underline{U}_{C2} = 35 \angle 0^\circ + 120 \angle -90^\circ = 125 \angle -73,74^\circ \text{ voltios}$$

en la Figura 2.25 se muestra el diagrama fasorial correspondiente. El voltímetro que mide la tensión del generador marcará 125 V. El ángulo φ_2 de la Figura 2.25 que representa el desfase entre la tensión aplicada y la corriente $\underline{I}_2$ será de $73,74^\circ$. La corriente $\underline{I}_3$ que lleva la rama inductiva, irá retrasada un ángulo (desconocido a priori) que se ha denominado φ_3 en la Figura 2.25. La tensión $\underline{U}_{R3}$ irá retrasada un ángulo (desconocido a priori) que se ha denominado φ_3 en la Figura 2.25. La tensión $\underline{U}_{R3}$ irá en fase con $\underline{I}_3$ y la tensión $\underline{U}_{L3}$ irá 90° adelantada respecto de $\underline{I}_3$, de tal modo que la suma de ambas tensiones debe ser igual a la tensión de alimentación $\underline{U}_g$. Del triángulo OPQ de la Figura 2.25 se deduce:

$$U_{L3} = \sqrt{125^2 - 75^2} = 100 \text{ voltios}$$

siendo el ángulo φ_3 :

$$\cos \varphi_3 = \frac{U_{R3}}{U_g} = \frac{75}{125} = 0,6 \Rightarrow \varphi_3 = 53,13^\circ$$

un voltímetro colocado en paralelo con $\underline{U}_{L3}$ da por ello una lectura de 100 V.

b) La corriente total $\underline{I}_1$ es igual a la suma de $\underline{I}_2$ más $\underline{I}_3$. En la Figura 2.25 se indica la suma fasorial correspondiente y que en forma analítica es:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 5 \angle 0^\circ + 3 \angle (-73,74^\circ - 53,13^\circ) = 5 \angle 0^\circ + 3 \angle -126,87^\circ = 4 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

por consiguiente, el amperímetro señala una corriente de 4 A, que es el valor eficaz de la corriente $\underline{I}_1$. El lector habrá comprobado la gran ayuda que proporcionan los diagramas fasoriales, sobre todo en aquellos casos en que se plantean los datos en forma de valores modulares. Esta construcción geométrica resulta bastante útil, pues permite ver con sencillez la posición que deben tener los fasores, que en estos casos resulta más simple que operar con números complejos cuyo argumento se desconoce.

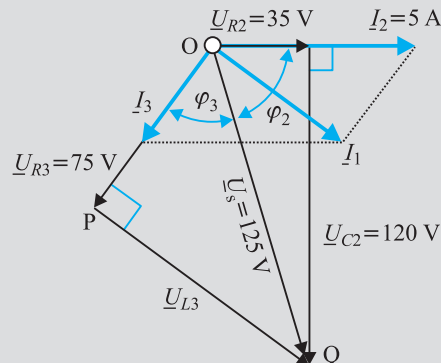


Figura 2.25 Composiciones fasoriales del ejemplo de aplicación 2.6

2.8.2. Asociación de elementos pasivos

Las reglas para determinar las impedancias equivalentes de combinaciones de elementos pasivos en régimen sinusoidal, son idénticas a las estudiadas en el Epígrafe 1.9 del capítulo anterior, sustituyendo las impedancias operacionales allí definidas por impedancias complejas en el caso sinusoidal. Igualmente se aplicarán las conversiones estrella a triángulo y viceversa. Veamos un ejemplo de aplicación.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.7

Calcular la impedancia total entre los terminales A y B de la red de la Figura 2.26 y la corriente suministrada por el generador si este tiene una tensión en bornes dada por la expresión: $u_s = \sqrt{2} 10 \cos 100t$ voltios.

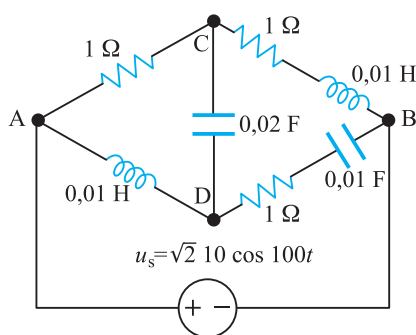


Figura 2.26 Ejemplo de aplicación 2.7

Solución

El generador de tensión tiene una pulsación $\omega = 100$ rad/s y un valor fasorial escrito en forma polar:

$$\underline{U}_s = 10 \angle 0^\circ$$

Las impedancias de la red son:

Bobinas: $\underline{Z} = +j\omega L$ y como son todas de 0,01 H dan un valor $\underline{Z} = +j100 \cdot 0,01 = j1 \Omega$.

Condensadores: $\underline{Z} = -j \frac{1}{\omega C}$. Para el condensador de 0,01 F nos da $\underline{Z} = -j1 \Omega$, y para el condensador de 0,02 F da $\underline{Z} = -j0,5 \Omega$.

Resistencias: $\underline{Z} = R$, son todas de 1 Ω .

El circuito de la Figura 2.26 en el dominio de la frecuencia es el indicado en la Figura 2.27. En este circuito, se va a transformar el triángulo de impedancias 1 Ω , j1 Ω y -j0,5 Ω (interiores a la zona sombreada) en una estrella, de acuerdo a las fórmulas de conversión (1.93), lo que da lugar a:

$$\underline{Z}_1 = \frac{1(j1)}{1 + j1 - j0,5} = \frac{j1}{1 + j0,5} = 0,4 + j0,8 \Omega \quad ; \quad \underline{Z}_2 = \frac{j1(-j0,5)}{1 + j1 - j0,5} = \frac{0,5}{1 + j0,5} = 0,4 - j0,2 \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{1(-j0,5)}{1 + j1 - j0,5} = \frac{-j0,5}{1 + j0,5} = -0,2 - j0,4 \Omega$$

se observa que la impedancia $\underline{Z}_3$ no es físicamente realizable ya que aparece una resistencia negativa, sin embargo no nos debe importar ya que es una red equivalente³. El circuito de la Figura 2.27 se convierte entonces en el de la Figura 2.28, donde se observan dos ramas en paralelo (conteniendo a su vez dos impedancias en serie que se destacan en las áreas sombreadas) con otra rama en serie. Las impedancias en paralelo son:

$$\underline{Z}_A = (-0,2 - j0,4) + (1 + j1) = 0,8 + j0,6 = 1 \angle 36,87^\circ$$

$$\underline{Z}_B = (0,4 - j0,2) + (1 - j1) = 1,4 - j1,2 = 1,84 \angle -40,6^\circ$$

que dan una impedancia equivalente:

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} \Rightarrow \underline{Z}_p = \frac{\underline{Z}_A \cdot \underline{Z}_B}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_B}$$

cuyo resultado numérico es:

$$\underline{Z}_p = \frac{(0,8 + j0,6)(1,4 - j1,2)}{(0,8 + j0,6) + (1,4 - j1,2)} = 0,81 \angle 11,5^\circ = 0,79 + j0,16 \Omega$$

de acuerdo con la Figura 2.28, esta impedancia está en serie con $0,4 + j0,8 \Omega$, lo que da lugar a una impedancia total entre A y B:

$$\underline{Z}_{AB} = (0,4 + j0,8) + (0,79 + j0,16) = 1,1 + j0,96 = 1,53 \angle 38,9^\circ \Omega$$

en consecuencia la corriente suministrada por el generador será:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{Z}} = \frac{10 \angle 0^\circ}{1,53 \angle 38,9^\circ} = 6,54 \angle -38,9^\circ \text{ amperios}$$

cuya expresión instantánea es:

$$i(t) = \sqrt{2} 6,54 \cos(100t - 38,9^\circ)$$

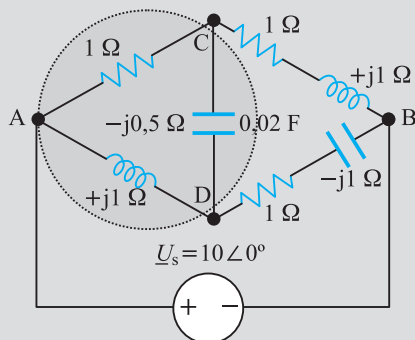


Figura 2.27 Circuito en el plano complejo

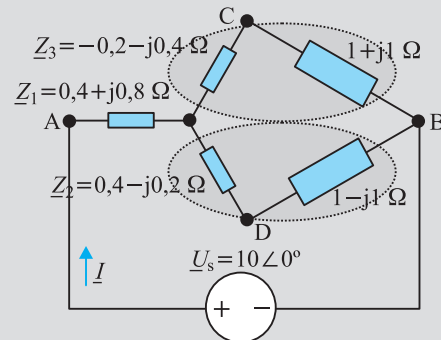


Figura 2.28 Circuito transformado

³ La equivalencia entre redes estrella y triángulo siempre es posible a efectos de cálculo del circuito. Otro aspecto a considerar es que sea posible la realización física de la red equivalente. Es evidente que no se puede construir una resistencia negativa, sin embargo, en el caso que nos ocupa la red en estrella equivalente da lugar a los mismos repartos de corriente y tensión que la red en triángulo, pese a existir una resistencia negativa.

2.8.3. Método de las corrientes de malla

El método de las mallas para circuitos sinusoidales es análogo al estudiado en el Epígrafe 1.12 del capítulo anterior, representando ahora los generadores por sus fasores correspondientes y sustituyendo las impedancias operacionales por sus impedancias complejas. Si existen generadores de corriente se deben transformar previamente a generadores de tensión equivalente. En el caso de que existan generadores de corriente ideales que no se puedan transformar, se deberá seguir el método indicado en el Epígrafe 1.12.2. Veamos unos ejemplos de aplicación de esta teoría.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.8

Calcular la corriente instantánea i del circuito de la Figura 2.29.

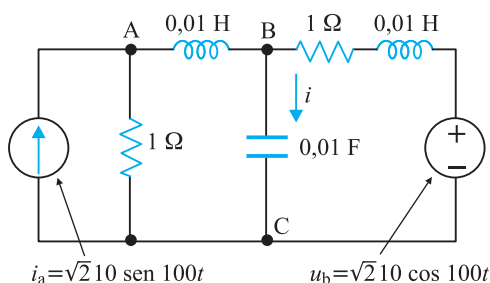


Figura 2.29 Ejemplo de aplicación 2.8

Solución

La tensión generadora de la fuente u_b se expresa en forma fasorial:

$$\underline{U}_b = 10 \angle 0^\circ$$

El generador de corriente suministra una intensidad:

$$i_a = \sqrt{2} 10 \sin 100t = \sqrt{2} 10 \cos(100t - 90^\circ)$$

y su forma fasorial es:

$$\underline{I}_a = 10 \angle -90^\circ$$

Pasando el generador de corriente a generador de tensión, de acuerdo con (1.67) se tiene:

$$\underline{U}_a = \underline{Z} \underline{I}_a = 1 \cdot 10 \angle -90^\circ, \text{ ya que } Z = 1 \, \Omega$$

Las bobinas de 0,01 H tienen unas impedancias: $+j\omega L = +j100 \cdot 0,01 = +j1 \, \Omega$.

El condensador de 0,01 F tiene una impedancia:

$$-j \frac{1}{C\omega} = -j1 \, \Omega$$

En consecuencia, el circuito de la Figura 2.29 en el dominio del tiempo da lugar al circuito de la Figura 2.30 en el dominio de la frecuencia, donde ya se ha realizado la transformación del generador de corriente a generador de tensión. Al aplicar el teorema de las mallas a esta red se obtiene:

$$\begin{aligned} 10\angle -90^\circ &= (1 + j1 - j1)\underline{I}_1 - (-j1)\underline{I}_2 \\ -10\angle 0^\circ &= -(-j1)\underline{I}_1 + (1 + j1 - j1)\underline{I}_2 \end{aligned}$$

cuyos resultados son:

$$\underline{I}_1 = 0 \quad ; \quad \underline{I}_2 = -10\angle 0^\circ = 10\angle 180^\circ$$

y la corriente $\underline{I}$ en el condensador es igual a:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 10\angle 0^\circ$$

por lo que la expresión instantánea de i es:

$$i(t) = \sqrt{2} 10 \cos 100t$$

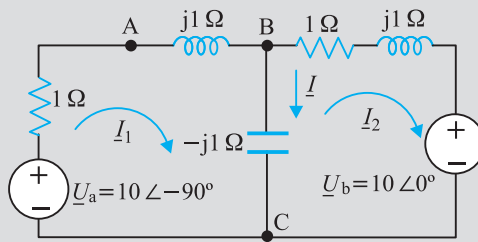


Figura 2.30 Aplicación del método de las mallas

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.9

En el circuito de la Figura 2.31a los valores instantáneos de los generadores son: $u_a = 20 \cos(10t - 45^\circ)$ voltios; $u_b = \sqrt{2} 10 \cos 10t$ voltios; $i_c = \sqrt{2} 10 \sin 10t$ amperios. Calcular: a) corrientes instantáneas suministradas por los generadores de tensión; b) tensión en bornes de la fuente de corriente.

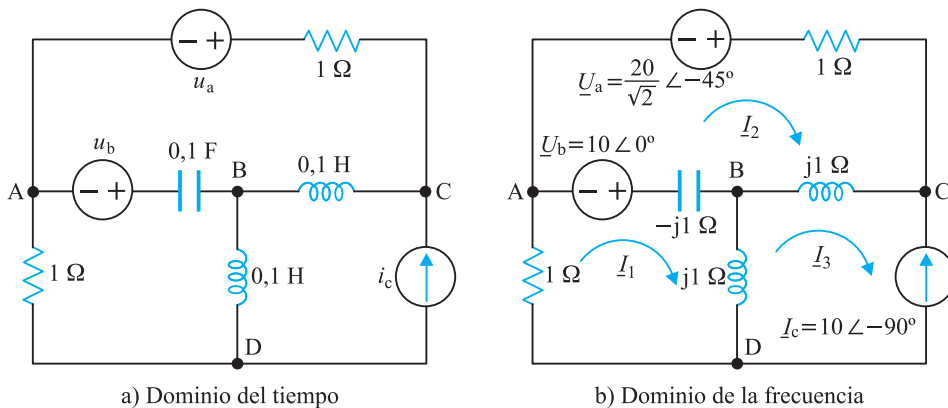


Figura 2.31 Ejemplo de aplicación 2.9

Solución

a) Las expresiones fasoriales de los generadores son:

$$\underline{U}_a = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ \quad ; \quad \underline{U}_b = 10 \angle 0^\circ \quad ; \quad \underline{I}_c = 10 \angle -90^\circ$$

como quiera además que $\omega = 10$ rad/s, las impedancias complejas son las mostradas en la Figura 2.31b. Al aplicar las ecuaciones de malla resulta:

$$10 \angle 0^\circ = (1 + j1 - j1)\underline{I}_1 - (-j1)\underline{I}_2 - j1\underline{I}_3$$

$$\frac{20}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ - 10 \angle 0^\circ = -(-j1)\underline{I}_1 + (1 + j1 - j1)\underline{I}_2 - j1\underline{I}_3$$

$$\underline{I}_3 = -10 \angle -90^\circ$$

es decir:

$$10 \angle 0^\circ = 1\underline{I}_1 + j1\underline{I}_2 - j1\underline{I}_3$$

$$-j10 = j1\underline{I}_1 + 1\underline{I}_2 - j1\underline{I}_3$$

$$\underline{I}_3 = j10$$

que resolviendo da lugar a:

$$\underline{I}_1 = -5 + j5 = 5\sqrt{2} \angle 125^\circ \quad ; \quad \underline{I}_2 = -5 - j5 = 5\sqrt{2} \angle -135^\circ \quad ; \quad \underline{I}_3 = +j10 = 10 \angle +90^\circ$$

La corriente suministrada por el generador u_a será igual a $\underline{I}_2$, que corresponde a un valor instantáneo:

$$i_2 = \sqrt{2}(5\sqrt{2}) \cos(10t - 135^\circ) = 10 \cos(10t - 135^\circ)$$

La corriente suministrada por el generador u_b (del nudo A al nudo B) es igual a $\underline{I}_b$:

$$\underline{I}_b = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = j10 = 10 \angle 90^\circ$$

que corresponde a un valor instantáneo:

$$i_b = \sqrt{2} 10 \cos(10t + 90^\circ)$$

b) La d.d.p. en bornes del generador de corriente es igual a la tensión U_{CD} :

$$\underline{U}_{CD} = j1(\underline{I}_2 - \underline{I}_3) + j1(\underline{I}_1 - \underline{I}_3) = 20 - j10 = 22,36 \angle -26,56^\circ$$

que corresponde a un valor instantáneo:

$$u_{CD} = \sqrt{2} 22,36 \cos(10t - 26,56^\circ)$$

■ 2.8.4. Método de las tensiones de nudo

El método de los nudos para circuitos sinusoidales es análogo al estudiado en el Epígrafe 1.13 del capítulo anterior, representando ahora los generadores por sus fasores correspondientes y sustituyendo las impedancias o admitancias operacionales por sus valores complejos. Si existen generadores de tensión deben transformarse previamente a fuentes de co-

rriente equivalente. En el caso de que existan generadores de tensión ideales que no se puedan transformar, se deberá seguir el procedimiento indicado en el Epígrafe 1.13.2. Veamos dos ejemplos de aplicación de esta teoría.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.10

Resolver el Ejemplo de Aplicación 2.8 por el método de los nudos.

Solución

El generador de tensión tiene en serie una impedancia de $1 + j1 \Omega$, transformándolo en generador de corriente se obtiene:

$$\underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}} = \frac{10 \angle 0^\circ}{1 + j1} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ ; \quad \underline{Z} = 1 + j1$$

y el circuito de la Figura 2.29 se convierte en el de la Figura 2.32. Aplicando el teorema de los nudos a los nudos A y B, tomando el nudo C como dato o referencia, se obtiene:

$$10 \angle -90^\circ = \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{j1} \right] \underline{U}_A - \frac{1}{j1} \underline{U}_B$$

$$\frac{10}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = -\frac{1}{j1} \underline{U}_A + \left[\frac{j}{j1} + \frac{1}{-j1} + \frac{1}{1 + j1} \right] \underline{U}_B$$

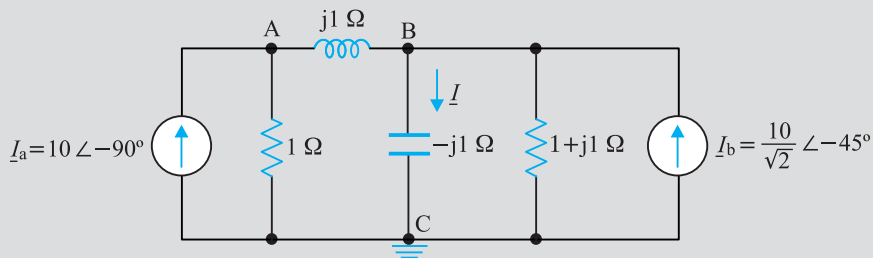


Figura 2.32 Ejemplo de aplicación 2.10

que al operar da lugar a:

$$10 \angle -90^\circ = (1 - j1) \underline{U}_A + j1 \underline{U}_B$$

$$\frac{10}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = j1 \underline{U}_A + (0,5 - j0,5) \underline{U}_B$$

de donde se deduce un valor de $\underline{U}_B$:

$$\underline{U}_B = 10 \angle -90^\circ$$

por lo tanto la corriente $\underline{I}$ será:

$$\underline{I} = \frac{10 \angle -90^\circ}{-j1} = 10 \angle 0^\circ$$

que corresponde a un valor instantáneo:

$$i(t) = \sqrt{2} 10 \cos 100t$$

que coincide con el resultado del Ejemplo de Aplicación 2.8 realizado allí por el método de las mallas.

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.11

En el circuito de la Figura 2.33a los valores instantáneos de los generadores son: $u_a = 10 \cos(t + 45^\circ)$ voltios; $u_b = 4 \cos(t - 45^\circ)$ voltios. Calcular la corriente instantánea que circula por la inductancia de 1 henrio.

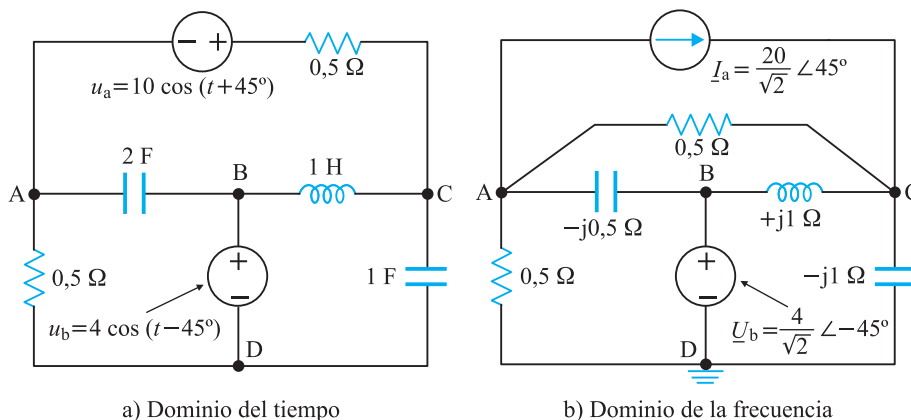


Figura 2.33 Ejemplo de aplicación 2.11

Solución

Los valores fasoriales de las tensiones de los generadores son:

$$\underline{U}_a = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ ; \quad \underline{U}_b = \frac{4}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

al transformar el generador de tensión u_a (en serie con la resistencia de 1Ω) en generador de corriente resulta:

$$\underline{I}_a = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ}{0,5} = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

Como quiera además que $\omega = 1 \text{ rad/s}$, las impedancias complejas y el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia será el indicado en la Figura 2.33b. Al tomar el nudo D como referencia, y aplicar las ecuaciones de nudo se obtiene:

$$\text{A) } -\frac{20}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = \left[\frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,5} + \frac{1}{-j0,5} \right] \underline{U}_A - \frac{1}{-j0,5} \underline{U}_B - \frac{1}{0,5} \underline{U}_C$$

$$\text{B) } \underline{U}_B = \frac{4}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

$$C) \frac{20}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = -\frac{1}{0,5} \underline{U}_A - \frac{1}{j1} \underline{U}_B + \left[\frac{1}{0,5} + \frac{1}{j1} + \frac{1}{-j1} \right] \underline{U}_C$$

cuyos resultados son:

$$\underline{U}_A = 1 + j0 \quad ; \quad \underline{U}_B = 2 - j2 \quad ; \quad \underline{U}_C = 5 + j4$$

la corriente $\underline{I}$ señalada en la Figura 2.33b que circulará por la inductancia de 1 henrio será:

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U}_{BC} = \frac{1}{j1} (2 - j2 - 5 - j4) = -6 + j3 = 6,71 \angle 153,4^\circ$$

es decir un valor instantáneo:

$$i(t) = \sqrt{2} 6,71 \cos(t + 153,4^\circ)$$



Comentarios prácticos

Normalización de parámetros. Cambios de escala

En los ejercicios de este capítulo, y a lo largo del libro, se resuelven problemas de circuitos eléctricos con parámetros que se pueden considerar a primera vista como muy irreales. Para ser más concretos, en el Ejemplo de Aplicación 2.11 anterior, se observan valores como $R = 0,5 \Omega$; $C = 1 \text{ F}$; $C = 0,5 \text{ F}$; $L = 1 \text{ H}$; $\omega = 1 \text{ rad/s}$, que no se encuentran en los diseños reales de la Ingeniería Eléctrica y Electrónica. Por ejemplo, para que el lector tenga una idea de lo que significa 1 faradio, se puede demostrar que un condensador esférico que tuviera el diámetro de la Tierra tendría una capacidad de tan solo $722 \mu\text{F}$, por lo que capacidades de $0,5 \text{ F}$ y 1 F es a todas luces una ficción. Algo similar ocurre con las bobinas, en las que inductancias de 1 henrio es un valor difícil de conseguir. La respuesta a este desaguisado es la normalización de parámetros o cambios de escala que se utiliza en el diseño de circuitos en los que valores más reales pueden ser de $R = 10 \text{ k}\Omega$; $L = 1 \text{ mH}$; $C = 0,5 \mu\text{F}$; $f = 10 \text{ kHz}$, etc. El cambio de escala es muy útil para manejar parámetros del mismo orden de magnitud, lo que simplifica la labor de análisis y evita muchos errores de cálculo.

Generalmente se utilizan cambios de escala, tanto en lo referente a la **magnitud** de los parámetros, como a la **frecuencia** de trabajo para conseguir, por ejemplo, trabajar con resistencias de 1Ω y pulsaciones de 1 rad/s . Supóngase una impedancia serie, formada por una resistencia R , una inductancia L y una capacidad C . Si la pulsación del generador es de $\omega \text{ rad/s}$, la impedancia compleja de este circuito es:

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (1)$$

si los términos de la ecuación anterior que dependen de la pulsación ω se multiplican y dividen por una **pulsación de referencia** ω_0 , el valor de la impedancia permanece inalterable, como se señala a continuación:

$$\underline{Z} = R + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \omega_0 L + \frac{1}{j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \omega_0 C} \quad (2)$$

si a continuación, ambos lados de la ecuación anterior se dividen por un **valor de referencia de la impedancia**, que denominamos Z_0 , se obtiene una **impedancia normalizada**, que responde a la siguiente expresión:

$$\frac{\underline{Z}}{Z_0} = \frac{R}{Z_0} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \left(\frac{\omega_0 L}{Z_0} \right) + \frac{1}{j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) (\omega_0 C Z_0)} \quad (3)$$

que puede escribirse del siguiente modo:

$$\underline{Z}_n = R_n + j\omega_n L_n + \frac{1}{j\omega_n C_n} \quad (4)$$

el subíndice n de los términos de la ecuación anterior significa que son magnitudes normalizadas, y sus valores respectivos teniendo en cuenta (3) son:

$$\underline{Z}_n = \frac{Z}{Z_0} ; R_n = \frac{R}{Z_0} ; \omega_n = \frac{\omega}{\omega_0} ; L_n = \frac{\omega_0 L}{Z_0} ; C_n = \omega_0 Z_0 C \quad (5)$$

¿Cuáles son las consecuencias de la normalización? Obsérvese que la expresión de $\underline{Z}_n$ en la ecuación (4) es la misma que la $\underline{Z}$ en la ecuación original (1). Es decir, la variación de $\underline{Z}_n$ con la pulsación ω_n es la misma que la variación de la impedancia $\underline{Z}$ con la pulsación ω . Sin embargo, la escala de valores de $\underline{Z}_n$ es $1/Z_0$ veces la escala de valores de Z . Es por ello que el **nivel de impedancia** se ha normalizado o se ha cambiado la escala en un factor Z_0 . En definitiva, **todas las impedancias del circuito** se han dividido por Z_0 . Para ver cómo se aplican estos conceptos a un caso real, supóngase un circuito con los siguientes valores: $R = 50 \Omega$; $L = 50 \text{ mH}$; $C = 1 \mu\text{F}$; $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$. Si se normalizan los valores anteriores tomando como referencia $Z_0 = 50 \Omega$; $\omega_0 = 10^4 \text{ rad/s}$, de acuerdo con (5) los valores normalizados son:

$$R_n = \frac{R}{Z_0} = \frac{50}{50} = 1 ; \omega_n = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{10^4}{10^4} = 1 ; L_n = \frac{\omega_0 L}{Z_0} = \frac{10^4 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{50} = 1 ; C_n = \omega_0 Z_0 C = 10^4 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 0,5$$

que suponen valores mucho más sencillos de manejar que los originales. Debe advertirse que los valores normalizados no tienen unidades de ohmios, henrios, faradios o rad/s. **¡Son números sin dimensiones!**, aunque en la práctica, los ingenieros los expresen en sus unidades originales. En el campo de las Máquinas Eléctricas y de los Sistemas Eléctricos de Potencia se utilizan conceptos similares, cuando se definen **magnitudes por unidad**, ya que tienen la ventaja de que las ecuaciones de comportamiento son idénticas para los sistemas monofásicos y trifásicos, haciendo también posible la comparación de las impedancias de máquinas eléctricas y líneas con gran facilidad, independiente de la potencia y tensión real de las mismas.

2.8.5. Principio de superposición

El principio de superposición para circuitos sinusoidales es análogo al estudiado en el epígrafe del capítulo anterior. Cuando se estudian redes lineales que incluyen generadores con diferentes frecuencias, el método de superposición constituye el único procedimiento válido para analizar el comportamiento del circuito, expresando el resultado como suma de valores instantáneos, ya que no se puede operar simultáneamente con fasores de frecuencias diferentes. Veamos unos ejemplos:



EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.12

Resolver el Ejemplo de Aplicación 2.8 por el principio de superposición.

Solución

El circuito de la Figura 2.29 en el dominio de la frecuencia es el indicado en la Figura 2.34. Cuando actúa el generador de corriente, el otro generador debe sustituirse por su impedancia interna, resultando un cortocircuito por ser un generador de tensión como muestra la Figura 2.35, donde debe calcularse la corriente I' .

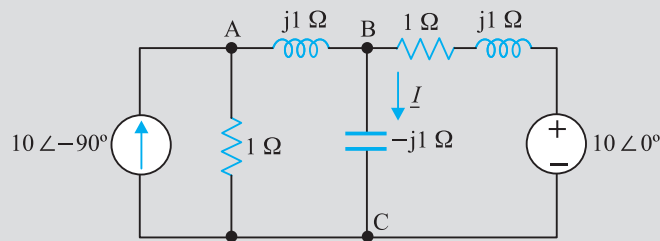


Figura 2.34 Ejemplo de aplicación 2.12

Las impedancias $1 + j1$ y $-j1$ están en paralelo dando lugar a una impedancia total:

$$\underline{Z}_p = \frac{(1 + j1)(-j1)}{1 + j1 - j1} = 1 - j1$$

resultando el circuito de la Figura 2.36, donde se observa que la impedancia $1 - j1$ está en serie con $j1$ lo que da lugar a una impedancia total de 1Ω . En consecuencia la corriente del generador de $10\angle-90^\circ$ se distribuye por igual entre las dos ramas resultantes, ya que ambas tienen las mismas impedancias, la corriente $\underline{I}_a$ tiene un valor:

$$\underline{I}_a = \frac{10\angle-90^\circ}{2} = 5\angle-90^\circ$$

que llevando a la Figura 2.35 y teniendo en cuenta la regla del divisor de corriente (1.82), da lugar a:

$$\underline{I}' = \underline{I}_a = \frac{\underline{Y}_i}{\underline{Y}_T} = 5\angle-90^\circ \frac{\frac{1}{-j1}}{\frac{1}{-j1} + \frac{1}{1 + j1}} = 5\sqrt{2}\angle-45^\circ$$

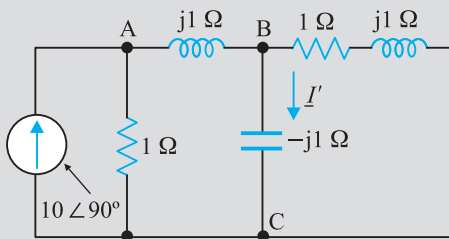


Figura 2.35 Respuesta al generador de corriente

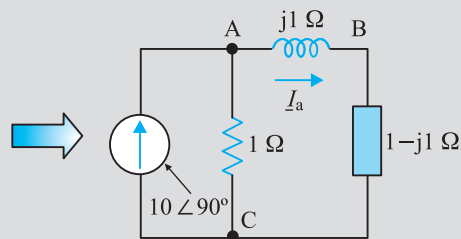


Figura 2.36 Circuito simplificado

Cuando actúa solo el generador de tensión, el generador de corriente debe dejarse en circuito abierto, como indica la Figura 2.37. En este circuito la impedancia $1 + j1 \Omega$ de la izquierda está en paralelo con $-j1 \Omega$, resultando una impedancia equivalente:

$$\underline{Z}_p = \frac{(1 + j1)(-j1)}{1 + j1 - j1} = 1 - j1$$

y se obtiene el circuito equivalente de la Figura 2.38. En este circuito la corriente $\underline{I}_b$ que suministra el generador es:

$$\underline{I}_b = \frac{10 \angle 0^\circ}{1 + j1 + 1 - j1} = 5 \angle 0^\circ$$

que llevado al circuito de la Figura 2.37, y teniendo en cuenta la regla del divisor de corriente, se obtiene para $\underline{I}''$ el valor:

$$\underline{I}'' = \underline{I}_b = \frac{1 + j1}{(1 + j1) + (-j1)} = \underline{I}_b \frac{1/(-j1)}{1/(-j1) + 1/(1 + j1)} = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ$$

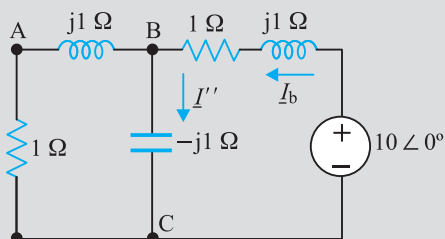


Figura 2.37 Respuesta al generador de tensión

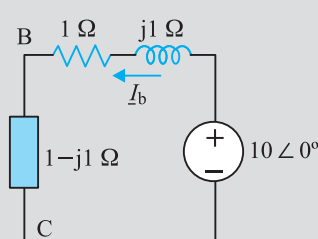


Figura 2.38 Circuito simplificado

La corriente $\underline{I}$ de la Figura 2.34 es la suma de las corrientes $\underline{I}'$ (Figura 2.35) e $\underline{I}''$ (Figura 2.37), resultando un valor total:

$$\underline{I} = \underline{I}' + \underline{I}'' = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ + 5\sqrt{2} \angle 45^\circ = 10 \angle 0^\circ$$

que coincide con los valores obtenidos por el método de las mallas y nudos. La expresión instantánea correspondiente es:

$$i(t) = \sqrt{2} 10 \cos 100t$$



EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.13

Calcular la corriente instantánea i en el circuito de la Figura 2.39 aplicando el principio de superposición. El generador de tensión es de c.a. de valor instantáneo $u_{g1}(t) = \sqrt{2} 10 \cos 10t$ voltios, el generador de intensidad es de corriente continua de valor $i_{g2} = I_{g2} = 5$ A.

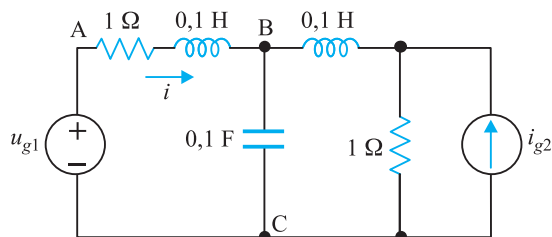


Figura 2.39 Ejemplo de aplicación 2.13

Solución

Los circuitos equivalentes en el dominio de la frecuencia al aplicar superposición son los mostrados en la Figura 2.40. En el caso de la Figura 2.40a actúa solamente el generador de tensión de c.a. con una pulsa-

ción $\omega = 10$ rad/s. El generador de corriente $i_{g2} = I_{g2}$ se ha dejado abierto. En el caso de la Figura 2.40b actúa únicamente el generador de corriente continua que tiene una frecuencia $\omega = 0$, y por ello la impedancia de la bobina es nula ($L\omega = 0$), es decir actúa como un cortocircuito, y la impedancia del condensador es infinita ($1/C\omega = 8$) que representa un circuito abierto. El generador de tensión en este caso se ha cortocircuitado.

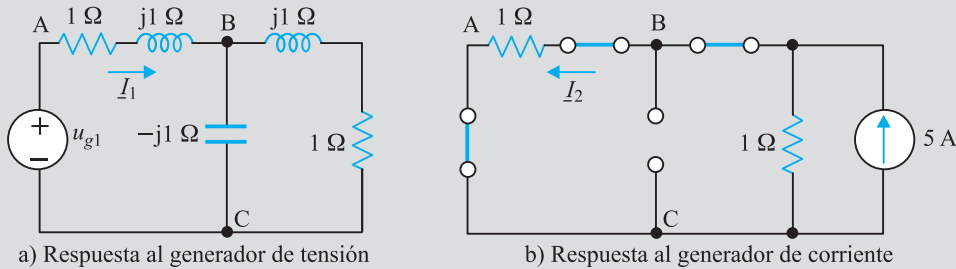


Figura 2.40 Aplicación de la superposición

En el circuito de la Figura 2.40a, la impedancia $1 + j1$ de la rama derecha está en paralelo con el condensador $-j1$, lo que da lugar a una impedancia equivalente $1 - j1$, que a su vez está en serie con $1 + j1$ de la rama AB, por consiguiente la corriente I_1 es igual a:

$$I_1 = \frac{10 \angle 0^\circ}{1 + j1 + 1 - j1} = 5 \angle 0^\circ$$

que corresponde a una corriente instantánea:

$$i(t) = \sqrt{2} 5 \cos 10t \text{ amperios}$$

por otro lado, el circuito de la Figura 2.40b representa dos resistencias de 1Ω en paralelo, a las cuales les llega una corriente de 5 A. Por ello la corriente I_2 vale:

$$I_2 = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ A}$$

de este modo la corriente instantánea i de la Figura 2.39 es igual a:

$$i(t) = \sqrt{2} 5 \cos 10t - 2,5 \text{ amperios}$$

téngase en cuenta que la corriente I_2 va de B a A en el circuito de la Figura 2.40b y por eso se ha restado a i_1 . De un modo análogo se hubiera resuelto el problema si el generador de corriente tuviera otra frecuencia. En este caso se calcularían las impedancias del circuito a esta frecuencia nueva para resolver la red de la Figura 2.40b calculando finalmente la corriente $i(t)$ en la rama AB como suma algebraica de las corrientes que se obtienen en esta rama, de cada uno de los circuitos de la Figura 2.40. Indudablemente la solución incluirá corrientes de dos frecuencias diferentes que se deberán sumar en forma instantánea ya que corresponden a fasores de velocidades distintas. *Obsérvese que cuando una red dispone de generadores de frecuencias diferentes, el método de superposición que se acaba de establecer es el único método aplicable para determinar la respuesta a cada frecuencia de excitación de los generadores.*

2.8.6. Teoremas de Thévenin y Norton

Los teoremas de Thévenin y Norton estudiados en el epígrafe del capítulo anterior, se aplican de un modo análogo cuando los generadores son sinusoidales, empleando fasores e impedancias complejas. Veamos su forma de aplicación.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.14

Resolver el Ejemplo de Aplicación 2.8, aplicando el teorema de Thévenin.

Solución

a) Cálculo de $\underline{U}_{Th}$:

Para obtener el circuito equivalente de Thévenin de la Figura 2.30 entre los terminales A y B, se debe de quitar la impedancia de carga de $-j1 \Omega$ y calcular la d.d.p. entre esos terminales, de acuerdo con el esquema de la Figura 2.41a, que se traduce en el esquema de la Figura 2.41b, donde se ha transformado el generador de corriente en tensión. Aplicando el segundo lema de Kirchhoff a la malla, se obtiene:

$$10 \angle -90^\circ - 10 \angle 0^\circ = (1 + j1 + 1 + j1) \underline{I}_1$$

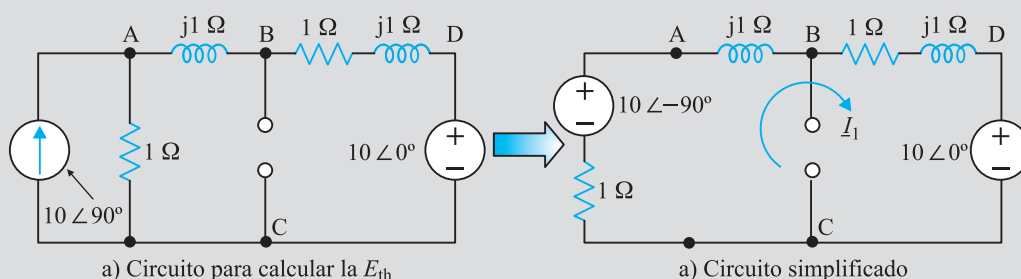


Figura 2.41 Ejemplo de aplicación 2.14

que da un valor:

$$\underline{I}_1 = \frac{-10 - j10}{2 + j2} = 5 \angle 180^\circ = -5 \angle 0^\circ$$

En consecuencia la d.d.p. entre los terminales B y C siguiendo el camino BDC es:

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BD} + \underline{U}_{DC} = (1 + j1)(-5 \angle 0^\circ) + 10 \angle 0^\circ = 5 - j5$$

que será el valor de la tensión generadora de Thévenin, es decir:

$$\underline{U}_{Th} = \underline{U}_{BC} = 5 - j5 = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

b) Cálculo de $\underline{Z}_{Th}$:

La impedancia $\underline{Z}_{Th}$ es la impedancia que se obtiene entre los terminales B y C, al anular las fuentes internas. Tomando por ejemplo el circuito de la Figura 2.41a se obtiene el esquema de la Figura 2.42a, en el que se tienen dos impedancias de $1 + j1 \Omega$ puestas en paralelo, que dan lugar a:

$$\underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{Th} = \frac{1 + j1}{2} = 0,5 + j0,5 \Omega$$

En consecuencia el circuito equivalente de Thévenin es el indicado en la Figura 2.42b, que al aplicar el segundo lema de Kirchhoff da:

$$\underline{I} = \frac{5\sqrt{2}\angle -45^\circ}{0,5 + j0,5 - j1} = \frac{5\sqrt{2}\angle -45^\circ}{0,5\sqrt{2}\angle -45^\circ} = 10\angle 0^\circ$$

que coincide con los resultados anteriores.

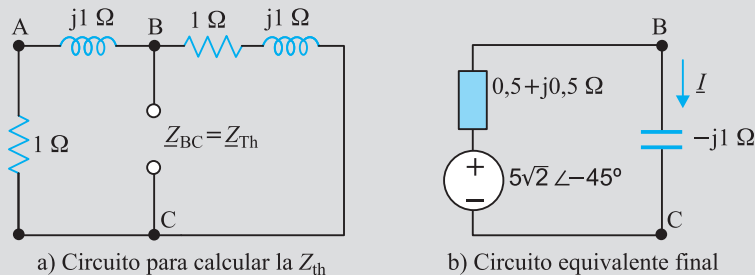


Figura 2.42 Circuitos transformados del ejemplo de aplicación 2.14



Amplíe sus conocimientos

Campos cuasiestacionarios y circuitos con parámetros distribuidos

1) Circuitos o campos cuasiestacionarios: Como ya se ha comentado en el Capítulo 1, el estudio de los circuitos eléctricos implica el carácter cuasiestacionario de las tensiones y corrientes que recorren el circuito. Para que se entienda este concepto que se mencionaba de un modo incipiente en el capítulo anterior, supóngase que se desea estudiar la propagación de la corriente (energía electromagnética) a lo largo de una línea larga (que no tiene derivaciones o consumos de carga intermedios). Vamos a considerar dos secciones 1 y 2 de la línea anterior separadas una distancia L y por las que circulan unas corrientes variables $i_1(t)$ e $i_2(t)$ respectivamente, tal como se muestra en la Figura 2.43. Según la Teoría de Circuitos ambas corrientes deberían ser idénticas, es decir se debe cumplir la igualdad $i_1(t) = i_2(t)$. Sin embargo, analizando con detalle la situación, se demuestra que esta igualdad no es correcta en general, puesto que debe tenerse en cuenta que la propagación del fenómeno electromagnético no es instantánea.

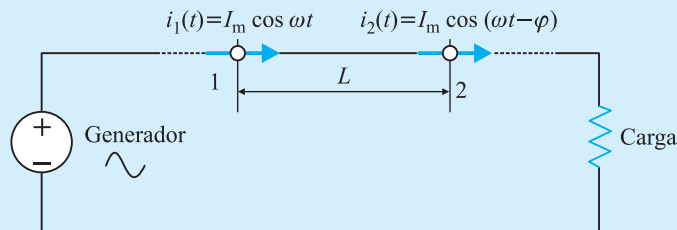


Figura 2.43 Línea larga y corrientes correspondientes en dos secciones 1 y 2 de la misma

Si se considera por ejemplo que la corriente $i_1(t)$ es alterna sinusoidal que obedece a la expresión $i_1(t) = I_m \cos \omega t$, donde ω es la pulsación de la señal en rad/s y que es igual a $2\pi f$ donde f representa la frecuencia de la onda; la expresión de la corriente $i_2(t)$ en la sección alejada estará retrasada respecto a

$i_1(t)$ el tiempo requerido para que la corriente llegue a la sección 2 y que si se denomina c a la velocidad de propagación de la señal en el conductor (velocidad de la luz en el medio) corresponderá a un tiempo $\tau = L/c$, por lo que la corriente $i_2(t)$ obedecerá a una expresión de la forma: $i_2(t) = I_m \cos \omega(t - \tau) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, donde $\varphi = \omega\tau$ representa la diferencia de fase entre las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Puede resultar incluso que se tenga $i_2 = 0$ cuando $i_1 = I_m$. Teniendo en cuenta la relación existente entre la velocidad, longitud de onda y frecuencia se puede escribir:

$$c = f\lambda \quad ; \quad \omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad \varphi = \omega\tau = 2\pi f \frac{L}{c} = \frac{2\pi L}{\lambda} \quad (a)$$

de acuerdo con la ecuación anterior, el retardo de fase es despreciablemente pequeño si se cumple:

$$L \ll \lambda \quad (b)$$

esta desigualdad se denomina **condición de los circuitos o campos cuasiestacionarios**. Por consiguiente si se cumple (b), las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ serán iguales y se cumplirá el principio de la constancia de la corriente instantánea en todas las secciones del conductor. Por ejemplo en el campo de la Electrotecnia se manejan señales sinusoidales de una frecuencia de 50 Hz (en Europa), que corresponden a una longitud de onda λ :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6 \text{ m} = 6.000 \text{ km}$$

en la ecuación anterior c representa la velocidad de propagación de la luz. Está claro que una máquina eléctrica tiene unas dimensiones mucho menores que 6.000 km y que por consiguiente su estudio se puede realizar como si se tratara de un campo cuasiestacionario. La Teoría de Circuitos pertenece a este campo cuasiestacionario. En estas condiciones se puede hablar de un circuito con **parámetros concentrados**, donde son aplicables los lemas de Kirchhoff y en los que resulta más conveniente manejar las magnitudes de tensión y corriente que los conceptos de campos electromagnéticos. Hay que tener en cuenta sin embargo, que cuando se estudia el comportamiento de una línea eléctrica de alta tensión, cuyas dimensiones son superiores a 300 km entonces la teoría de circuitos de Kirchhoff de parámetros concentrados ya no es aplicable, puesto que la dimensión del circuito es en cierto modo comparable a la longitud de onda de la señal que transporta la línea (más de 1/20 de la longitud de onda). En este caso se debe utilizar la teoría de **parámetros distribuidos** a lo largo de toda la línea, aunque siguen subsistiendo los conceptos de tensión y corriente más que los de campos. En el caso más general de campos electromagnéticos con variaciones rápidas, las dimensiones del circuito resultan comparables a la longitud de onda de las señales. En este caso no tiene sentido hablar de tensión y corriente sino de campo electromagnético (*y es por ello que para su estudio deben utilizarse directamente las ecuaciones de Maxwell*). Esta situación se presenta de un modo claro en la técnica de las telecomunicaciones, donde se emplean señales con frecuencias del orden de kilohercios, megahercios e incluso gigahercios (1 GHz = 10^9 Hz). Si se considera por ejemplo una señal de 1 gigahercio, la longitud de onda correspondiente es:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} = 0,30 \text{ m}$$

los equipos de radar que emplean señales a estas frecuencias tienen ya dimensiones comparables a la longitud de onda anterior y por ello no tiene sentido hablar en este caso de Teoría de Circuitos sino de Teoría del Campo Electromagnético.

2) Un ejemplo de circuito con parámetros distribuidos: La línea larga de alta tensión

Las líneas de transporte de alta tensión constituyen las arterias de un sistema eléctrico de potencia. Son un ejemplo clásico de circuito con parámetros distribuidos. Estas líneas se caracterizan por cuatro parámetros

básicos, que por orden de importancia son: 1) la inductancia L de la línea expresada en henrios por metro y que se debe a los campos magnéticos concatenados por la línea; 2) la capacidad derivación C de la línea expresada en faradios por metro y que se debe al efecto de reparto de carga eléctrica en los conductores de la línea que actúan como armaduras de un condensador; 3) la resistencia eléctrica de la línea R en ohmios por metro y que se debe a la resistencia eléctrica de los conductores y 4) la conductancia paralelo G expresada en siemens por metro, que se debe a la aparición de corrientes de dispersión entre los conductores y tierra a través de las cadenas de aisladores de la red de transporte; son corrientes que varían mucho con las condiciones climatológicas y en el contenido de humedad y sal en el ambiente; estas corrientes suelen ser reducidas por lo que la conductancia suele despreciarse.

Como se acaba de señalar en el apartado precedente, si la línea es larga (superior a 300 km de longitud), el estudio eléctrico de la línea no se puede hacer utilizando la teoría de parámetros concentrados estudiada en este capítulo, ya que estos parámetros están realmente distribuidos a lo largo de la longitud de toda la línea. Es por ello que el estudio eléctrico de una línea de transporte se debe realizar utilizando el circuito con parámetros distribuidos mostrado en la Figura 2.44, que es válido para una línea bifilar, si los parámetros señalados tienen en cuenta la ida más la vuelta (los dos conductores de la línea), o se pueden concentrar sus valores en el conductor superior, supuesto que el inferior es un conductor de retorno por tierra (y que también en este caso es válido para la representación de una fase de un sistema trifásico, según se verá en el Capítulo 3).

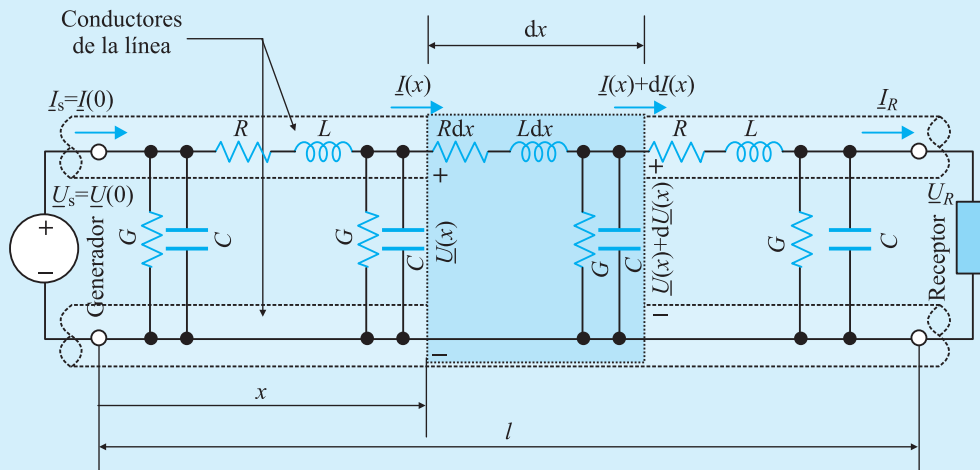


Figura 2.44 Circuito con parámetros distribuidos de una línea larga

En la Figura 2.44, las distancias se miden a partir del extremo emisor o generador, situado en la parte izquierda en el que la tensión compleja tiene un valor $\underline{U}(0)$ y la corriente es $\underline{I}(0)$. En el extremo de la derecha se sitúa el receptor o carga, siendo l la longitud total de la línea. Para modelar la línea nos vamos a concentrar en el tramo diferencial recuadrado en la Figura 2.44. En esta sección diferencial la impedancia serie en régimen estacionario sinusoidal tiene un valor:

$$d\underline{Z} = (R + j\omega L) dx = \underline{Z} dx \quad (1)$$

donde $\underline{Z} = R + j\omega L$ es la impedancia por metro de la línea (Ω/m). De un modo similar la admitancia en paralelo del tramo diferencial tiene una expresión:

$$d\underline{Y} = (G + j\omega C) dx = \underline{Y} dx \quad (2)$$

en la que $\underline{Y} = G + j\omega C$ es la admitancia por metro de la línea (S/m). Los fasores de tensión (entre fase y tierra) y corriente a una distancia x del extremo generador se denominan $\underline{U}(x)$ e $\underline{I}(x)$ respectivamente, y al final del tramo diferencial de línea, los valores respectivos se han señalado por $\underline{U}(x) + d\underline{U}(x)$ e $\underline{I}(x) + d\underline{I}(x)$. Al aplicar los dos lemas de Kirchhoff a este tramo diferencial se puede escribir:

$$\begin{aligned}\underline{U}(x) - [\underline{U}(x) + d\underline{U}(x)] &= -d\underline{U}(x) = \underline{Z} dx \underline{I}(x) \\ \underline{I}(x) - [\underline{I}(x) + d\underline{I}(x)] &= -d\underline{I}(x) = \underline{Y} dx \underline{U}(x)\end{aligned}\quad (3)$$

Expresiones que reciben el nombre de **ecuaciones de los telegrafistas**, y el origen de este término se debe a que estas expresiones se aplicaron por primera vez para el estudio de la propagación de señales en las líneas telegráficas y telefónicas. Las dos ecuaciones acopladas anteriores (3) se pueden combinar para dar lugar a dos ecuaciones desacopladas una para $\underline{U}(x)$ y otra para $\underline{I}(x)$, para conseguirlo se deben derivar con respecto a x ambas ecuaciones y sustituir las derivadas de primer orden de una ecuación en la otra, llegando a obtener los resultados siguientes:

$$\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} = \underline{Z} \underline{Y} \underline{U}(x) \quad ; \quad \frac{d^2 \underline{I}(x)}{dx^2} = \underline{Z} \underline{Y} \underline{I}(x) \quad (4)$$

Se denomina **constante de propagación** γ a la siguiente expresión:

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z} \underline{Y}} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (5)$$

Como se observa en esta ecuación, la constante de propagación es en general una magnitud compleja cuya parte real α se denomina **constante de atenuación** y se mide en nepers/metro y la parte imaginaria β se denomina **constante de fase** y se mide en radianes/segundo. Al introducir esta nueva variable, las ecuaciones (4) se simplifican y se convierten en:

$$\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} = \gamma^2 \underline{U}(x) \quad ; \quad \frac{d^2 \underline{I}(x)}{dx^2} = \gamma^2 \underline{I}(x) \quad (6)$$

cuyas soluciones son de la forma:

$$\underline{U}(x) = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x} \quad ; \quad \underline{I}(x) = C_3 e^{\gamma x} + C_4 e^{-\gamma x} \quad (7)$$

Para evaluar las constantes de integración de las ecuaciones anteriores, se deriva con respecto a x la primera ecuación y se sustituye en la segunda y al tener en cuenta (3) se obtiene:

$$\frac{d\underline{U}(x)}{dx} = C_1 \gamma e^{\gamma x} - C_2 \gamma e^{-\gamma x} = \underline{Z} \underline{I}(x) \quad (8)$$

de donde resulta:

$$\underline{I}(x) = -\frac{C_1 \gamma}{\underline{Z}} e^{\gamma x} + \frac{C_2 \gamma}{\underline{Z}} e^{-\gamma x} \quad (9)$$

que al comparar con la segunda ecuación (7) se obtienen las siguientes relaciones entre las constantes:

$$C_3 = -\frac{C_1 \gamma}{\underline{Z}} \quad ; \quad C_4 = +\frac{C_2 \gamma}{\underline{Z}} \quad (10)$$

Y denominando **impedancia característica** $\underline{Z}_c$ de la línea (que se mide en ohmios) a la expresión:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (11)$$

las relaciones (10) entre las constantes se transforman en:

$$C_3 = -\frac{C_1}{\underline{Z}_c} \quad ; \quad C_4 = +\frac{C_2}{\underline{Z}_c} \quad (12)$$

y de este modo las ecuaciones (7) se pueden escribir del modo siguiente:

$$\underline{U}(x) = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x} \quad ; \quad \underline{I}(x) = -\frac{C_1}{\underline{Z}_c} e^{\gamma x} + \frac{C_2}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} \quad (13)$$

Para determinar las constantes C_1 y C_2 vamos a particularizar los valores de la tensión y la corriente en un punto determinado de la línea. Por ejemplo si se considera que al principio de la línea, es decir para $x = 0$, se tiene una tensión $\underline{U} = \underline{U}(0)$ y una corriente $\underline{I} = \underline{I}(0)$, las ecuaciones (13) se convierten en:

$$\underline{U}(0) = C_1 + C_2 \quad ; \quad \underline{I}(0) = \frac{C_2 - C_1}{\underline{Z}_c} \quad (14)$$

de donde se deduce que las constantes tienen los siguientes valores:

$$C_1 = \frac{\underline{U}(0) - \underline{Z}_c \underline{I}(0)}{2} \quad ; \quad C_2 = \frac{\underline{U}(0) + \underline{Z}_c \underline{I}(0)}{2} \quad (15)$$

valores que al llevar a (13) dan los resultados siguientes:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \left[\frac{\underline{U}(0) - \underline{Z}_c \underline{I}(0)}{2} \right] e^{\gamma x} + \left[\frac{\underline{U}(0) + \underline{Z}_c \underline{I}(0)}{2} \right] e^{-\gamma x} \\ \underline{I}(x) &= -\left[\frac{\underline{U}(0) - \underline{Z}_c \underline{I}(0)}{2} \right] e^{\gamma x} + \left[\frac{\underline{U}(0) + \underline{Z}_c \underline{I}(0)}{2} \right] e^{-\gamma x} \end{aligned} \quad (16)$$

Conociendo por consiguiente la tensión y corriente al principio de la línea $\underline{U}(0)$ e $\underline{I}(0)$, las ecuaciones (16) permiten calcular la tensión y la corriente en cualquier otro punto genérico de la línea. Una forma más compacta y simple de escribir las ecuaciones anteriores es utilizando funciones hiperbólicas, y el lector puede demostrar fácilmente que se llega a las expresiones siguientes:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}(0) \text{Ch} \gamma x - \underline{Z}_c \underline{I}(0) \text{Sh} \gamma x \quad ; \quad \underline{I}(x) = \underline{I}(0) \text{Ch} \gamma x + \frac{\underline{U}(0)}{\underline{Z}_c} \text{Sh} \gamma x \quad (17)$$

Que son las ecuaciones generales para el estudio eléctrico de una línea de transporte de energía eléctrica. En el caso de que la línea no tenga pérdidas, es decir que se desprece la resistencia y la conductancia de la línea (lo que constituye una buena aproximación a la realidad) entonces los valores de la impedancia característica y la constante de propagación de la línea son de la forma:

$$\underline{Z}_c = R_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad ; \quad \gamma = +j\beta = j\omega \sqrt{LC} \quad (18)$$

Es decir la impedancia característica de la línea es un número real (una resistencia R_c) y su valor para una línea de alta tensión es del orden de 400Ω . Por otra parte, la constante de propagación es imaginaria pura, lo que significa que no hay atenuación ni de la tensión ni de la corriente a lo largo de toda la línea. Al llevar estos valores a (17) se obtiene finalmente:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}(0) \cos \beta x - j \underline{R}_c \underline{I}(0) \sin \beta x \quad ; \quad \underline{I}(x) = \underline{I}(0) \cos \beta x - j \frac{\underline{U}(0)}{\underline{R}_c} \sin \beta x \quad (19)$$

Lo que significa que en una línea sin pérdidas, la tensión y la corriente varían armónicamente en función de la posición o coordenada x . Analizando este problema de la línea larga, puede darse cuenta el lector de la dificultad que supone el estudio de circuitos con parámetros distribuidos. Afortunadamente en el caso de la Electrotecnia este estudio prácticamente se limita al estudio de las líneas largas o a los efectos de la propagación de sobretensiones en estas líneas. Sin embargo en la técnica de las telecomunicaciones el análisis anterior constituye el prelude del estudio de las líneas de transmisión, bien sea, con líneas de conductores separados, coaxiales, redes de microondas, fibra óptica, etc., en donde suele ser muy importante diseñar la línea con los parámetros adecuados para reducir atenuaciones, que se eliminen las distorsiones de las señales transmitidas, se eviten ondas estacionarias o reflexiones de onda, etc., ya que las señales correspondientes tienen muy poca energía, pero una gran cantidad de información, por lo que deben transmitirse en condiciones óptimas.

2.9. Potencia en un circuito eléctrico en régimen de corriente alterna sinusoidal

Consideremos el dipolo eléctrico mostrado en la Figura 2.45, en el que se señalan los sentidos de referencia de la tensión aplicada y la corriente eléctrica absorbida (repasar convenio de signos para la potencia, en el Epígrafe 1.2.3). Supóngase que los valores instantáneos de ambas magnitudes sean de la forma:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t \quad ; \quad i(t) = \sqrt{2} I \cos (\omega t - \varphi) \quad (2.100)$$

se ha tomado la tensión como origen de fases, de tal modo que la corriente según (2.100) está *retrasada* de la tensión un ángulo de φ grados. Por definición este desfase se considera positivo cuando la corriente se retrasa respecto de la tensión (es decir para cargas inductivas donde el argumento de la impedancia tiene un ángulo positivo), y se considera negativo cuando la corriente se adelanta a la tensión (es decir para cargas capacitivas en las que el argumento de la impedancia representa un ángulo negativo).

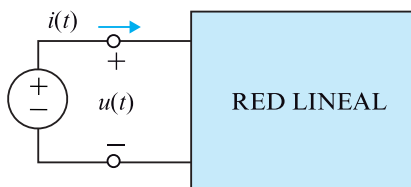


Figura 2.45 Potencia en un dipolo receptor

La **potencia eléctrica instantánea** absorbida por el dipolo (que para mayor sencillez, se puede considerar que contiene únicamente elementos pasivos) es igual a:

$$p(t) = u(t)i(t) = 2UI \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.101)$$

que teniendo en cuenta que:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

se transforma en:

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t - \varphi) \quad (2.102)$$

en la Figura 2.46 se han representado las señales $u(t)$ e $i(t)$ de (2.100) y la potencia $p(t)$ de (2.102). Observamos que la potencia tiene una frecuencia doble que la tensión o la corriente. Por ejemplo en la red eléctrica española ($f = 50$ Hz) una lámpara fluorescente parpadea con una frecuencia de 100 Hz no de 50 Hz. El ruido de la reactancia (o balasto) de un fluorescente es un zumbido de 100 Hz no de 50 Hz.

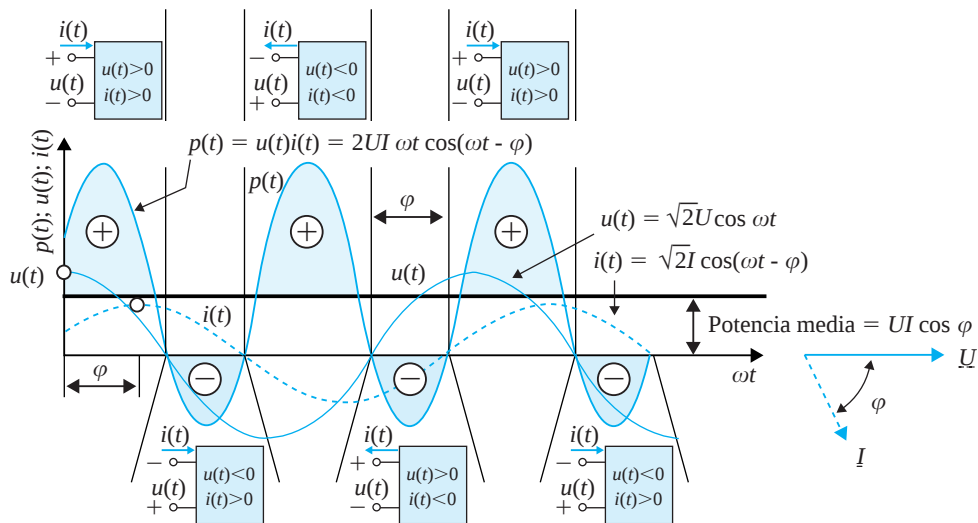


Figura 2.46 Señales instantáneas de tensión, corriente y potencia

En la Figura 2.46 se observa que la potencia instantánea $p(t)$ toma valores negativos, correspondiendo a los intervalos de tiempo en los que la tensión $u(t)$ y la corriente $i(t)$ tienen signos opuestos. Durante estos intervalos se devuelve energía a la fuente que impone el potencial $u(t)$ procedente de los elementos pasivos contenidos en el dipolo receptor de la Figura 2.45. Compruébese que este efecto solamente se produce si el desfase entre $u(t)$ e $i(t)$, es decir el ángulo φ , es distinto de cero (ver ecuación 2.102). Para que el ángulo φ sea distinto de cero, la red de la Figura 2.45 debe contener además de un elemento resistivo en el que se disipa la potencia, otro(s) elemento(s) inductivo y (o) capacitivos. En estos elementos existe una reserva de energía que responde a:

$$W = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu^2 \quad (2.103)$$

que aumenta a cuenta de la energía suministrada por el generador cuando $u(t)$ e $i(t)$ crecen en valor absoluto y disminuye cuando las mismas magnitudes se reducen. La energía devuelta por los campos eléctricos y magnéticos, almacenada en los condensadores y bobinas respectivamente, junto con la energía proveniente del generador se transforma normalmente en calor en la resistencia del dipolo receptor. Pero cuando la energía devuelta por estos campos supera la energía disipada en la resistencia, el exceso de energía vuelve al generador, acelerando su marcha durante un breve intervalo de tiempo; justamente en estos momentos la potencia absorbida por el dipolo es negativa, lo que indica que el generador que alimenta este circuito está recibiendo potencia del dipolo receptor.

Indudablemente si el dipolo de la Figura 2.45 es receptor, la potencia absorbida por el mismo expresada en (2.102) tendrá un valor medio no nulo mayor que cero (siempre que dentro de él exista un elemento pasivo que disipe energía, como es el caso de una resistencia). El valor medio de (2.102) es igual a:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi + UI \cos (2\omega t - \varphi)] dt \quad (2.104)$$

que representa una potencia media:

$$P = UI \cos \varphi \quad (2.105)$$

que corresponde al sumando independiente del tiempo de (2.102). De este modo se puede considerar la potencia instantánea $p(t)$ expresada en (2.102) y dibujada en la Figura 2.46, que es la suma de la potencia media $UI \cos \varphi$ más un término *fluctuante* $UI \cos (2\omega t - \varphi)$ que se puede escribir así:

$$UI \cos (2\omega t - \varphi) = (UI \cos \varphi) \cos 2\omega t + (UI \sin \varphi) \sin 2\omega t \quad (2.106)$$

donde:

$$P = UI \cos \varphi \quad (2.107)$$

es como ya se ha indicado la potencia media, denominada también **potencia activa**. Por analogía se considera el término:

$$Q = UI \sin \varphi \quad (2.108)$$

que se denomina **potencia reactiva**. De acuerdo con estas denominaciones y simbologías, la ecuación (2.102) que representa la potencia instantánea se puede expresar de este modo:

$$p(t) = P(1 + \cos 2\omega t) + Q \sin 2\omega t \quad (2.109)$$

el primer término tiene un valor medio igual a P (potencia activa) y su componente alterna oscila entre 0 y $2P$ con una pulsación 2ω , este término se denomina **potencia activa instantánea** y nunca es negativo. Se puede identificar a P como la componente de corriente continua de este primer sumando, o de otro modo que P es la potencia constante que suministra la red de c.a. y está ligada a la energía disipada en la carga. El segundo término tiene un valor medio nulo y su amplitud oscila entre $-Q$ y $+Q$ con una pulsación 2ω , se denomina por definición **potencia reactiva instantánea** y su valor de pico Q es la potencia reactiva (2.108).

En resumen, la potencia eléctrica instantánea absorbida o generada por un circuito consta según (2.102) de dos términos:

1. Un término constante P , denominado potencia activa, que es igual al valor medio $P = UI \cos \varphi$ de la potencia instantánea.
2. Un término $UI \cos (2\omega t - \varphi)$ oscilante de pulsación 2ω y de valor medio nulo, denominado potencia fluctuante, que se puede descomponer a su vez en dos sumandos (2.106):
 - a) Un término de amplitud igual a la potencia activa: $P = UI \cos \varphi$ y de pulsación 2ω .
 - b) Un término de amplitud igual a la potencia reactiva: $Q = UI \sin \varphi$ que está retrasado 90° respecto al anterior y es también de pulsación 2ω . (Téngase en cuenta que se cumple: $\sin 2\omega t = \cos (2\omega t - 90^\circ)$).

El producto UI que es igual a la amplitud de la potencia fluctuante recibe el nombre de **potencia aparente** S . Entre las potencias P , Q y S existen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \text{Potencia activa:} \quad P &= UI \cos \varphi = S \cos \varphi & [\text{W}] \\
 \text{Potencia reactiva:} \quad Q &= UI \sin \varphi = S \sin \varphi & [\text{VAr}] \\
 \text{Potencia aparente:} \quad S &= UI = \sqrt{P^2 + Q^2} & [\text{A}]
 \end{aligned}
 \tag{2.110}$$

Cada una de las potencias anteriores responde por consiguiente a una *fórmula concreta* y a un *símbolo propio*. También tienen unidades de medida específicas. Así y como ya se ha indicado en (2.110), la potencia activa P se expresa en *vatios* (W) o en kilovatios (kW); la potencia aparente S se expresa en *voltio-amperios* (o *voltamperios*, VA) o en *kilovoltio-amperios* (o *kilovoltamperios* kVA), (en este caso en el argot de los electricistas se deletrea *caveas*) y la potencia reactiva Q se expresa en *voltio-amperios reactivos* (o *voltamperios reactivos*, VAr). Desde un punto de vista estricto las tres magnitudes P , S y Q tienen dimensiones de potencia, pero el utilizar unidades de medida distintas facilita su identificación, evitando de este modo errores de interpretación.

La especificación de la potencia en las máquinas y equipos de c.a. es diversa y tienen un origen práctico, así las máquinas generadoras de c.a. (alternadores de las Centrales Eléctricas) y los transformadores definen sus potencias en forma de potencia aparente medida en VA, kVA, MVA; el conocimiento de esta potencia y la tensión nominal (cuasiconstante) a la que se realiza el suministro, indican de acuerdo con la última ecuación (2.110), la máxima corriente que puede llevar la máquina, que es en definitiva la que define la sección de los conductores de sus devanados eléctricos y de los cables de salida.

Los motores de c.a. se especifican por su tensión de alimentación y por su potencia mecánica en el eje en kW o caballos de vapor CV ($1 \text{ CV} = 736 \text{ W}$), que conociendo el rendimiento definen la potencia eléctrica activa que absorben de la red. Las reactancias, bien sean inductivas o capacitivas se expresan en forma de potencia reactiva y por ello se miden en kVAr, mientras que las resistencias eléctricas (por ejemplo una plancha o un radiador eléctrico) se especifican en forma de potencias activas y por ello se miden en kW.

Se ha visto en el capítulo anterior, en el que se trataban fundamentalmente circuitos de c.c., en los que las tensiones y corrientes no dependían del tiempo, que solo existía un tipo de potencia que era el producto de tensión por corriente, es decir UI y que se medía en vatios. Sin embargo ahora, en c.a. sinusoidal, la potencia que *aparentemente* se consume es UI y se mide en VA. Sin embargo, hemos visto que solamente la potencia activa es la que

puede dar resultados tangibles, ya que representa la potencia media que realmente se consume. Esta potencia activa es, en general, menor que la potencia aparente, lo que se debe a la presencia del factor $\cos \varphi$ en la primera ecuación (2.110) y que por ello se denomina *factor de potencia*, cuyo valor puede oscilar entre 0 y 1:

$$\text{Factor de potencia} = \frac{P}{S} = \cos \varphi \quad ; \quad 0 < \cos \varphi \leq 1 \quad (2.111)$$

el factor de potencia aparte de expresar el cociente entre la potencia activa y aparente (P/S), representa el coseno del ángulo que forma la tensión y la corriente de un circuito, y que además si se trata de un circuito pasivo (por ejemplo una impedancia) el ángulo φ se identifica con el argumento que tiene la impedancia compleja. De este modo, el ángulo φ es básico para calcular la potencia activa que realmente se desarrolla en una impedancia. Para un circuito inductivo, la corriente se retrasa a la tensión y por ello se dice que el *factor de potencia va en retraso*. Al contrario, en un circuito capacitivo, la corriente se adelanta a la tensión y por ello se dice que el *factor de potencia está en adelanto*. De este modo, el determinante que se añade al factor de potencia (abreviadamente f.d.p.) indica la posición relativa entre la tensión y la corriente.

Es importante destacar que las expresiones (2.110) son modulares (no complejas). Por convenio, se consideran los ángulos φ positivos para cargas inductivas y negativos para las capacitivas. Este convenio es innecesario para calcular las potencias activas (ya que $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$), pero es necesario para dar un signo a las potencias reactivas (ya que $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$). De acuerdo con esto y como veremos a continuación, *las potencias reactivas se consideran positivas para cargas inductivas y negativas para las capacitivas*.

Vamos a calcular las diferentes potencias en los elementos pasivos simples: R , L y C . Para homogeneizar el estudio vamos a considerar un generador cuya tensión se toma como referencia para los tres elementos, de acuerdo con la expresión:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t \quad (2.112)$$

a) Resistencia

En la Figura 2.47a se muestra el circuito correspondiente. La relación fasorial es:

$$\underline{U} = R \underline{I} \Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{U \angle 0^\circ}{R} \quad (2.113)$$

que corresponde en el dominio del tiempo a:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t \quad ; \quad i(t) = \sqrt{2} I \cos \omega t \quad ; \quad U = RI \quad ; \quad \varphi = 0^\circ \quad (2.114)$$

dando lugar a una potencia instantánea $p(t)$ según (2.109):

$$p(t) = 2UI \cos^2 \omega t = UI + UI \cos 2\omega t = P(1 + \cos 2\omega t) \quad (2.115)$$

en la Figura 2.47b se han representado conjuntamente las señales, $p(t)$, $u(t)$ e $i(t)$. Se observa que en cualquier instante de tiempo $p(t) \geq 0$. El signo constantemente positivo de la potencia instantánea, está ligado al hecho físico de que la resistencia absorbe permanentemente energía eléctrica, que se transforma en calor por efecto Joule.

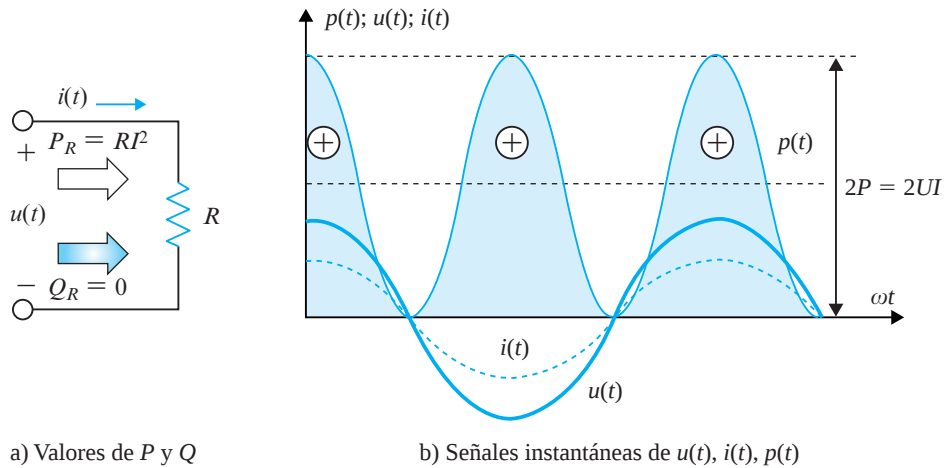


Figura 2.47 Potencia instantánea en una resistencia

Las potencias activa, reactiva y aparente, se obtienen aplicando (2.110) y teniendo en cuenta que $U = RI$, y $\varphi = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} P_R &= UI \cos \varphi = UI = RI^2 & [\text{W}] \\ Q_R &= UI \sin \varphi = 0 & [\text{VAr}] \\ S_R &= UI & [\text{VA}] \end{aligned} \quad (2.116)$$

de donde se deduce que en una resistencia coinciden las potencias activa y aparente y su magnitud representa la potencia disipada en calor. La potencia reactiva es nula. Se dice entonces que una resistencia consume una potencia activa RI^2 , pero no consume potencia reactiva. En la Figura 2.47 se han señalado con una flecha blanca la magnitud y sentido de la potencia activa P_R y con una flecha sombreada la potencia reactiva Q_R .

b) Inductancia

En la Figura 2.48a se muestra el circuito correspondiente, la relación fasorial es:

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I} \Rightarrow \underline{I} = \frac{U \angle 0^\circ}{j\omega L} = \frac{U}{\omega L} \angle -90^\circ \quad (2.117)$$

que corresponde en el dominio del tiempo a:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t \quad ; \quad i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - 90^\circ) \quad ; \quad U = L\omega I \quad ; \quad \varphi = 90^\circ \quad (2.118)$$

obsérvese que se ha puesto $\varphi = +90^\circ$, debido a que la carga es inductiva pura (para cargas inductivas se toman los ángulos positivos). La potencia instantánea $p(t)$ en la inductancia es de la forma:

$$p(t) = 2UI \cos \omega t \cos(\omega t - 90^\circ) = UI \cos(2\omega t - 90^\circ) \quad (2.119)$$

es decir según (2.109):

$$p(t) = UI \sin 90^\circ \sin 2\omega t = Q_L \sin 2\omega t \quad (2.120)$$

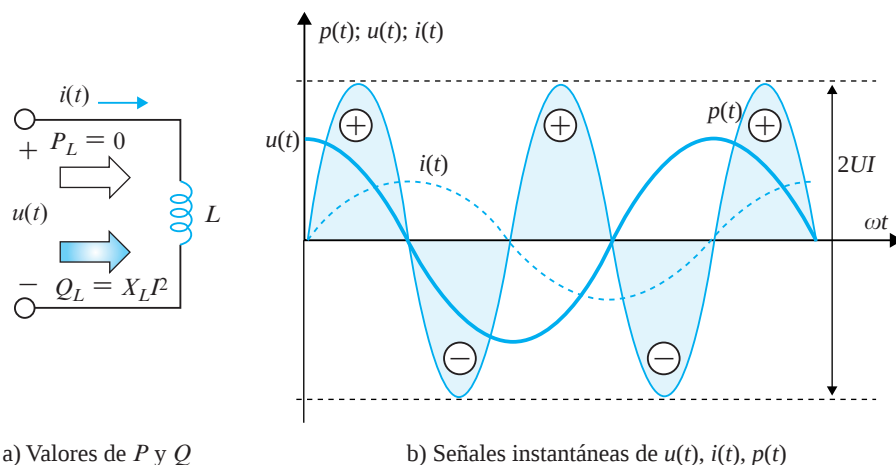


Figura 2.48 Potencia instantánea en una inductancia

En la Figura 2.48b se han representado conjuntamente las señales $u(t)$, $i(t)$, y $p(t)$. Se observa que $p(t)$ es una potencia fluctuante de pulsación 2ω , lo que significa que en el intervalo de tiempo en que $p(t)$ es positiva, el generador entrega energía a la inductancia, la cual se almacena en forma de campo magnético, mientras que en los intervalos en que $p(t)$ es negativa, la energía almacenada en la bobina es devuelta al generador. Esta potencia que oscila entre el generador y la inductancia es precisamente la potencia reactiva Q_L . El valor medio de (2.120) es cero y no existe disipación de energía sino intercambio de la misma⁴.

Las potencias activa, reactiva y aparente se obtienen aplicando (2.110), teniendo en cuenta que en este caso se cumple: $U = L\omega I$, $\varphi = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} P_L &= UI \cos \varphi = UI \cos 90^\circ = 0 & [\text{W}] \\ Q_L &= UI \sin \varphi = UI \sin 90^\circ = UI = L\omega I^2 = X_L I^2 & [\text{VAr}] \\ S_L &= UI & [\text{VA}] \end{aligned} \quad (2.121)$$

en consecuencia, en una inductancia coinciden las potencias reactiva y aparente, el valor correspondiente es igual según (2.120) y (2.121) a la amplitud máxima de la potencia instantánea. La potencia activa es nula. En definitiva, una inductancia no consume potencia activa, pero absorbe una potencia reactiva positiva $L\omega I^2 = X_L I^2$. La potencia reactiva de una inductancia se puede expresar como el producto de la pulsación ω por el valor máximo de la energía almacenada por el campo magnético. Téngase en cuenta que si denominamos $I_m = \sqrt{2}I$ a la corriente máxima, la energía máxima que se almacena periódicamente es:

$$W_{\text{mag máx}} = \frac{1}{2} L I_m^2 = L I^2 \quad (2.122)$$

y por consiguiente se cumple:

$$Q_L = L\omega I^2 = \omega W_{\text{mag máx}} \quad (2.123)$$

⁴ La potencia reactiva representa en cierto modo una *energía*, que oscilando como un péndulo va y viene sin realizar ningún trabajo útil.

c) Condensador

En la Figura 2.49a se muestra el circuito correspondiente. La relación fasorial es:

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} \Rightarrow \underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} \Rightarrow \underline{I} = +j\omega C \underline{U} \angle 0^\circ = UC\omega \angle 90^\circ \quad (2.124)$$

que corresponde en el dominio del tiempo a:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t \quad ; \quad i(t) = \sqrt{2} I \cos (\omega t + 90^\circ) \quad (2.125)$$

obsérvese que se ha puesto ahora $\varphi = -90^\circ$ debido a que la carga es capacitiva pura. La potencia instantánea $p(t)$ en el condensador es igual a:

$$p(t) = 2 UI \cos \omega t \cos (\omega t + 90^\circ) = UI \cos (2\omega t + 90^\circ) \quad (2.126)$$

es decir según (2.109):

$$p(t) = -UI \sin 90^\circ \sin 2\omega t = Q_C \sin 2\omega t \quad (2.127)$$

En la Figura 2.49b se han representado conjuntamente las señales $u(t)$, $i(t)$ y $p(t)$. Se observa que $p(t)$ es una potencia fluctuante de pulsación 2ω , lo que significa que durante el intervalo de tiempo en que $p(t)$ es positiva, el generador entrega energía al condensador, la cual se almacena en forma de campo eléctrico, mientras que en los intervalos en los que $p(t)$ es negativa, la energía almacenada en el condensador es devuelta al generador. Esta potencia que oscila entre el generador y la capacidad es precisamente la potencia reactiva Q_C . El valor medio de $p(t)$ es cero y no existe disipación de energía, sino intercambio de la misma.

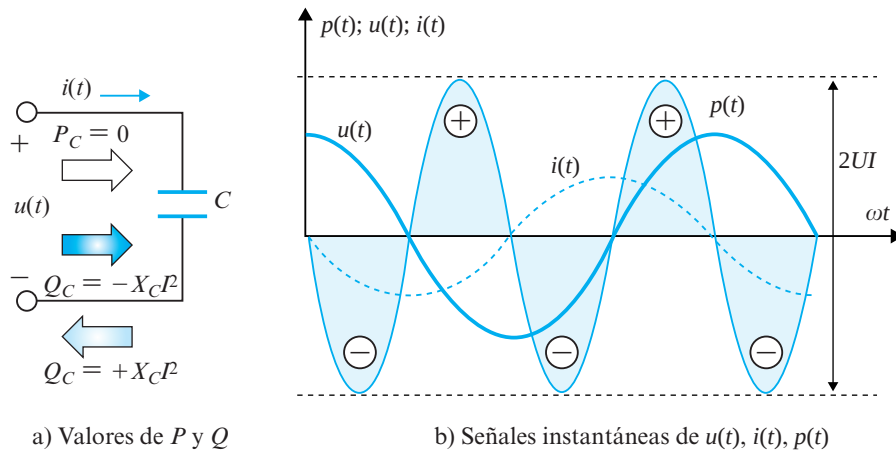


Figura 2.49 Potencia instantánea en un condensador

Teniendo en cuenta que en este caso se cumple:

$$U = \frac{1}{C\omega} I \quad ; \quad \varphi = -90^\circ$$

Las potencias activa, reactiva y aparente se obtienen aplicando (2.110):

$$\begin{aligned} P_C &= UI \cos \varphi = UI \cos (-90^\circ) = 0 & [\text{W}] \\ Q_C &= UI \sin \varphi = UI \sin (-90^\circ) = -\frac{1}{C\omega} I^2 = -X_C I^2 & [\text{VAr}] \\ S_C &= UI & [\text{VA}] \end{aligned} \quad (2.128)$$

en consecuencia, en un condensador coinciden las potencias reactiva y aparente. La potencia activa es nula. Por consiguiente un condensador no consume potencia activa pero *absorbe una potencia reactiva negativa*:

$$Q_C = -\frac{1}{C\omega} I^2$$

o en otras palabras el condensador es un *generador de potencia reactiva* que entrega a la fuente:

$$Q_C = +\frac{1}{C\omega} I^2$$

La potencia reactiva de un condensador se puede expresar como el producto de la pulsación ω por el valor máximo de la energía almacenada por el campo eléctrico. Téngase en cuenta que si denominamos $U_m = \sqrt{2} U$ a la tensión máxima, la energía eléctrica que se almacena periódicamente tiene un valor:

$$W_{\text{elec máx}} = \frac{1}{2} C U_m^2 = C U^2 \quad (2.129)$$

y por consiguiente se cumplirá:

$$Q_C = -\frac{1}{C\omega} I^2 = -\omega C U^2 = -\omega W_{\text{elec máx}} \quad (2.130)$$



Comentarios prácticos

a) Sobre el significado físico de la potencia reactiva: Para comprender mejor el significado de la potencia reactiva, se va a considerar una red sinusoidal de tensión eficaz U y pulsación ω , que alimenta un circuito serie constituido por una resistencia R , una inductancia L y una capacidad C . Si se denomina $\underline{I}$ a la corriente fasorial del circuito, la relación con la tensión aplicada es la siguiente:

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} - j\frac{1}{C\omega}\underline{I} \quad (a)$$

Por lo tanto la potencia compleja absorbida por este circuito y que suministra la red es:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = \left[R\underline{I} + j\omega L\underline{I} - j\frac{1}{C\omega}\underline{I} \right] \cdot \underline{I}^* \quad (b)$$

y como quiera que $\underline{S} = P + jQ$, que el producto $\underline{I} \cdot \underline{I}^* = I^2$, y teniendo en cuenta además las expresiones (2.123) y (2.130), la ecuación anterior (b) se transforma en:

$$\underline{S} = P + jQ = RI^2 + j\omega LI^2 - j\frac{1}{C\omega}I^2 = RI^2 + j\omega(W_{\text{mag máx}} - W_{\text{elect máx}}) \quad (\text{c})$$

Esta ecuación permite identificar claramente a la potencia activa como la potencia disipada en la resistencia del circuito y a la potencia reactiva como una magnitud que es proporcional a la diferencia entre las energías magnéticas máximas almacenadas en los campos: magnético (inductancia) y eléctrico (capacidad). Cuando estas dos últimas energías son iguales se dice que el circuito está en resonancia (ver Epígrafe 2.15) y la potencia reactiva es nula. En el caso general en que $W_{\text{mag}} \neq W_{\text{elect}}$, existe evidentemente un intercambio continuo de energía entre el generador (red) y el circuito serie, siendo la potencia reactiva una medida de la participación del generador en este intercambio de energía de una parte a otra del circuito. En el caso específico de que exista resonancia, el intercambio solamente afecta a las partes inductiva y capacitiva del circuito sin la intervención del generador o red, de tal modo que la energía almacenada en un periodo de tiempo por la inductancia se transfiere a la capacidad y viceversa.

b) ¿Qué receptores consumen potencia reactiva inductiva? Las inductancias y por ende los motores eléctricos consumen potencia reactiva, pero también consumen potencia reactiva los convertidores electrónicos empleados en la regulación y control de máquinas eléctricas. Considérese por simplicidad un rectificador controlado con tiristores; para regular la tensión de salida, lo que se hace es retrasar el ángulo de encendido respecto al momento en que la tensión de alterna de la red pasa por cero, lo que provoca que el armónico principal de la corriente se retrase respecto de la tensión un ángulo, que coincide con el de encendido de los tiristores. El valor medio de la tensión de c.c. producida es proporcional al coseno de este ángulo, es por ello que cuando la tensión de salida del rectificador controlado es pequeña, significa que el ángulo de encendido es grande, el rectificador controlado se comporta como un receptor que consume mucha potencia reactiva inductiva.

c) El condensador síncrono: Los motores síncronos sobreexcitados absorben una corriente de la red que se adelanta a la tensión, actuando como si se tratara de una carga R-C. La potencia activa absorbida por el motor, coincide, en el caso ideal, con la potencia mecánica desarrollada por el motor y al ajustar la corriente de excitación, se puede regular la componente reactiva de la corriente. En muchas industrias que utilizan motores síncronos en su proceso productivo, se emplea esta propiedad para corregir el f.d.p. de la instalación. Es por este motivo que el funcionamiento del motor síncrono en estas condiciones se denomina *condensador síncrono*.

■ 2.10. Potencia compleja

En Teoría de Circuitos, cuando se realizan cálculos con potencias eléctricas, es a menudo muy útil combinar las potencias activa y reactiva de un elemento en una única magnitud compleja, que se denomina **potencia compleja**. Si se considera un dipolo receptor como el mostrado en la Figura 2.45, alimentado por una tensión $u(t)$ (tomada como referencia):

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t \quad (2.131)$$

y que absorbe una corriente $i(t)$:

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.132)$$

los valores fasoriales de las magnitudes anteriores son:

$$\underline{U} = U \angle 0^\circ \quad ; \quad \underline{I} = I \angle -\varphi \quad (2.133)$$

Se define como potencia compleja $\underline{S}$ absorbida por el dipolo receptor a:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \angle 0^\circ I \angle +\varphi = UI \angle \varphi \quad (2.134)$$

donde $\underline{I}^*$ expresa el conjugado del fasor $\underline{I}$. Al convertir (2.134) a la forma rectangular o binómica nos da:

$$\underline{S} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi \quad (2.135)$$

que si se tiene en cuenta (2.110), se traduce en:

$$\underline{S} = P + jQ \quad (2.136)$$

es decir la parte real de la potencia compleja es la potencia activa, mientras que la parte imaginaria es la potencia reactiva. Es frecuente que el estudiante principiante exprese la potencia compleja así: $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}$, **¡lo cual es incorrecto!** Observe el lector que la fórmula verdadera es la (2.134), donde es necesario tomar el conjugado de la corriente para conseguir que las cargas inductivas (en las que la corriente se retrasa a la tensión) den lugar a potencias reactivas positivas. (El lector puede demostrar que si se tomara el convenio contrario, la fórmula de la potencia compleja sería $\underline{U}^* \cdot \underline{I}$, pero **nunca** el producto $\underline{U} \cdot \underline{I}$; aunque en este epígrafe, al tomar la tensión como referencia, estos dos últimos productos dan lugar a los mismos resultados)⁵.

A veces es conveniente dibujar las componentes de la potencia compleja en un diagrama complejo, como se indica en la Figura 2.50. Es evidente que para una carga inductiva (f.d.p. en retraso) se tiene: $0 < \varphi \leq 90^\circ$ por lo que Q es positiva, y el vector $\underline{S}$ estará situado en el primer cuadrante. Para una carga capacitiva (f.d.p. en adelanto) se tiene: $-90^\circ \leq \varphi < 0$, por lo que Q es negativa, y $\underline{S}$ estará situado en el cuarto cuadrante. La Figura 2.50 se conoce vulgarmente con el nombre de **triángulo de potencias**.

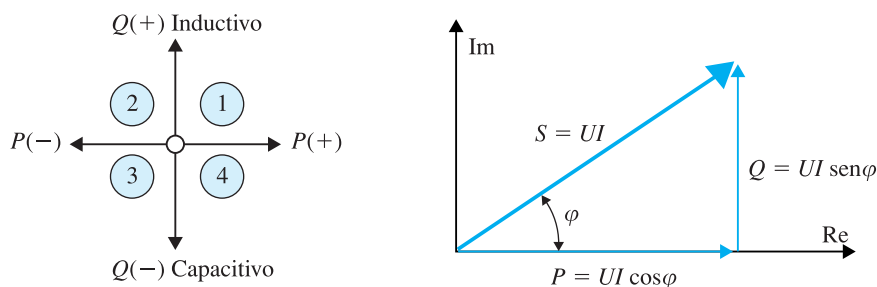


Figura 2.50 Triángulo de potencias complejas

Si consideramos la potencia compleja asociada al circuito en paralelo de la Figura 2.51 (expresado en el dominio de la frecuencia), se tendrá:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U} \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)^* = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U} \cdot \underline{I}_2^* = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 \quad (2.137)$$

que expresa el denominado **principio de conservación de la potencia compleja** que indica que la potencia compleja suministrada por la fuente (o en general fuentes) es igual a la suma de las potencias complejas absorbidas por las cargas, o de un modo equivalente.

$$P_g = \sum P_i \quad ; \quad Q_g = \sum Q_i \quad ; \quad S_g = \sqrt{P_g^2 + Q_g^2} \quad (2.138)$$

⁵ Si se consideran los fasores generales: $\underline{U} = U \angle \varphi_u$; $\underline{I} = I \angle (\varphi_u - \varphi)$, se obtienen los siguientes resultados: $\underline{U} \cdot \underline{I}^* = UI \angle \varphi = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ$; $\underline{U}^* \cdot \underline{I} = UI \angle -\varphi = P - jQ$ mientras que $\underline{U} \underline{I} = UI \angle (2\varphi_u - \varphi)$.

que indica que la potencia activa suministrada por el generador es igual a la suma de las potencias activas de las cargas y lo mismo con las potencias reactivas (teniendo en cuenta en este caso los signos correspondientes). La última relación de (2.138) muestra cómo calcular el módulo de la potencia aparente del generador que en ningún caso será la suma modular de las potencias aparentes de las cargas (a no ser que tengan igual f.d.p.).

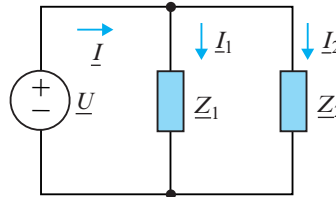


Figura 2.51 Alimentación de un generador a dos cargas en paralelo



Amplíe sus conocimientos

Teorema de conservación de la potencia

A nivel histórico, el principio de conservación de la potencia activa está implícito en el principio de conservación de la energía enunciado por Helmholtz. A principios del siglo XX, el ingeniero francés Paul Boucherot enunció el principio de la conservación de la potencia reactiva y es por ello que el principio de conservación de la potencia compleja, señalado en la ecuación (2.137), se denomina por algunos autores como Teorema de Boucherot. El ingeniero holandés B. Tellegen enunció en 1952 un teorema que lleva su nombre, que es una generalización del principio de conservación de la potencia en los circuitos eléctricos (ver Epígrafe 1.16.4). De acuerdo con el teorema de Tellegen aplicado a los circuitos de c.a. utilizando magnitudes fasoriales, si se tiene un circuito de r ramas, en el que las tensiones fasoriales cumplen el segundo lema de Kirchhoff y las corrientes fasoriales cumplen el primer lema, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^r \underline{U}_k \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^r \underline{S}_k = 0 \quad (1)$$

que al separar la red en elementos generadores (activos) y receptores (pasivos), la ecuación anterior se transforma en:

$$\underline{S}_g = \underline{S}_r \quad (2)$$

y teniendo en cuenta que $\underline{S}_g = P_g + jQ_g$; $\underline{S}_r = P_r + jQ_r$, la ecuación (2) se transforma en:

$$P_g = P_r \quad ; \quad Q_g = Q_r \quad (3)$$

es decir, la potencia activa (reactiva) entregada por los generadores es igual a la potencia activa (reactiva) que absorben los receptores, que es una demostración de que se cumple el balance de potencias en los circuitos de corriente alterna.

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.15**

En el circuito serie de la Figura 2.52, el generador de tensión tiene un valor instantáneo dado por la expresión: $u(t) = \sqrt{2} 50 \cos 100t$ voltios. Calcular: a) intensidad instantánea; b) potencia instantánea desarrollada por el generador; c) potencia compleja entregada por el generador; d) potencia compleja de cada elemento pasivo; e) a partir de los resultados de los apartados c) y d), compruébese el balance de potencias en el circuito, es decir que la potencia compleja suministrada por el generador es igual a la suma de las potencias complejas desarrolladas en los receptores.

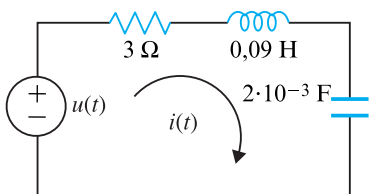


Figura 2.52 Ejemplo de aplicación 2.15

Solución

a) El fasor de tensión del generador es:

$$\underline{U} = 50 \angle 0^\circ$$

y las impedancias complejas, teniendo en cuenta que $\omega = 100$ rad/seg, son:

$$\underline{Z}_R = 3 \, \Omega \quad ; \quad \underline{Z}_L = +jL\omega = +j9 \, \Omega \quad ; \quad \underline{Z}_C = -j \frac{1}{C\omega} = -j5 \, \Omega$$

por consiguiente la corriente compleja en la malla tiene un valor:

$$\underline{I} = \frac{50 \angle 90^\circ}{3 + j9 - j5} = \frac{50 \angle 0^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = 10 \angle -53,13^\circ \text{ amperios}$$

que corresponde a un valor instantáneo:

$$i(t) = \sqrt{2} 10 \cos(100t - 53,13^\circ)$$

b) La potencia instantánea desarrollada por el generador es por consiguiente:

$$p(t) = u(t)i(t) = 1.000 \cos 100t \cos(100t - 53,13^\circ)$$

es decir:

$$p(t) = 500 \cos 53,13^\circ + 500 \cos(200t - 53,13^\circ) = 300 + 500 \cos(200t - 53,13^\circ)$$

que corresponde a una potencia media de 300 W y a una potencia fluctuante:

$$500 \cdot \cos(200t - 53,13^\circ)$$

c) La potencia compleja suministrada por el generador vale:

$$\underline{S}_g = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 50 \angle 0^\circ \cdot 10 \angle 53,13^\circ = 500 \angle 53,13^\circ = 300 + j400$$

es decir:

$$P_g = 300 \text{ W} ; Q_g = +400 \text{ VAr} ; S_g = 500 \text{ VA}$$

d) En la resistencia se disipa únicamente potencia activa:

$$P_R = RI^2 = 3 \cdot 10^2 = 300 \text{ W}$$

en la inductancia se absorbe potencia reactiva positiva:

$$Q_L = +XI^2 = 9 \cdot 10^2 = 900 \text{ Var}$$

y en el condensador se absorbe potencia reactiva negativa:

$$Q_C = -X_C I^2 = -5 \cdot 10^2 = -500 \text{ VAr}$$

o en forma compleja:

$$\underline{S}_R = 300 + j0 ; \underline{S}_L = 0 + j900 ; \underline{S}_C = 0 - j500$$

e) Según el apartado c), la potencia compleja suministrada por el generador es:

$$\underline{S}_g = 300 + j400$$

y de acuerdo con el apartado d), la potencia compleja absorbida por el conjunto de elementos pasivos es:

$$\underline{S}_{\text{abs}} = 300 + j900 - j500 = 300 + j400 \Rightarrow S_{\text{abs}} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ VA}$$

de este modo se cumple el balance de potencias:

$$\underline{S}_g = \underline{S}_{\text{abs}} \Rightarrow P_g = P_{\text{abs}} = 300 \text{ W} ; Q_g = Q_{\text{abs}} = 400 \text{ VAr}$$

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.16

Un taller alimentado por una red de c.a. de 220 V tiene conectadas las siguientes cargas: a) 2.500 VA con f.d.p. 0,8 inductivo (en retraso); b) 3.000 VAr con f.d.p. 0,6 capacitivo (en adelante); c) 500 W con f.d.p. unidad. Calcular: a) potencias activa, reactiva y aparente de cada carga; b) potencias activa, reactiva y aparente totales del taller; c) corriente absorbida por el taller de la red de alimentación y su f.d.p.

Solución

a) **Carga a:**

$$S_a = 2.500 \text{ VA}; P_a = S \cos \varphi_a = 2.500 \cdot 0,8 = 2.000 \text{ W}; Q_a = S \sin \varphi_a = 2.500 \cdot 0,6 = 1.500 \text{ VAr}$$

Potencia compleja: $\underline{S}_a = P_a + jQ_a = 2.000 + j1.500$.

La potencia reactiva se ha tomado como positiva, porque la carga es inductiva, o de otro modo porque el f.d.p. va en retraso.

Carga b:

$$Q_b = -3.000 \text{ VAr (signo - carga capacitiva)}; S_b = Q_b / \sin \varphi_b = 3.000 / 0,8 = 3.750 \text{ VA};$$

$$P_b = S_b \cos \varphi_b = 3.750 \cdot 0,6 = 2.250 \text{ W}$$

Potencia compleja: $\underline{S}_b = 2.250 - j3.000$.

Carga c:

$$P_c = 500 \text{ W}; \cos \varphi_c = 1; Q_c = 0; S_c = 500 \text{ VA}$$

Potencia compleja: $\underline{S}_c = 500 + j0$.

b) La potencia compleja total absorbida por el taller:

$$\underline{S}_{\text{total}} = \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = (2.000 + j1.500) + (2.250 - j3.000) + (500 + j0)$$

es decir:

$$\underline{S}_{\text{total}} = (2.000 + 2.250 + 500) + j(1.500 - 3.000 + 0) = 4.750 - j1.500$$

que corresponde a:

$$P_{\text{total}} = 4.750 \text{ W}; Q_{\text{total}} = -1.500 \text{ VAr capacitivos}$$

$$S_{\text{total}} = \sqrt{4.750^2 + 1.500^2} = 4.981,21 \text{ VA}$$

Observe el lector que la potencia activa total es la suma de las potencias activas parciales de cada carga; la potencia reactiva es la suma algebraica (con su signo) de las potencias reactivas parciales. Sin embargo la potencia aparente total (4.981,21 VA) no es la suma aritmética de las potencias aparentes parciales (2.500 VA; 3.750 VA; 500 VA). Esto es debido a que el f.d.p. es distinto para cada carga. Lo que sí es cierto es que la potencia compleja total es la suma de las potencias complejas de cada carga. En la Figura 2.53 se muestra un diagrama ilustrativo, en el que se aprecia cómo se efectúa la transferencia de potencia tanto activa como reactiva, desde la red (generador) hasta el taller (receptor). Las flechas blancas representan la potencia activa. Las flechas sombreadas representan la potencia reactiva.

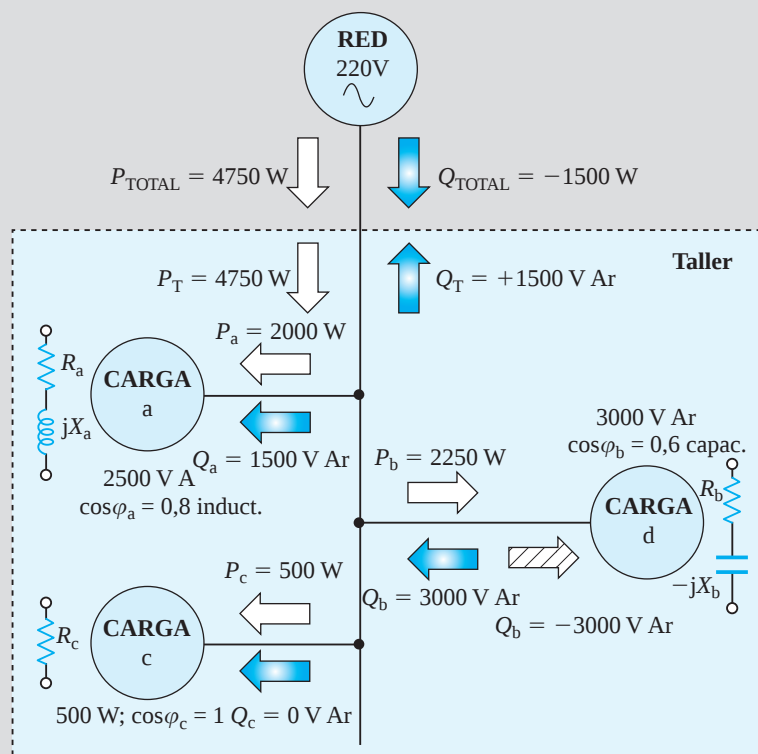


Figura 2.53 Ejemplo de aplicación 2.16. Detalle de la distribución de potencias

c) La corriente total absorbida por el taller se puede obtener de la ecuación:

$$S_{\text{total}} = UI_{\text{total}}$$

de donde se deduce:

$$I_{\text{total}} = \frac{4.981,21}{220} = 22,64 \text{ A}$$

el f.d.p. de la instalación se obtiene así:

$$P_{\text{total}} = UI_{\text{total}} \cos \varphi_T = S_{\text{total}} \cos \varphi_T$$

que al sustituir valores da:

$$\cos \varphi_T = \frac{4.750}{4.981,21} = 0,954$$

este f.d.p. es capacitivo, ya que Q_{total} es negativa, lo que indica que la corriente total se adelanta a la tensión. En el esquema de la Figura 2.53 se observa que la potencia activa total es igual a la suma de las potencias activas consumidas por los receptores o cargas. Las flechas sombreadas representan el sentido en que se produce la transferencia de potencia reactiva. Obsérvese que la carga b) consume una potencia reactiva (red a carga) de -3.000 VAr , el signo negativo es debido al carácter capacitivo de este receptor. Lo anterior es equivalente a considerar que la carga b) envía a la red una potencia reactiva de 3.000 VAr , y así se ha señalado trazando una flecha en sentido contrario. Sumando los *valores algebraicos* de las potencias reactivas, se obtiene una potencia reactiva total $Q_{\text{total}} = -1.500 \text{ VAr}$ (en el sentido red-taller), lo que equivale a representar a la red como un *receptor* de potencia reactiva de $+1.500 \text{ VAr}$ (o un *generador* de potencia reactiva de -1.500 kVAr). En la Figura 2.53 se han señalado también los circuitos equivalentes de cada carga.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.17

Se desea medir la potencia absorbida por un receptor inductivo de impedancia $\underline{Z}$ utilizando tres amperímetros como se indica en la Figura 2.54. El amperímetro A_1 mide la corriente total absorbida de la red. Calcular: a) potencia activa absorbida por la impedancia de carga $\underline{Z}$ si las lecturas de los amperímetros han sido: $A_1 = 40 \text{ A}$; $A_2 = 22 \text{ A}$; $A_3 = 30 \text{ A}$; b) valor de la impedancia compleja $Z \angle \varphi$.

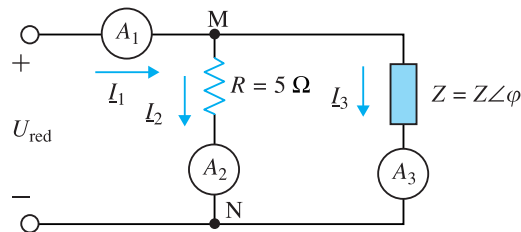


Figura 2.54 Ejemplo de aplicación 2.17

Solución

a) Si se toma la tensión de la red como referencia, es decir $\underline{U} = U \angle 0^\circ$, la corriente $\underline{I}_2$ irá en fase con la tensión, ya que la rama en la cual está conectado A_2 es resistiva pura; por consiguiente la expresión compleja de la corriente $\underline{I}_2$ es:

$$\underline{I}_2 = 22 \angle 0^\circ$$

por la otra rama del paralelo, donde está la impedancia $Z \angle \varphi$, la corriente se *retrasará* (carga inductiva) de la tensión un ángulo φ , como el módulo de esta corriente medido con el amperímetro A_3 es de 30 A, tendrá una representación compleja:

$$\underline{I}_3 = 30 \angle -\varphi$$

la corriente total $\underline{I}_1$ será la suma vectorial (compleja o fasorial) de las corrientes $\underline{I}_2$ e $\underline{I}_3$ como así lo requiere la aplicación del primer lema de Kirchhoff en el nudo M. Si se considera que la corriente $\underline{I}_1$ se retrasa un ángulo α respecto a la tensión, su representación compleja es de la forma:

$$\underline{I}_1 = 40 \angle -\alpha$$

y además se cumple:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \quad 40 \angle -\alpha = 22 \angle 0^\circ + 30 \angle -\varphi$$

que en forma binómica nos da:

$$40 \cos \alpha - j40 \sin \alpha = (22 + j0) + (30 \cos \varphi - j30 \sin \varphi)$$

que al igualar partes reales e imaginarias de cada miembro se obtiene:

$$40 \cos \alpha = 22 + 30 \cos \varphi \quad ; \quad 40 \sin \alpha = 30 \sin \varphi$$

de donde se deduce:

$$\cos \alpha \approx 0,672 \quad ; \quad \cos \varphi \approx 0,163$$

la tensión de la red se puede obtener directamente de la rama resistiva:

$$\underline{U}_{\text{red}} = \underline{U}_{\text{MN}} = R \underline{I}_2 = 5 \cdot 22 \angle 0^\circ = 110 \angle 0^\circ \text{ voltios}$$

y por consiguiente la potencia activa absorbida por la impedancia $\underline{Z}$ será:

$$P = U I_3 \cos \varphi = 110 \cdot 30 \cdot 0,163 \approx 538 \text{ W}$$

b) La impedancia $\underline{Z}$ tiene un valor:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_3} = \frac{110 \angle 0^\circ}{30 \angle -80,62^\circ} = 3,667 \angle 80,62^\circ = 0,6 + j3,62 \Omega$$

2.11. Factor de potencia: su importancia práctica

Como se ha visto en el epígrafe anterior, el factor de potencia representa el coseno del ángulo que forman la tensión y la corriente de un circuito. También es el cociente entre la potencia activa y aparente de la red:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (2.139)$$

Históricamente la introducción técnica de los diversos tipos de potencia: activa, reactiva y aparente, y del factor de potencia (f.d.p.) se debe a las Compañías Eléctricas que tie-

nen a su cargo la explotación de las centrales que necesitan transportar grandes cantidades de energía de un punto a otro. Es evidente que la eficacia con que se realice este transporte ejerce una acción directa sobre el coste de la energía eléctrica, el cual en definitiva lo paga el cliente. Un usuario que aporta una carga que da origen a un rendimiento relativamente pobre de la red de transporte, debe pagar un precio mayor por cada kilovatio-hora (kWh) de energía activa, que realmente recibe y utiliza. Así mismo, un consumidor que requiere de la Compañía Eléctrica una instalación más costosa para el transporte y distribución, también deberá pagar más cada kWh. La potencia activa representa realmente la potencia media que se consume, mientras que la potencia reactiva representa una oscilación de energía entre el generador y el receptor, su función consiste en suministrar energía para los campos magnéticos y carga de condensadores y transferir esta energía de vuelta a la fuente, cuando se anula el campo magnético o cuando se descargan los condensadores. Aunque los voltio-amperios reactivos, como tales, no requieren un aporte de energía por parte de los generadores, sí que necesitan una producción de voltio-amperios por parte de los mismos y por tanto limitan su capacidad de suministro. Téngase en cuenta que la tensión de un generador es una magnitud esencialmente constante, y que la corriente está limitada por la sección de los conductores de sus devanados para que la potencia disipada por efecto Joule no dé lugar a calentamientos inadmisibles, es por esto, por lo cual, la potencia nominal de los generadores (y transformadores) se define en kVA y no en kW. Para una cierta potencia aparente de un generador, la potencia activa que suministra depende del f.d.p. de la carga que coloca el usuario. Los motores eléctricos, por ejemplo, representan una carga de tipo inductivo, su potencia activa está relacionada con el trabajo mecánico útil que realizan, pero requieren además una potencia reactiva para mantener los campos magnéticos en los que se basa su funcionamiento. Esta potencia reactiva necesaria en los motores precisa de una mayor corriente en la red, lo que provoca unas mayores pérdidas RI^2 en las líneas, con la consiguiente pérdida de rendimiento de la instalación, lo que no es aconsejable.

Para que el lector comprenda mejor la interrelación entre las potencias P , Q y S y su efecto en el rendimiento de un suministro de energía, se va a considerar el ejemplo que se señala en la Figura 2.55, en el que se muestra un motor eléctrico que está alimentado por un generador U_g a través de una línea eléctrica de resistencia total R . Se considera que la tensión U en el extremo receptor es constante y que la potencia desarrollada por el motor es constante (mueve un par resistente fijo), lo que equivale a considerar que la potencia activa P que absorbe el motor de la red es constante. Supóngase por ejemplo que $R = 0,2 \Omega$, $P = 11 \text{ kW}$ y $U = 220 \text{ V}$. Vamos a analizar dos casos: 1) que el f.d.p. con el que trabaja el motor es la unidad; 2) que el f.d.p. es 0,5 inductivo.

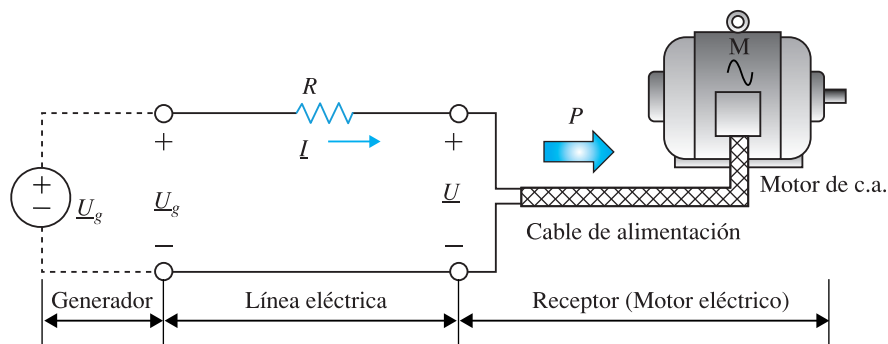


Figura 2.55 Corrección del f.d.p. de una instalación

Caso 1: $\cos \varphi = 1$

En este caso la corriente que absorbe el motor de la red, según el esquema de la Figura 2.55 y teniendo en cuenta (2.110) es igual a:

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{11.000}{220 \cdot 1} = 50 \text{ A}$$

La potencia reactiva del motor es por consiguiente:

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \cdot 50 \cdot 0 = 0 \text{ VAr}$$

ya que para $\cos \varphi = 1$, se tiene $\sin \varphi = 0$. La potencia perdida en la línea de transporte debido al funcionamiento del motor será:

$$P_p = RI^2 = 0,2 \cdot 50^2 = 500 \text{ W}$$

y por consiguiente el generador de la compañía eléctrica debe entregar una potencia activa total:

$$P_g = P + P_p = 11.000 + 500 = 11.500 \text{ W}$$

la tensión U_g necesaria en el generador se obtiene aplicando el segundo lema de Kirchhoff en la malla de la Figura 2.55, que si se elige la tensión $\underline{U}$ como referencia, da lugar a:

$$\underline{U}_g = \underline{U} + R\underline{I} \Rightarrow \underline{U}_g = 220 \angle 0^\circ + 0,2 \cdot 50 \angle 0^\circ = 230 \angle 0^\circ$$

lo que supone una potencia aparente del generador:

$$S_g = U_g I_g = 230 \cdot 50 = 11.500 \text{ VA}$$

como quiera que la energía hay que medirla en el local del cliente (donde está el motor), este recibirá una facturación por el 95,6 % de la energía que realmente produce la compañía eléctrica con su generador, ya que se cumple:

$$\frac{P}{P_g} = \frac{11.000}{11.500} = 95,6 \%$$

cociente que expresa en definitiva el rendimiento de la instalación.

Caso 2: $\cos \varphi = 0,5$

Consideremos ahora el caso en que se consumen también 11 kW pero con $\cos \varphi = 0,5$ inductivo (en retraso). La corriente necesaria ahora es igual a:

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{11.000}{220 \cdot 0,5} = 100 \text{ A}$$

que es doble que en la situación anterior. La potencia reactiva de la carga es por lo tanto:

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \cdot 100 \cdot 0,866 = 19.052,56 \text{ VAr}$$

ya que cuando $\cos \varphi = 0,5$, se tiene $\sin \varphi = 0,866$. La potencia perdida en la línea de transporte valdrá ahora:

$$P_p = RI^2 = 0,2 \cdot 100^2 = 2.000 \text{ W}$$

y por consiguiente el generador de la compañía eléctrica deberá entregar una potencia activa total:

$$P_g = P + P_p = 11.000 + 2.000 = 13.000 \text{ W}$$

la nueva tensión U_g del generador se obtiene al aplicar el segundo lema de Kirchhoff. Téngase en cuenta también que si se toma la tensión receptora como referencia: $\underline{U} = 220 \angle 0^\circ$, la corriente se retrasa un ángulo $\varphi = \arccos 0,5 = 60^\circ$ de la tensión, es decir el valor fasorial es $\underline{I} = 100 \angle -60^\circ$, de este modo se cumplirá:

$$\underline{U}_g = 220 \angle 0^\circ + 0,2 \cdot 100 \angle -60^\circ = 230 - j17,32 = 230,65 \angle -4,3^\circ$$

lo que supone una potencia aparente del generador:

$$S_g = U_g I = 230,65 \cdot 100 = 23.065 \text{ VA}$$

como quiera además que la energía hay que medirla en el receptor, la compañía eléctrica debe producir 13 kW, de los cuales solamente se facturan 11 kW, que supone en tanto por ciento:

$$\frac{P}{P_g} = \frac{11.000}{13.000} = 84,6 \%$$

En la Figura 2.56 se muestra un cuadro comparativo en el que se muestran los valores más significativos de los dos casos estudiados.

1) 11 kW $\cos \varphi = 1$	2) 11 kW $\cos \varphi = 0,5$
$I = 50 \text{ A}$	$I = 100 \text{ A}$
$Q = 0 \text{ VAr}$	$Q = 19.052,56 \text{ VAr}$
$P_p = 500 \text{ W}$	$P_p = 2.000 \text{ W}$
$P_g = 11.500 \text{ W}$	$P_g = 13.000 \text{ W}$
$U_g = 230 \text{ V}$	$U_g = 230,65 \text{ V}$
$S_g = 11.500 \text{ VA}$	$S_g = 23.065 \text{ VA}$
$\eta = 95,6 \%$	$\eta = 84,6 \%$

Figura 2.56 Comparación de las magnitudes P , Q y S para dos valores del f.d.p.

Observamos que cuanto mayor es el f.d.p. de la carga (es decir cuanto menor es el desfase φ entre la tensión y la corriente) se tiene:

- a) Menor intensidad de corriente en la línea de alimentación.
- b) Potencia reactiva menor (que es nula para $\cos \varphi = 1$).
- c) Menores pérdidas en la línea.

- d) Menores tensiones necesarias en generación.
- e) Menor potencia aparente del generador.
- f) Mejor rendimiento.

A la vista de estos resultados, resulta obvio que las compañías eléctricas estimulen el trabajo con f.d.p. elevados, generalmente superiores a 0,85-0,9, ofreciendo una bonificación en sus tarifas e intenten disuadir a los usuarios a trabajar con f.d.p. más bajos, aplicando tarifas incrementadas. En España hasta hace pocos años se aplicaba un *coeficiente de penalización por reactiva* cuyo valor en tanto por ciento era función del f.d.p. y estaba definido por la expresión:

$$K_r \text{ (en \%)} = \frac{17}{\cos^2 \varphi} - 21 \quad (2.140)$$

este coeficiente (que podía penalizar hasta un 47 % e incluso bonificar hasta un 4 %, si el f.d.p. era la unidad) se aplicaba sobre el precio medio del kWh lo que suponía graves penalizaciones. Debe señalarse que para medir el f.d.p. medio con el que ha trabajado una instalación durante un mes (en algunos casos se consideran dos meses, porque la facturación es bimestral), son precisos dos contadores, un contador de energía activa kWh (que lógicamente sirve fundamentalmente para medir la energía consumida) y un contador de reactiva para medir los kVarh durante un periodo de facturación. De este modo se obtiene la $\text{tg } \varphi$ media en el periodo de facturación mediante la expresión:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{energía reactiva}}{\text{energía activa}} = \frac{Q \cdot t}{P \cdot t} = \frac{Q}{P} \quad (2.141)$$

donde t representa el tiempo transcurrido desde una facturación a la siguiente. A partir de (2.141) se puede determinar el f.d.p. y aplicando (2.140) se podía calcular la penalización (o bonificación en su caso) correspondiente. En la actualidad en España ya no se aplica la fórmula (2.140) pero lógicamente se sigue gravando el consumo de energía reactiva.

■ 2.12. Corrección del factor de potencia

Como se acaba de indicar en el epígrafe anterior, con objeto de mejorar el rendimiento de las instalaciones eléctricas y evitar el pago de cantidades suplementarias en la facturación, es conveniente trabajar con factores de potencia elevados. Normalmente los consumidores requieren energía reactiva de la red de tipo inductivo, ya que la mayor parte de la industria utiliza máquinas eléctricas en su proceso productivo que necesitan este tipo de energía para desarrollar los campos magnéticos esenciales para su funcionamiento. El f.d.p. inductivo de estas cargas es por consiguiente inherente a las mismas y no se puede modificar más que por un mejor diseño y utilización. Ahora bien, como quiera que lo que interesa es que la red *vea* un mejor f.d.p. en conjunto, se puede modificar el mismo, utilizando receptores que consuman potencia reactiva de diferente signo a la de los motores, lo que se logra satisfactoriamente conectando condensadores en la instalación, de este modo se puede reducir la potencia reactiva inductiva (e incluso anularla) obteniendo un buen f.d.p. final. Antes de indicar cómo se corrige el f.d.p. de una instalación con condensadores, vamos a indicar una

serie de procedimientos prácticos que evitan los bajos f.d.p. haciendo un mejor uso de los equipos instalados. Así se tiene:

1. **Para las maquinarias eléctricas giratorias**, conviene en primer lugar sustituir los motores que funcionan con poca carga, por motores de menor potencia que trabajen en condiciones nominales (con potencias análogas a las que se necesiten), cuyo rendimiento y f.d.p. en esas condiciones son mejores.
2. **Para los transformadores**, elegir el tipo adecuado al empleo que se destine, con pocas pérdidas en vacío. Evitar el funcionamiento con poca carga. Desconectar el transformador con un interruptor automático (disyuntor) en caso de parada de la instalación.
3. **Para las lámparas de descarga fluorescentes, de vapor de mercurio o de sodio**, comprobar que todas ellas llevan su propio condensador. Las lámparas de incandescencia (denominadas vulgarmente bombillas) son prácticamente cargas resistivas y por tanto no perjudican el f.d.p. (es decir para ellas el $\cos \varphi$ es igual a 1).

Una vez que se han hecho las consideraciones anteriores que suponen un uso más racional de los equipos, vamos a ver cómo se efectúa la corrección del f.d.p. con condensadores. En la Figura 2.57 se muestra una instalación receptora simulada por un motor que absorbe de la red (acometida general) una potencia activa P con un f.d.p. inductivo de valor: $\cos \varphi$. Se ha añadido al conjunto receptor una batería de condensadores para conseguir que el f.d.p. de la instalación tenga un valor final previamente prefijado $\cos \varphi'$.

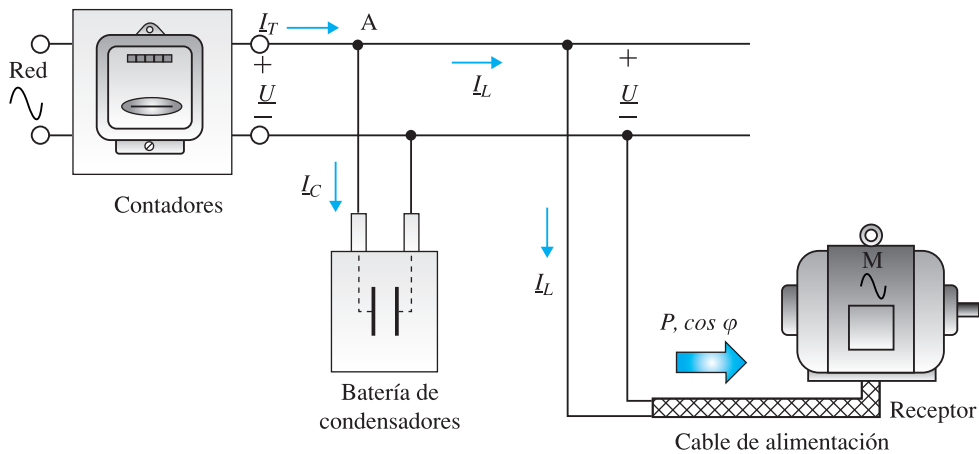


Figura 2.57 Instalación con f.d.p. corregido con condensadores

Nos interesa determinar la capacidad C de estos condensadores y su potencia reactiva Q_C para conseguir mejorar el f.d.p. desde $\cos \varphi$ a $\cos \varphi'$. El proceso de cálculo es el que se sigue a continuación.

El módulo o magnitud de la corriente absorbida por los receptores I_L es igual a:

$$I_L = \frac{P}{U \cos \varphi} \quad (2.142)$$

corriente que va retrasada (carga inductiva) un ángulo φ respecto de la tensión de la red que, por comodidad, se toma como referencia tal como se muestra en la Figura 2.58, la

tensión fasorial será: $\underline{U} = U \angle 0^\circ$ y en consecuencia la expresión de la corriente compleja absorbida por el receptor será:

$$\underline{I}_L = I_L \angle -\varphi$$

La corriente $\underline{I}_C$ absorbida por la batería de condensadores viene expresada por:

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_C} = \frac{U \angle 0^\circ}{-j \frac{1}{C\omega}} = UC\omega \angle 90^\circ = I_C \angle 90^\circ \quad (2.143)$$

que está adelantada 90° respecto de la tensión de la red U , según se muestra en el diagrama fasorial de la Figura 2.58. De este modo la corriente total absorbida por el conjunto de la instalación es el resultado de la suma de $\underline{I}_L$ e $\underline{I}_C$ como así lo requiere la aplicación del primer lema de Kirchhoff en el nudo A de la Figura 2.57. Es decir:

$$\underline{I}_T = \underline{I}_L + \underline{I}_C \quad (2.144)$$

En la Figura 2.58 se muestra la suma (2.144) en forma fasorial, observándose que la corriente $\underline{I}_C$ debe ser tal, que sumada *vectorialmente* a $\underline{I}_L$ se logre que $\underline{I}_T$ forme con la tensión el ángulo φ' final previamente establecido. Al escribir en forma polar (2.144) resulta:

$$I_T \angle \varphi' = I_L \angle -\varphi + I_C \angle 90^\circ \quad (2.145)$$

donde el módulo I_C es igual a $UC\omega$ según (2.143). Al pasar (2.145) a la forma binómica se obtiene:

$$I_T \cos \varphi' - j I_T \sin \varphi' = I_L \cos \varphi - j I_L \sin \varphi + j I_C \quad (2.146)$$

de donde se deduce (igualando partes reales e imaginarias):

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & I_T \cos \varphi' = I_L \cos \varphi \\ \text{b)} \quad & -I_T \sin \varphi' = -I_L \sin \varphi + I_C \end{aligned} \quad (2.147)$$

Despejando I_T de (2.147 a) y llevando a (2.147 b) obtenemos:

$$I_C = I_L \sin \varphi - I_L \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi' = I_L \cos \varphi (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \quad (2.148)$$

ecuación que permite calcular la magnitud de la corriente capacitiva necesaria. Teniendo en cuenta además que la magnitud anterior es igual según (2.143) a $UC\omega$, resulta una capacidad C de la batería de condensadores:

$$C = \frac{I_C \cos \varphi}{U\omega} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \quad (2.149)$$

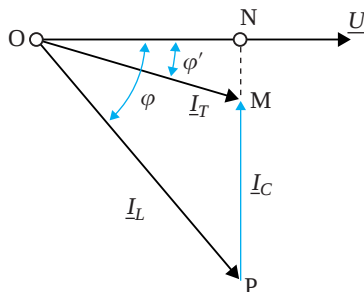


Figura 2.58 Diagrama fasorial de corrientes correspondiente a la Figura 2.57

Si se desea calcular la potencia reactiva de los condensadores se tendrá:

$$Q_C = \text{Im} [\underline{U} \cdot \underline{I}_C^*] = \text{Im} [U \angle 0^\circ \cdot I_C \angle -90^\circ] = -UI_C \quad (2.150)$$

que como era de esperar es negativa, de acuerdo con el convenio de signos de la potencia reactiva. Si se tiene ahora en cuenta el valor de I_C calculado en (2.148), al llevarlo a (2.146) se obtiene un *módulo* de Q_C :

$$Q_C = UI_C = UI_L \cos \varphi (\text{tg } \varphi - \text{tg } \varphi') \quad (2.151)$$

que teniendo en cuenta (2.142) se puede escribir:

$$Q_C = P(\text{tg } \varphi - \text{tg } \varphi') \quad (2.152)$$

Idealmente, parece que interesaría conseguir que el f.d.p. final fuera igual a 1 (es decir que φ' fuera igual a cero), sin embargo en la práctica para que no se necesite una gran inversión en condensadores, es suficiente que $\cos \varphi'$ sea del orden de 0,85 a 0,9 (obsérvese en la ecuación (2.140) que para $\cos \varphi' = 0,85$ el coeficiente de penalización por reactiva es igual a 1).

Puede también deducirse la expresión (2.148) siguiendo un criterio de potencias. Para ello, considérese el triángulo de potencias OAB de la Figura 2.59, donde OA indica la potencia activa absorbida por la instalación y AB es la potencia inductiva absorbida por el receptor, de tal forma que:

$$\text{tg } \varphi = \frac{AB}{OA} = \frac{Q}{P}$$

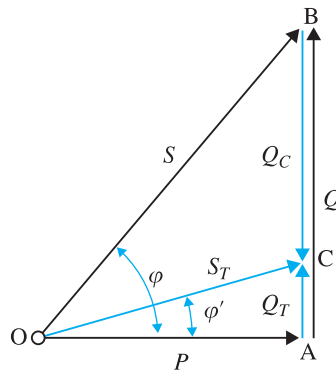


Figura 2.59 Diagrama fasorial de potencias complejas

Cuando se instalan condensadores, el punto B pasa al punto C, merced a la introducción de la potencia reactiva Q_C , siendo el triángulo OAC, el triángulo final de potencias. De esta figura se deduce:

$$Q_C = |BC| = |AB| - |AC| = P \text{tg } \varphi - P \text{tg } \varphi' = P(\text{tg } \varphi - \text{tg } \varphi')$$

expresión que coincide con la (2.152) deducida por un diagrama de corrientes.

Existen tablas que dan directamente el factor $(\text{tg } \varphi - \text{tg } \varphi')$ por el que hay que multiplicar la potencia activa de la instalación para obtener la potencia Q_C directamente (ver Tabla 2.3).

Tabla 2.3. Factor ($\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'$) para calcular las potencias reactivas de condensadores

cos φ inicial	cos φ' final					cos φ inicial	cos φ' final				
	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00		0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,41	1,475	1,605	1,741	1,896	2,225	0,71	0,242	0,372	0,508	0,663	0,992
0,42	1,410	1,540	1,676	1,831	2,160	0,72	0,214	0,344	0,480	0,635	0,964
0,43	1,349	1,479	1,615	1,770	2,099	0,73	0,186	0,316	0,452	0,607	0,936
0,44	1,291	1,241	1,557	1,712	2,041	0,74	0,159	0,289	0,425	0,580	0,909
0,45	1,234	1,234	1,364	1,655	1,984	0,75	0,132	0,262	0,398	0,553	0,882
0,46	1,180	1,310	1,446	1,601	1,930	0,76	0,105	0,235	0,371	0,526	0,855
0,47	1,128	1,258	1,394	1,549	1,878	0,77	0,079	0,209	0,345	0,500	0,829
0,48	1,078	1,208	1,344	1,489	1,828	0,78	0,552	0,182	0,318	0,473	0,802
0,49	1,029	1,159	1,295	1,450	1,779	0,79	0,026	0,156	0,292	0,447	0,776
0,50	0,982	1,112	1,248	1,403	1,732	0,80	—	0,130	0,266	0,421	0,750
0,51	0,936	1,066	1,202	1,357	1,686	0,81	—	0,104	0,240	0,395	0,724
0,52	0,892	1,022	1,158	1,313	1,642	0,82	—	0,078	0,214	0,369	0,698
0,53	0,850	0,980	1,116	1,271	1,600	0,83	—	0,052	0,188	0,343	0,672
0,54	0,809	0,939	1,075	1,230	1,559	0,84	—	0,026	0,162	0,317	0,646
0,55	0,768	0,898	1,034	1,189	1,518	0,85	—	—	0,136	0,291	0,620
0,56	0,729	0,859	0,995	1,150	1,479	0,86	—	—	0,109	0,264	0,593
0,57	0,691	0,821	0,957	1,112	1,441	0,87	—	—	0,083	0,238	0,567
0,58	0,654	0,784	0,920	1,075	1,404	0,88	—	—	0,055	0,210	0,539
0,59	0,618	0,748	0,884	1,039	1,368	0,89	—	—	0,028	0,183	0,512
0,60	0,583	0,713	0,849	1,004	1,333	0,90	—	—	—	1,155	0,484
0,61	0,549	0,679	0,815	0,970	1,299	0,91	—	—	—	0,127	0,456
0,62	0,515	0,645	0,781	0,936	1,265	0,92	—	—	—	0,097	0,426
0,63	0,483	0,613	0,749	0,904	1,233	0,93	—	—	—	0,066	0,395
0,64	0,450	0,580	0,716	0,871	1,200	0,94	—	—	—	0,034	0,363
0,65	0,419	0,549	0,685	0,840	1,169	0,95	—	—	—	—	0,329
0,66	0,388	0,518	0,654	0,809	1,138	0,96	—	—	—	—	0,291
0,67	0,358	0,488	0,624	0,779	1,108	0,97	—	—	—	—	0,251
0,68	0,328	0,458	0,594	0,749	1,078	0,98	—	—	—	—	0,203
0,69	0,299	0,429	0,565	0,720	1,049	0,99	—	—	—	—	0,142
0,70	0,270	0,400	0,536	0,691	1,020	1,00	—	—	—	—	—

Por ejemplo, supóngase que se desea corregir el f.d.p. de una instalación que consume 100 kW con un f.d.p. inicial de 0,62 hasta obtener un f.d.p. final de 0,9. El valor de la potencia reactiva de los condensadores será de acuerdo con (2.152):

$$Q_C = P(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')$$

El factor ($\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'$) se deduce de la tabla anterior, como intersección de la fila $\cos \varphi = 0,62$, con la columna $\cos \varphi = 0,9$, dando un valor de 0,781 lo que implica una potencia reactiva de: $Q_C = 100 \cdot 0,781 = 78,1$ kVar.

En la práctica existen baterías de condensadores normalizadas a unas determinadas potencias reactivas y suelen ser frecuentes las siguientes:

$$0,5-1-1,5-2-2,5-3-4-5-6-8-10-12-15-20-25 \text{ kVAr}$$

de tal forma que la potencia reactiva calculada deberá formarse con diversas combinaciones de los tipos anteriores; para el ejemplo anterior de 78,1 kVAr harán falta:

Grupos de condensadores	Potencia reactiva
2 Grupo de 25 kVAr	50 kVAr
1 Grupo de 20 kVAr	20 kVAr
1 Grupo de 8 kVAr	8 kVAr
Total	78 KVar

Para hacer el pedido a la empresa fabricante de las baterías de condensadores, es necesario indicar además, la tensión de la red a la que se van a conectar los condensadores, (una tensión de alimentación superior a la de diseño de los condensadores podría suponer su perforación).

Un aspecto práctico a tener en cuenta es que, cuando se desmonta la batería de condensadores de una instalación, se debe tener la precaución de no tocar sus terminales ya que la posible carga almacenada podría ser peligrosa al descargarse sobre el cuerpo; para evitar este peligro, la gran mayoría de los condensadores tienen permanentemente conectadas unas resistencias en paralelo, de tal forma que al desconectarlos de la red, se descargan sobre estas resistencias siguiendo una ley exponencial (ver Capítulo 4). Normalmente después de un minuto de la desconexión, la tensión residual no suele superar el 25 % de la tensión nominal de la red.

Para compensar el f.d.p. de los motores eléctricos en caso de no conocer sus datos internos ($\cos \varphi$) pueden tomarse los valores aproximados, que se muestran en la Tabla 2.4. El motor dimensionado según esta tabla, alcanza un $\cos \varphi = 0,95$ en vacío y un $\cos \varphi = 0,90$ a plena carga.

Tabla 2.4. Potencia reactiva necesaria para motores eléctricos

Potencia en kW	Potencia del condensador en kVAr
1 a 3 kW	50 % potencia nominal del motor
4 a 10 kW	45 % '' '' '' ''
11 a 20 kW	50 % '' '' '' ''
21 a 100 kW	35 % '' '' '' ''

Los transformadores de distribución necesitan en general del 3 al 5% de su potencia nominal en potencia de magnetización. Para la compensación individual se toma como base el consumo en vacío. Se puede admitir una potencia de condensadores del 5 al 10 % de la potencia del transformador, sin que haya que temer con ello elevaciones de tensión. En los equipos de soldadura se precisan condensadores con una potencia del 50 % de la nomi-

nal del transformador (soldadura en c.a.) y cuando se emplean rectificadores (soldadura en c.c.), son suficientes condensadores con una potencia equivalente al 10 % de la nominal.

Las lámparas de descarga necesitan también condensadores para compensar la energía reactiva de las reactancias o transformadores de dispersión que requieren estas lámparas. Así en el caso de lámparas fluorescentes a 220 V se precisa un condensador de $4,5 \mu\text{F}$ para un tubo de 20 W; $6 \mu\text{F}$ para 40 W hasta $18 \mu\text{F}$ para 140 W. Para las lámparas de vapor de mercurio a 220 V, las capacidades necesarias varían entre $7 \mu\text{F}$ para una lámpara de 50 W, $18 \mu\text{F}$ para 250 W y $40 \mu\text{F}$ para 1.000 W. Para las lámparas de halogenuros metálicos las capacidades necesarias oscilan entre $20 \mu\text{F}$ para una potencia de 150 W a $85 \mu\text{F}$ para 1.000 W. En el caso de lámparas de vapor de sodio de baja presión se requieren capacidades de $5 \mu\text{F}$ para 18 W a $40 \mu\text{F}$ para 180 W. Para las lámparas de vapor de sodio a alta presión se utilizan condensadores de $10 \mu\text{F}$ para 50 W hasta $120 \mu\text{F}$ para 1.000 W.

Según sean las condiciones de servicio, los receptores se compensan por separado, por grupos o centralmente. Estas clases de compensación también se pueden combinar. Normalmente, en las instalaciones grandes: fábricas de cemento, industrias de papel, metalúrgicas, etc; los condensadores se conectan a las barras colectoras de la distribución principal de baja tensión y a los puntos de concentración de carga dentro de la instalación. En la actualidad se disponen en el mercado de *baterías de condensadores autorreguladas* que permiten un escalonamiento automático de los condensadores en función de la potencia reactiva requerida por la instalación para conseguir un f.d.p. de consigna (previamente fijado). Los escalones pueden ser de igual o diferente potencia. Otro aspecto práctico a tener en cuenta es que debido a las elevadas corrientes de cierre y apertura que se producen por la inclusión de condensadores en una instalación, es que los fusibles de protección de los condensadores se deben prever para un valor de 1,5 a 1,8 veces la intensidad nominal de los mismos. Conviene asimismo proceder a un perfecto apriete de las conexiones para evitar posibles calentamientos.

En la Figura 2.60 se muestra de una forma gráfica el efecto de una batería de condensadores, sobre las medidas de los contadores de activa y reactiva de la instalación de una fábrica que recibe energía a media tensión. Obsérvese que los condensadores deben conectarse *detrás* de los contadores, consiguiéndose una reducción en la lectura del contador de reactiva pero no sobre el de activa, como ya se indicaba en el diagrama vectorial de la Figura 2.59.

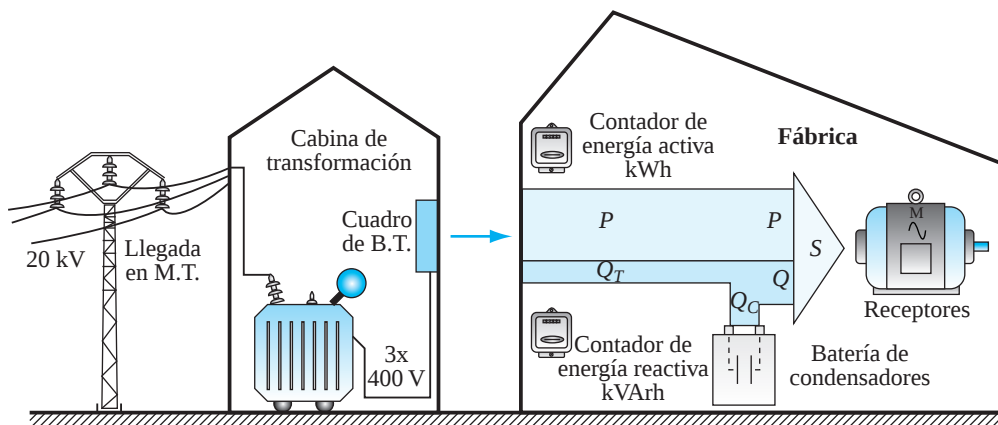


Figura 2.60 Efecto de los condensadores en la reducción de energía reactiva

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.18

Una obra alimentada por una red a 220 V, 50 Hz, tiene las siguientes cargas: 1) grúa, con una potencia total instalada de 10 kW, $\cos \varphi = 0,8$ inductivo (en retraso), rendimiento 90 %; 2) dos hormigoneras de 5 CV cada una, $\cos \varphi = 0,75$ inductivo, $\eta = 88$ %; 3) un grupo de soldadura de 5 kW, $\eta = 97$ %, f.d.p. unidad. Calcular: a) corrientes parciales absorbidas por cada carga; b) corriente total y su f.d.p.; c) potencia reactiva de los condensadores necesaria para elevar el f.d.p. de la instalación a 0,9 en retraso; d) nueva corriente que circulará por la línea con los condensadores conectados.

Nota: Debe advertirse al lector que en la industria no se fabrican motores monofásicos con potencias superiores a 1 kW y aunque se incluyan en este ejemplo motores monofásicos con potencias superiores a este número, es para que el estudiante comprenda la forma en que se realiza la corrección del f.d.p. de una instalación monofásica.

Solución

El esquema de la instalación es el indicado en la Figura 2.61.

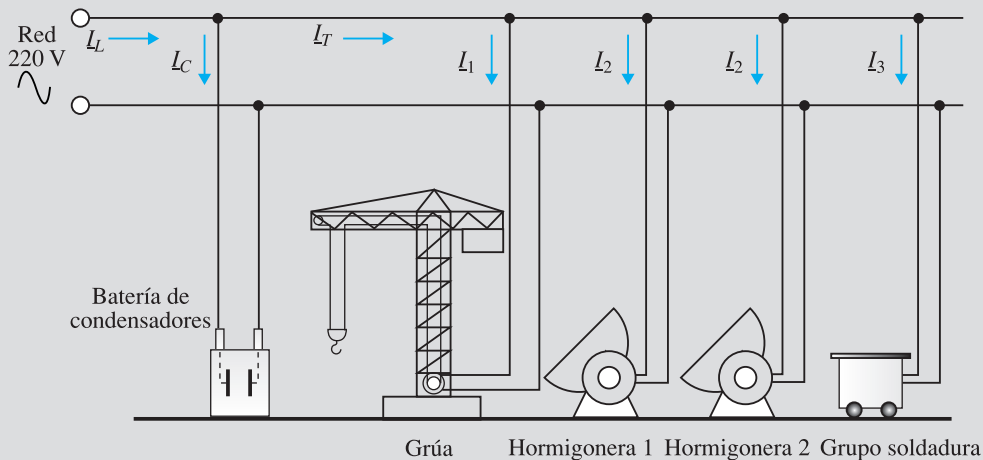


Figura 2.61 Ejemplo de aplicación 2.18

a) Corrientes parciales

1) Grúa:

Potencia mecánica desarrollada: 10 kW. Potencia eléctrica activa absorbida de la red:

$$P_1 = \frac{10}{\eta} = \frac{10}{0,9} = 11,11 \text{ kW}$$

Intensidad consumida por la grúa:

$$I_1 = \frac{P_1}{U \cos \varphi_1} = \frac{11,110}{220 \cdot 0,8} = 63,13 \text{ A}$$

Tomando la tensión como referencia, $\underline{U} = U \angle 0^\circ$, la corriente anterior en forma fasorial es:

$$\underline{I}_1 = 63,13 \angle -36,87^\circ$$

ya que el $\arcs 0,8 = 36,87^\circ$. Obsérvese que el argumento de la corriente (fase) es negativo ya que la carga es inductiva, por lo que la corriente se retrasa a la tensión.

2) Hormigoneras:

Cada hormigonera desarrolla una potencia mecánica de $5 \text{ CV} = 5 \cdot 736 = 3.680 \text{ W}$. La potencia eléctrica activa absorbida de la red es:

$$P_2 = \frac{3.680}{\eta} = \frac{3.680}{0,88} = 4.181,81 \text{ W}$$

y la intensidad absorbida por cada hormigonera será:

$$I_2 = \frac{P_2}{U \cos \varphi_2} = \frac{4.181,81}{220 \cdot 0,75} = 25,34 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_2 = 25,34 \angle -41,41^\circ \text{ (ya que el } \arcs 0,75 = 41,41^\circ)$$

3) Grupo de soldadura:

Potencia mecánica desarrollada: 5 kW. Potencia activa absorbida de la red:

$$P_3 = \frac{5.000}{0,97} = 5.154,64 \text{ W}$$

Intensidad absorbida:

$$I_3 = \frac{5.154,64}{220 \cdot 1} = 23,43 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_3 = 23,43 \angle 0^\circ$$

ya que el $\arcs 1 = 0^\circ$.

b) Corriente total

La corriente total absorbida por la obra, de acuerdo con la Figura 2.61 es:

$$\underline{I}_T = \underline{I}_1 + 2\underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

que sustituyendo valores nos da:

$$\underline{I}_T = 63,13 \angle -36,87^\circ + 2 \cdot 25,34 \angle -41,41^\circ + 23,43 \angle 0^\circ = 132,76 \angle -32,53^\circ$$

que corresponde a una corriente total y a un f.d.p. total:

$$I_T = 132,76 \text{ A} \quad ; \quad \cos \varphi = \cos 32,53^\circ = 0,843$$

c) Potencia activa

La potencia activa total de la instalación es:

$$P_T = UI_T \cos \varphi = 220 \cdot 132,76 \cdot 0,843 = 24,62 \text{ kW}$$

y la potencia reactiva de los condensadores es igual a:

$$Q_C = P_T (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')$$

los valores de las tangentes son:

$$\varphi = 32,53^\circ \quad ; \quad \operatorname{tg} 32,53^\circ = 0,638$$

$$\cos \varphi' = 0,9 \quad ; \quad \varphi' = 25,84^\circ \quad ; \quad \operatorname{tg} 25,84^\circ = 0,484$$

en consecuencia se tiene:

$$Q_C = 24,62 (0,638 - 0,484) = 3,78 \text{ kVAr}$$

d) Nueva corriente

La nueva corriente de línea puede obtenerse de un diagrama vectorial de corrientes, o teniendo en cuenta que la potencia activa total permanece constante y que $\cos \varphi' = 0,9$, se tendrá:

$$I_L = \frac{P}{U \cos \varphi'} = \frac{24.620}{220 \cdot 0,9} = 124,34 \text{ A}$$

que en valor complejo es $I_L = 124,34 \angle -25,84^\circ$.

Como era de esperar, la corriente de línea se ha reducido y ha pasado de valer $I_T = 132,76 \text{ A}$ a $I_L = 124,34 \text{ A}$.



Comentarios prácticos



Elección de la potencia aparente de un grupo electrógeno

Muchas obras civiles se alimentan con grupos electrógenos debido, en algunos casos, a la provisionalidad de sus instalaciones, o en otros, porque la instalación de obra se encuentra alejada de redes de distribución de energía eléctrica. En estas instalaciones, el ingeniero debe decidir entonces la compra o alquiler de un grupo electrógeno, que no es más que un motor diesel que mueve un alternador. Es evidente que el alternador es un generador de c.a. cuya potencia se asigna en kVA, es decir en potencia aparente. Muchas veces esto constituye un problema, cuando es una cosa muy simple. Supóngase para ser más concretos que el grupo electrógeno tiene que alimentar una serie de motores, por ejemplo cinco motores de 20 CV, rendimiento del 92 % y f.d.p. 0,8 inductivo. ¿Cómo elegir la potencia del grupo electrógeno?

Veamos los pasos a realizar de acuerdo con la teoría enseñada hasta este momento. En primer lugar debe quedar claro que la potencia asignada a un motor es potencia mecánica. Por consiguiente al tener 5 motores de 20 CV, la potencia mecánica total de los motores es de 100 CV. Al dividir esta potencia mecánica total por el rendimiento de estos motores se obtendrá la potencia eléctrica activa (habiendo pasado previamente la potencia en CV a kW, para ello hay que tener en cuenta que $1 \text{ CV} = 736 \text{ W}$). Esto significa que la potencia eléctrica activa que absorberán del grupo electrógeno todos los motores en funcionamiento y a plena carga es:

$$P = \frac{P_{\text{mec}}}{\eta} = \frac{100 \cdot 0,736}{0,92} = 80 \text{ kW}$$

Ahora bien, como el f.d.p. de los motores es 0,8 inductivo, la potencia aparente que se requiere debe ser:

$$S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{80}{0,8} = 100 \text{ kVA}$$

Y esta debe ser la potencia necesaria del grupo electrógeno. Y este es el modo de proceder a su cálculo. Sin embargo, de este sencillo ejemplo (¡en el que se han preparado los datos!) se puede deducir una regla mnemotécnica o «regla de andar por casa» (*thumb rule* en inglés) que conviene recordar. Obsérvese que los motores tienen una potencia mecánica total de 100 CV y que el grupo electrógeno debe tener 100 kVA, es decir **el número que señala la potencia mecánica es el mismo que el número de kVA que debe tener el grupo electrógeno**. Si hay 100 CV se requieren 100 kVA, si hubiera 200 CV serían 200 kVA, etc. Efectivamente es una regla un tanto artificiosa porque los rendimientos y f.d.p. de los diversos motores serán muy variados, pero es una regla que manejan los capataces de obra y les resulta muy útil. Observará el lector que para que lo anterior se cumpla se han preparado las cifras de rendimientos y f.d.p. de los motores para que su producto sea precisamente 0,736 que es el cambio de caballos a

kilovatios, (se puede comprobar estos hechos ya que en nuestro ejemplo se tiene $\eta \cdot \cos \varphi = 0,92 \cdot 0,8 = 0,736$), pero lo cierto que este producto es, a *grosso modo*, una aproximación muy real. Otro aspecto a tener en cuenta cuando se trabaja con grupos electrógenos es que si uno de los motores es de mucha potencia y arranca en directo, al ser la corriente de arranque muy elevada, el grupo electrógeno no puede con él (cae excesivamente la tensión generada por el alternador al ser autoexcitado) si la potencia de este está muy ajustada, (en el argot de los electricistas se dice entonces que el grupo se viene abajo). En estos casos es evidente que deberá elegirse una potencia del grupo electrógeno más elevada para tener en cuenta este hecho. Este problema se puede evitar si los motores de gran potencia arrancan con un variador de velocidad electrónico, ya que entonces se evitan las grandes corrientes de arranque y con ello una menor caída de tensión del alternador.

2.13. Medida de la potencia en c.a.

Los instrumentos que se utilizan para medir la potencia activa se denominan *vatímetros*. La mayor parte de los vatímetros son del tipo electrodinámico. Los instrumentos de este tipo consisten, en esencia, de una bobina fija 1 (Figura 2.62), devanada en dos secciones y de una bobina móvil 2, que está sujeta al eje de giro portador de la aguja indicadora. Unos muelles antagonistas están fijos por un extremo a la caja del instrumento y por el otro al eje del equipo móvil. Una de las bobinas se denomina *bobina de intensidad* o *bobina de corriente*, está formada por un hilo grueso (ver devanado 1 en la Figura 2.62) y tiene poca resistencia; la otra bobina, llamada *bobina de tensión*, está formada por un gran número de espiras de hilo delgado y tiene gran resistencia que a veces se la aumenta por medio de una resistencia adicional (ver devanado 2 y resistencia R en la Figura 2.62).

Al pasar corriente por las bobinas aparece un par motor que actúa sobre el sistema móvil, y que es proporcional al producto de las corrientes instantáneas que circulan por los dos devanados, existe también un par antagonista introducido por los muelles y que son propor-

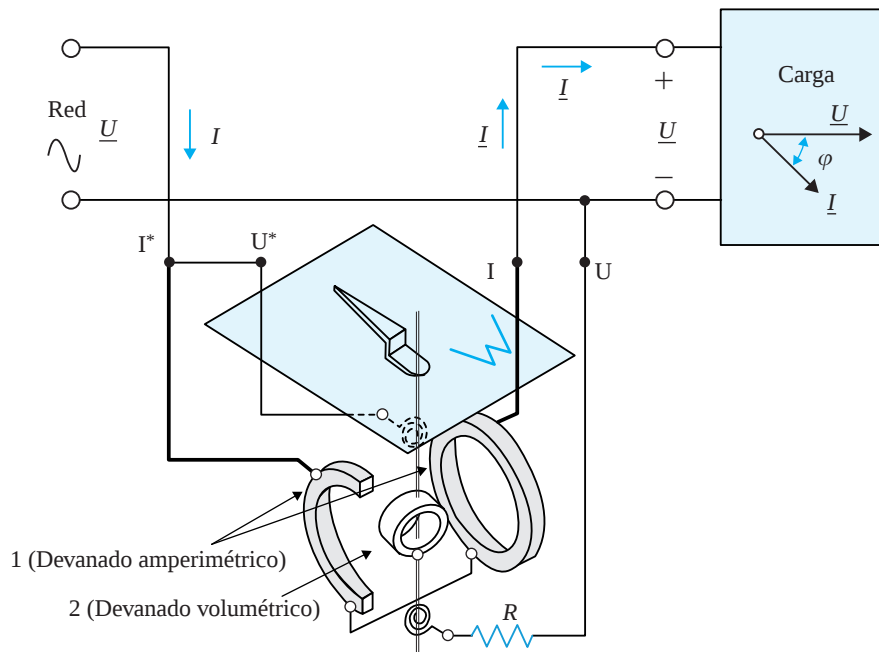


Figura 2.62 Esquema interior simplificado de un vatímetro y sus conexiones en la red

cionales a la desviación de la aguja, de tal forma que cuando se equilibran ambos pares puede leerse por la deflexión del sistema móvil el valor de la potencia.

Si se dispone de un vatímetro que tiene conectada su bobina voltimétrica a una tensión instantánea $u_x(t)$ y circula por su bobina amperimétrica una corriente instantánea $i_y(t)$ y se supone que el desfase entre ambas magnitudes es α grados, la lectura correspondiente del vatímetro será:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u_x(t) i_y(t) dt = U_x I_y \cos \alpha \quad (2.153a)$$

Donde U_x e I_y representan respectivamente los valores eficaces de la tensión y la corriente. Cuando se opera con valores fasoriales, es a menudo más conveniente obtener el valor anterior como la parte real del producto de la tensión por el conjugado de la corriente, es decir:

$$P = \operatorname{Re} [\underline{U}_x \cdot \underline{I}_y^*] \quad (2.153b)$$

Si se desea medir con un vatímetro la potencia absorbida por una carga conectada a la red, entonces la bobina de intensidad se conectará de tal forma que circule por ella la corriente que absorbe la carga, mientras que la bobina de tensión se debe conectar en paralelo con la red. La lectura del vatímetro conectado de esta forma si es U la tensión, I la corriente absorbida, y $\cos \varphi$ el f.d.p. de la carga será:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = UI \cos \varphi \quad [\text{W}] \quad (2.154)$$

que representa la potencia absorbida por el receptor. En el caso del *varímetro*, para que la deflexión sea de la forma:

$$Q = UI \sin \varphi \quad [\text{VAr}] \quad (2.155)$$

es necesario añadir a la bobina móvil (voltimétrica o de tensión) una reactancia para que su circuito sea muy inductivo (de esta forma se añade un desfase de 90° para convertir el coseno en seno).

En la Figura 2.63 se ha representado el símbolo del vatímetro (o del varímetro) conectado para medir la potencia activa (o reactiva en su caso) de la carga receptora. Los terminales $I-I^*$ representan la bobina de intensidad que se coloca en serie con el circuito. Los terminales $U-U^*$ representan la bobina voltimétrica o de tensión que se coloca en paralelo con la red. El vatímetro electrodinámico es un aparato con *polarización*, lo que significa que el sentido de la desviación de la aguja depende de la orientación que tienen entre sí las corrientes que circulan por las bobinas. Para que el sentido de la desviación de la parte móvil sea la correcta, los terminales que representan el origen de las bobinas se señalan con un asterisco (ver Figuras 2.61 y 2.62), debiendo conectarse ambos bornes al mismo punto del circuito.

La medida de la potencia aparente en un circuito de c.a. se realiza utilizando un voltímetro para medir la tensión de la red (conectado en paralelo) y un amperímetro para medir la corriente absorbida por la carga (ver Figura 2.63) que se conecta en serie. La potencia aparente se obtendrá como producto de ambas lecturas:

$$S = U \cdot I \quad [\text{VA}] \quad (2.156)$$

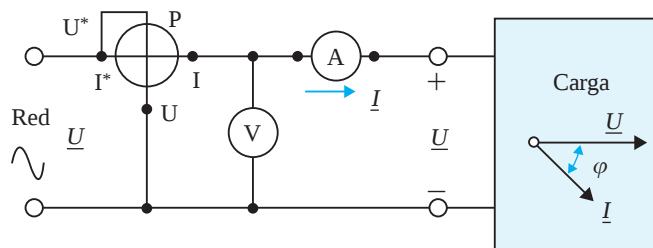


Figura 2.63 Medida de la potencia activa y de la potencia aparente en una instalación

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.19

Considérese el esquema de la Figura 2.63. Las lecturas de los aparatos de medida han sido: $U = 220$ voltios; $I = 5$ amperios; $P = 880$ vatios. Sabiendo que la carga es del tipo inductivo, calcular: a) potencia aparente absorbida por la carga; b) factor de potencia; c) potencia reactiva; d) impedancia compleja.

Solución

a) La potencia aparente es:

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 5 = 1.100 \text{ VA}$$

b) El f.d.p. de la carga viene expresado por:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{880}{1.100} = 0,8$$

c) Si se considera que la carga es inductiva, la potencia reactiva vale:

$$Q = UI \sin \varphi = 1.100 \cdot 0,6 = 660 \text{ VAR} \text{ (ya que cuando } \cos \varphi = 0,8, \text{ se tiene } \sin \varphi = 0,6)$$

d) Si se toma la tensión como origen de fases, se tendrá: $\underline{U} = 220 \angle 0^\circ$, y la corriente estará retrasada (carga inductiva) un ángulo $\varphi = \arccos 0,8 = 36,87^\circ$ de la tensión es decir: $\underline{I} = 5 \angle -36,87^\circ$, por consiguiente la impedancia equivalente de la carga será:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5 \angle -36,87^\circ} = 44 \angle 36,87^\circ = 35,2 + j26,4 \, \Omega$$

El lector podrá comprobar que si no se conoce *a priori* la naturaleza de la carga, no es posible precisar con los aparatos de medida indicados si la carga es inductiva o capacitiva. Para determinar el tipo de carga deberá incorporarse un varímetro, ya que por medio de él podrá averiguarse el signo de la potencia reactiva, si esta es positiva la carga es inductiva, pero si es negativa la carga será capacitiva. En la práctica para poder realizar lecturas negativas con un vatímetro o un varímetro, es preciso invertir una sola de las bobinas del aparato de medida: bien sea la amperimétrica o la voltimétrica. Generalmente se prefiere invertir esta última ya que de este modo no es necesario abrir el circuito principal (que es lo que sucedería al cambiar el devanado amperimétrico), por lo que se pueden hacer lecturas sin desconectar la carga de la red.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.20

El circuito de la Figura 2.64 se alimenta por un generador monofásico (red) de c.a. de 375 V. Las lecturas de los aparatos de medida han sido: $I_a = 36$ A; $I_b = 30$ A; $P_2 = 7.200$ W; $V_b = 300$ voltios. a) Calcular la lectura del amperímetro I_T . b) Si el voltímetro V_1 señala 180 V, calcular las lecturas del voltímetro V_2 y del vatímetro P_1 .

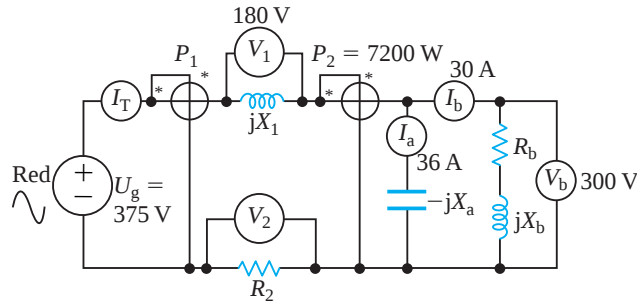


Figura 2.64 Ejemplo de aplicación 2.20

Solución

a) Si se toma la tensión U_b como referencia de fases, la corriente I_b se retrasará un ángulo φ_b respecto de U_b (al ser la carga $R_b + jX_b$ inductiva) y la corriente I_a se adelantará 90° respecto de U_b , ya que la corriente que circula por un condensador se adelanta 90° a su tensión. De este modo se obtiene el diagrama fasorial que se muestra en la Figura 2.65a. Como quiera además, que la rama paralelo formada por el condensador $-jX_a$ y la impedancia $R_b + jX_b$ absorbe una potencia $P_2 = 7.200$ W, se puede escribir:

$$P_2 = U_b I_T \cos \varphi \Rightarrow 7.200 = 300 \cdot I_T \cos \varphi \Rightarrow I_T \cos \varphi = \frac{7.200}{300} = 24 \quad (1)$$

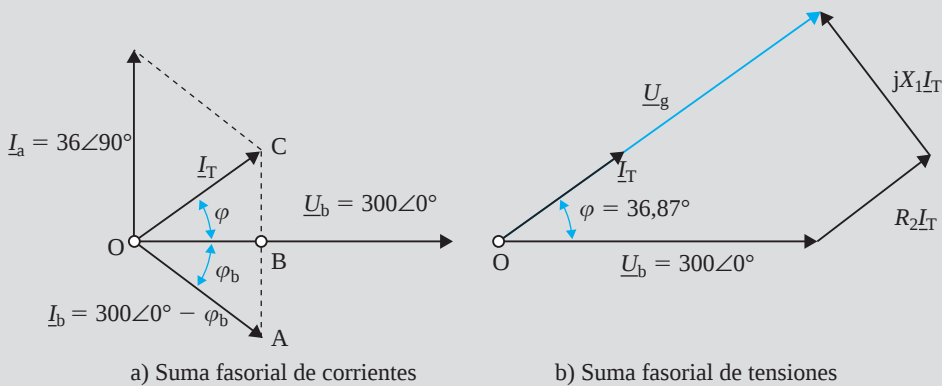


Figura 2.65 Composiciones fasoriales

La suma fasorial de la Figura 2.65a es la siguiente:

$$\underline{I}_T = \underline{I}_a + \underline{I}_b = 36 \angle 90^\circ + 30 \angle -\varphi_b = I_T \angle \varphi$$

que al pasar las expresiones polares a binómicas, se obtiene:

$$I_T \cos \varphi + j I_T \sin \varphi = j36 + (30 \cos \varphi_b - j30 \sin \varphi_b)$$

y que al igualar partes reales e imaginarias da lugar a:

$$I_T \cos \varphi = 30 \cos \varphi_b \quad ; \quad I_T \sin \varphi = 36 - 30 \sin \varphi_b \quad (2)$$

y como quiera que de acuerdo (1) se tiene: $I_T \cos \varphi = 24$, de la primera ecuación anterior resulta:

$$\cos \varphi_b = \frac{24}{30} = 0,8 \quad \Rightarrow \quad \varphi_b = 36,87^\circ \text{ inductivo}$$

y al sustituir este valor en la segunda ecuación (2) da lugar a:

$$I_T \sin \varphi = 36 + 30 \sin \varphi_b = 36 - 30 \cdot \sin 36,87^\circ = 18 \text{ A} \quad (3)$$

y de las ecuaciones (1) y (3) se llega a:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{18}{24} = 0,75 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 36,87^\circ \text{ capacitivo}$$

y al llevar este valor a (1), o también a (3), resulta:

$$I_T \cos \varphi = 24 \quad \Rightarrow \quad I_T = \frac{24}{\cos 36,87^\circ} = 30 \text{ A}$$

Es decir el amperímetro I_T que señala la corriente total absorbida por la instalación dará una lectura de 30 amperios. Las expresiones fasoriales de las corrientes (habiendo elegido la tensión U_b como referencia de fases) serán por consiguiente:

$$\underline{I}_a = 36 \angle 90^\circ \text{ A} \quad ; \quad \underline{I}_b = 30 \angle -36,87^\circ \text{ A} \quad ; \quad \underline{I}_T = 30 \angle +36,87^\circ \text{ A}$$

b) Al aplicar el segundo lema de Kirchhoff a la malla del circuito que incluye el generador se puede escribir:

$$\underline{U}_g = \underline{U}_b + R_2 \underline{I}_T + jX_1 \underline{I}_T \quad (4)$$

cuya composición fasorial se muestra en la Figura 2.65b. Las expresiones fasoriales de las tensiones anteriores son respectivamente:

$$\underline{U}_b = 300 \angle 0^\circ \text{ V} \quad ; \quad R_2 \underline{I}_T = U_2 \angle +36,87^\circ \text{ V} \quad ; \quad jX_1 \underline{I}_T = U_1 \angle (36,87^\circ + 90^\circ) = U_1 \angle 126,87^\circ \text{ V}$$

valores que al sustituir en (4), da lugar a:

$$\underline{U}_g = 300 \angle 0^\circ + U_2 \angle 36,87^\circ + U_1 \angle 126,87^\circ \quad (5)$$

y teniendo en cuenta que $U_1 = 180 \text{ V}$, al sustituir este valor en la ecuación anterior y transformar las magnitudes polares a binómicas resulta:

$$\underline{U}_g = (300 + 0,8U_2) + j(144 + 0,6U_2) \quad (6)$$

y de acuerdo con el enunciado, la tensión de la red es igual a 375 voltios, que es el módulo de la expresión anterior. Por lo que se puede poner:

$$375 = \sqrt{(300 + 0,8U_2)^2 + (144 + 0,6U_2)^2} \quad (7)$$

de donde se deduce $U_2 = 135$ voltios, que es la tensión que señalará el voltímetro V_2 . La potencia que marcará el vatímetro P_1 , será la suma de la que indica el vatímetro P_2 más la potencia disipada en la resistencia R_2 , cuyo valor es $R_2 I_T^2 = U_2 I_T = 135 \cdot 30 = 4.050$ W, y de este modo se obtiene directamente:

$$P_1 = P_2 + R I_T^2 = 7.200 + 4.050 = 11.250 \text{ W}$$

que será la lectura del vatímetro P_1 . El lector puede comprobar este resultado de un modo más lento, y es sustituir el valor de $U_2 = 135$ voltios del resultado anterior, en la ecuación (6), para obtener la expresión fasorial de la tensión de la red de alimentación, lo que da lugar a:

$$\underline{U}_g = 300 + j225 = 375 \angle 36,87^\circ \quad (8)$$

y por lo tanto la potencia del vatímetro P_1 es igual a:

$$P_1 = \text{Re} [\underline{U}_g \underline{I}_T^*] = \text{Re} [375 \angle 36,87^\circ \cdot 30 \angle -36,87^\circ] = 11.250 \text{ W}$$

2.14. Transferencia máxima de potencia

Una de las características distintivas de un ingeniero es su preocupación por la optimización. En los circuitos electrónicos es frecuente tener que adaptar un elemento de un sistema a otro ya existente con el fin de obtener los mejores resultados, en particular buscando una transferencia máxima de potencia. En el capítulo anterior, en el Ejemplo de Aplicación 1.18, se analizaron las condiciones que debería reunir una carga para extraer la máxima potencia de una red con fuentes de c.c., vamos a ver ahora una demostración más general para el caso de que se tengan excitaciones de c.a. En la Figura 2.66a se ha representado una red conteniendo elementos activos y pasivos en su interior, y que dispone de dos terminales de salida A y B, a los que se conecta una impedancia de carga $\underline{Z}_L$. En la Figura 2.66b se ha representado el circuito equivalente de Thévenin de la red alimentando $\underline{Z}_L$. El problema a resolver sería: ¿qué valores deben tener $\underline{R}_L$ y $\underline{X}_L$ para que se transfiera la máxima energía a esta impedancia?

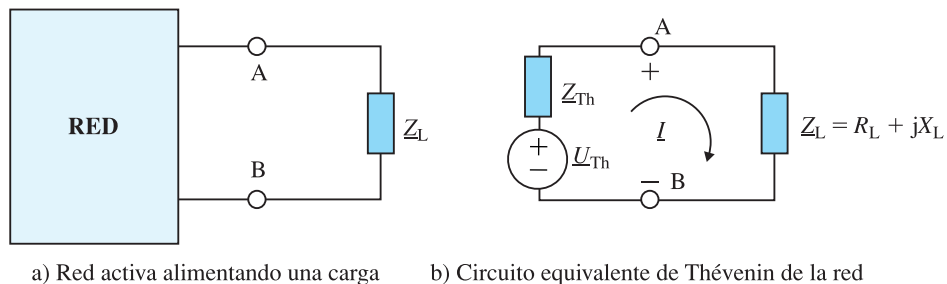


Figura 2.66 Transferencia máxima de potencia

Observamos que la corriente $\underline{I}$ en el circuito de la Figura 2.66b es igual a:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{Th}}{\underline{Z}_{Th} + \underline{Z}_L} = \frac{U_{Th}}{(R_{Th} + R_L) + j(X_{Th} + X_L)} \quad (2.157)$$

que corresponde a un módulo:

$$I = \frac{U_{Th}}{\sqrt{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2}} \quad (2.158)$$

por lo que la potencia activa desarrollada en la carga vale:

$$P_L = R_L I^2 = R_L \frac{U_{Th}^2}{\sqrt{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2}} \quad (2.159)$$

para un circuito determinado U_{Th} , R_{Th} y X_{Th} son valores fijos definidos, de tal forma que R_L y X_L deben ajustarse para obtener los resultados óptimos. Si se desea una transferencia máxima de energía (potencia), la ecuación (2.159) debe llevarse al máximo. El procedimiento general sería derivar P_L respecto a R_L y a X_L e igualando estas derivadas a cero, encontrar los valores de R_L y X_L que cumplen estas condiciones. Ahora bien observando (2.159) vemos que P_L es máxima para cualquier valor de R_L si se cumple que $X_L = -X_{Th}$ ya que de este modo se anula el término inductivo y hace máxima la corriente. En estas condiciones la potencia (2.159) se convierte en:

$$P_L = R_L \frac{U_{Th}^2}{(R_{Th} + R_L)^2} \quad (2.160)$$

cuya magnitud será máxima cuando se cumpla la condición:

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \Rightarrow R_L = R_{Th} \quad (2.161)$$

De este modo el valor de $\underline{Z}_L$ será:

$$\underline{Z}_L = R_L + jX_L = R_{Th} - jX_{Th} = \underline{Z}_{Th}^* \quad (2.162)$$

es decir, que para que se obtenga una máxima transferencia de energía de un circuito a una carga, esta deberá tener *una impedancia igual a la impedancia conjugada de Thévenin del circuito*. La potencia máxima sería igual a:

$$P_L (\text{máx}) = \frac{1}{4} \frac{U_{Th}^2}{R_{Th}} \quad (2.163)$$

que se obtiene al sustituir R_L por R_{Th} en (2.160). Debe destacarse que en las redes eléctricas de potencia, ningún aparato eléctrico está diseñado para sacar la potencia máxima de un enchufe, que tiene una impedancia interna equivalente de solo una fracción de ohmio, pues daría lugar a corrientes muy elevadas que no soportarían los cables de alimentación. En vez de esto, generalmente una carga eléctrica se diseña para que consuma una cantidad defini-

da de potencia y para un mayor rendimiento y menor caída de tensión en las líneas, la impedancia de la fuente se hace que sea tan baja como pueda lograrse económicamente. Obsérvese que la impedancia de la carga no se hace igual a la impedancia conjugada de la fuente.

Sin embargo en electrónica, comunicaciones y control, las señales son de baja potencia y se procura conseguir una máxima transferencia de potencia, ya que entonces la energía transferida es normalmente despreciable. La condición (2.162) se denomina entonces *adaptación de impedancias* entre la fuente y la carga y requiere a veces la inclusión de un transformador en el circuito.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.21

En el circuito de la Figura 2.67, determinar el valor de $\underline{Z}_L$ para que transfiera la máxima potencia a esta impedancia. Calcular además el valor de esta potencia.

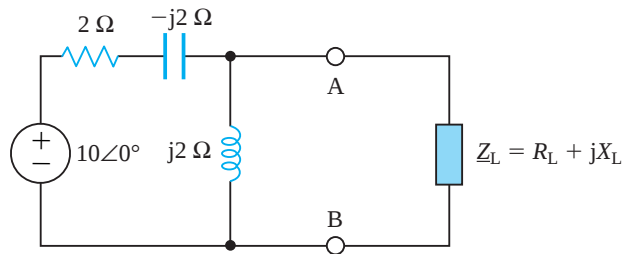


Figura 2.67 Ejemplo de aplicación 2.21

Solución

El lector puede demostrar fácilmente que el circuito equivalente de Thévenin de la red, cuyos terminales de salida son A y B, está constituido por un generador:

$$U_{Th} = \frac{10\angle 0^\circ}{2 - j2 + j2} j2 = 10\angle 90^\circ \text{ voltios}$$

y una impedancia:

$$\underline{Z}_{Th} = (2 - j2) \parallel j2 = 2 + j2 \, \Omega$$

de este modo la impedancia de la carga deberá ser:

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_{Th}^* = 2 - j2 \, \Omega$$

y por consiguiente la potencia máxima desarrollada será igual:

$$P_L = \frac{1}{4} \frac{U_{Th}^2}{R_{Th}} = \frac{1}{4} \frac{10^2}{2} = 12,5 \text{ W}$$



Comentarios prácticos

1) Antena colectiva de televisión: En las comunidades de vecinos existe una antena de TV colectiva que dispone de un amplificador de señal. Desde esta antena situada en la azotea del edificio, se baja una línea coaxial de televisión, para dar señal a cada vivienda. Si el edificio es de mucha altura (es decir, la línea es larga), para tener una señal óptima es conveniente ir adaptando las impedancias en los enchufes de TV de cada inquilino, y es por ello, que dentro de estos enchufes de antena se incluye una resistencia eléctrica específica que calibra el instalador y que es función de la altura del piso. Es frecuente entonces que cuando un vecino hace obras en su casa y, con objeto de modernizar su vivienda, se dedica a cambiar todos los enchufes eléctricos (lo cual no plantea ningún problema), pero también cambia el enchufe de la antena de TV. Aparece un problema: ¡que a partir de ese momento tanto ese vecino como todos los que están en la misma vertical de línea dejan de ver bien la televisión! ¿Qué ha sucedido? Pues que el instalador eléctrico no ha tenido en cuenta que debe ajustar la resistencia interna de la toma de antena y ha puesto un enchufe con la resistencia que viene de fábrica, que no tiene por qué ser la más adecuada. ¡Errores que suelen cometer algunos instaladores! Por cierto la impedancia característica de un cable bifilar de antena de TV es de $300\ \Omega$, mientras que la de un cable coaxial tiene un valor de $75\ \Omega$.

2) Equipos de sonido: En los equipos de sonido de alta fidelidad (*High Fidelity*, *HI-FI*), se suelen incluir en las características del mismo, tanto el valor de la potencia, como la impedancia (resistencia) de salida. Si el equipo es de calidad se incluye también el valor de la tensión de salida (en valor eficaz o r.m.s.) y la respuesta en frecuencia, que debe ser lo más plana posible en la zona audible (de 20 Hz a 20 kHz), para que de este modo se reproduzcan con el mismo factor de amplificación todos los sonidos, tanto graves como medios y agudos (es decir, en todo el rango de frecuencias). El dato de la resistencia de salida es fundamental, ya que de acuerdo con la ecuación (2.161), para que exista una transferencia máxima de energía (potencia) a los altavoces, que actúan como carga del equipo de sonido, es necesario que la resistencia de la combinación de los mismos coincida con la de salida del amplificador. Por ejemplo supóngase que la impedancia de salida del amplificador es de $8\ \Omega$. Si se quieren colocar como carga de salida cuatro altavoces de $8\ \Omega$, será necesario poner dos altavoces en paralelo y conectar este grupo en serie con los otros dos restantes que deben estar a su vez, entre ellos, en paralelo. Téngase en cuenta que dos altavoces de $8\ \Omega$ en paralelo dan una resistencia equivalente de $4\ \Omega$, y los otros dos en paralelo dan también $4\ \Omega$, por lo que al poner ambos grupos en serie se conseguirá la resistencia de $8\ \Omega$. De este modo se transferirá toda la potencia del amplificador a los altavoces. ¡Es necesario asimismo que las conexiones de los altavoces unan terminales de la misma polaridad para que estén en fase y se muevan a la vez en el mismo sentido! Hay que señalar que los montajes de los cuatro altavoces en serie o los cuatro en paralelo no son correctos, ya que en el primer caso la resistencia que ofrecerán será de $32\ \Omega$ y en el segundo de $2\ \Omega$. En ambas situaciones no se consigue extraer la potencia total del amplificador, pero incluso además el segundo montaje es peor que el primero. ¿Puede explicar por qué? La solución es simple, en el segundo montaje, al tener muy poca resistencia equivalente ($2\ \Omega$) la corriente será más elevada que la de diseño, por lo que aparte de no poder sacar la máxima potencia, si lo intenta, provocará una avería en el amplificador, si este no está bien protegido.

2.15. Resonancia en c.a.

El fenómeno de resonancia existe en una gran diversidad de sistemas físicos y ocurre cuando un sistema es afectado por estímulos periódicos con una frecuencia similar a la frecuencia natural de aquél. Cuando se excita un sistema, este tiende a oscilar a sus frecuencias naturales. Si la fuerza de excitación tiene una frecuencia igual a la frecuencia natural, la magnitud de la respuesta puede hacerse muy elevada. Para que se produzca resonancia es necesario que existan dos formas de almacenamiento de energía, en sistemas mecánicos: energía cinética y potencial y en sistemas eléctricos: energía eléctrica y magnética.

Consideremos por ejemplo el circuito serie R - L - C mostrado en la Figura 2.68a, que se alimenta por un generador de tensión constante y frecuencia variable. Es evidente que la corriente (respuesta) es máxima a la frecuencia para la cual la impedancia compleja $\underline{Z}(j\omega)$

es un mínimo. Este hecho puede utilizarse para definir las frecuencias de resonancia e indicar que en un circuito serie de impedancia:

$$\underline{Z} = R + jX(\omega) \quad (2.164)$$

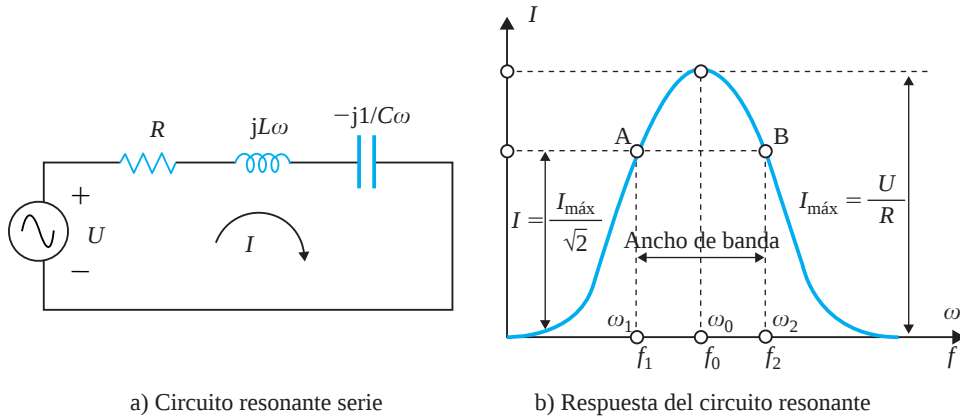


Figura 2.68 Circuito resonante serie y corriente respuesta en función de la frecuencia

para que se produzca resonancia, se debe cumplir:

$$\text{Im}(\underline{Z}) = X(\omega) = 0 \quad (2.165)$$

En un circuito paralelo sería una expresión dual y que se indicaría así:

$$\text{Im}(\underline{Y}) = Y(\omega) = 0 \quad (2.166)$$

Las relaciones (2.165) y (2.166) indican que la resonancia se produce cuando la tensión y la corriente del circuito están en fase, lo que constituye otra definición de resonancia en electricidad. Para el caso del circuito serie R - L - C de la Figura 2.68a se tiene:

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (2.167)$$

y al aplicar la condición (2.165) se obtiene:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.168)$$

Si se calcula el valor de la intensidad en función de la frecuencia se obtiene una curva definida por la ecuación:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (2.169)$$

esta corriente es máxima cuando $\omega = \omega_0$, como se muestra en la Figura 2.68b. Los valores de las frecuencias a los cuales la corriente se reduce a $I_{\text{máx}}/\sqrt{2}$ son importantes para el

estudio de circuitos sintonizados en electrónica y comunicaciones, y dan lugar a los puntos A y B en la Figura 2.68, que corresponden a las frecuencias f_1 y f_2 respectivamente. A estos puntos se les denomina frecuencias o *pulsaciones de potencia mitad*, ya que la potencia disipada en la resistencia del circuito para estos valores de la frecuencia es la mitad de la que se obtiene para la condición de resonancia. Es fácil obtener los valores de las pulsaciones correspondientes a base de igualar la corriente de la expresión (2.169) a $I_{\text{máx}}/\sqrt{2}$, es decir:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\text{máx}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U}{R} \quad (2.170)$$

que equivale a escribir:

$$Z = \sqrt{2} R = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (2.171)$$

de donde se deduce:

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \quad ; \quad \omega_2 = +\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \quad (2.172)$$

Se define como *anchura de banda* al siguiente rango de pulsaciones:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (2.173)$$

que teniendo en cuenta (2.171) se cumple:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \quad (2.174)$$

De acuerdo con (2.172) se puede obtener el valor del producto de las pulsaciones y su relación con la pulsación de resonancia, ya que multiplicando las dos pulsaciones (2.172) entre sí resulta:

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (2.175)$$

Lo que indica que la pulsación de resonancia es la media geométrica de las pulsaciones de potencia mitad. Se define como **factor de calidad** Q del circuito resonante al cociente:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad (2.176)$$

El factor de calidad es una medida de lo abrupta que es la curva de la corriente respuesta de la Figura 2.68b. Cuanto mayor es Q tanto más puntiaguda es la curva anterior. Por otro lado cuanto mayor es Q , se dice que el circuito resonante es mucho más selectivo. A frecuencias de audio ≤ 20 kHz, Q raramente excede el valor de 50, pero a frecuencias de megaherzios pueden conseguirse valores de Q de varios miles utilizando cavidades reso-

nantes. El factor de calidad Q se puede expresar en función de los parámetros del circuito, ya que al sustituir (2.174) en (2.176) se obtiene:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L\omega_0}{R} \quad (2.177)$$

También se puede definir el factor de calidad en términos energéticos. Supóngase el circuito de la Figura 2.68a, trabajando a la frecuencia o pulsación de resonancia ω_0 , en este caso y según se observa en la Figura 2.68b, la corriente es máxima y su valor es:

$$I_{\text{máx}} = \frac{U}{R} \quad (2.178)$$

Ya que en este punto se anula la componente reactiva de la impedancia. En este punto de trabajo la potencia disipada P_d en el circuito resonante, o de otro modo la energía disipada por segundo tiene un valor:

$$P_d = RI_{\text{máx}}^2 \quad (2.179)$$

como quiera que el tiempo de cada ciclo a la frecuencia de resonancia es $1/f_0$ segundos, la energía disipada por ciclo es:

$$W_d = \frac{P_d}{f_0} = \frac{RI_{\text{máx}}^2}{f_0} \quad [\text{julios/ciclo}] \quad (2.180)$$

Si se considera que a la pulsación de resonancia ω_0 , la expresión de la tensión instantánea aplicada al circuito resonante de la Figura 2.68a, es de la forma:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega_0 t \quad (2.181)$$

la corriente instantánea correspondiente, teniendo en cuenta el resultado (2.178), obedecerá a la siguiente expresión:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2} U \cos \omega_0 t}{R} = \sqrt{2} I_{\text{máx}} \cos \omega_0 t \quad (2.182)$$

En estas condiciones la energía magnética instantánea almacenada W_L en la inductancia L tendrá un valor:

$$W_L = \frac{1}{2} Li^2(t) = LI_{\text{máx}}^2 \cos^2 \omega_0 t \quad (2.183)$$

Por otro lado la d.d.p. en bornes del condensador en la situación de resonancia es:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = \frac{\sqrt{2} I_{\text{máx}}}{C\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (2.184)$$

por lo que la energía eléctrica instantánea almacenada W_C en la capacidad será:

$$W_C = \frac{1}{2} Cu_C^2 = \frac{I_{\text{máx}}^2}{C\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \quad [\text{J}] \quad (2.185)$$

Y teniendo en cuenta que según (2.168), se cumple $\omega_0^2 = 1/LC$, la energía almacenada por el condensador según la expresión (2.185) se puede escribir en función del valor de la inductancia, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$W_C = LI_{\text{máx}}^2 \sin^2 \omega_0 t \quad [\text{J}] \quad (2.186)$$

Es por ello que la energía total almacenada W_a en el circuito resonante será la suma de las expresiones (2.183) y (2.186), dando lugar a un valor:

$$W_a = LI_{\text{máx}}^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = LI_{\text{máx}}^2 \quad [\text{J}] \quad (2.187)$$

Lo que significa que la energía total almacenada (inductancia + capacidad) no depende del tiempo **¡este resultado es sorprendente!** Significa que en la resonancia, el mundo exterior no suministra energía ni a la bobina ni al condensador; estos componentes solamente intercambian energías entre sí, la única energía que se necesita del exterior (generador) es la que se requiere para compensar las pérdidas eléctricas en la resistencia del circuito. En definitiva un circuito L - C sin pérdidas comenzaría con una energía almacenada inicial y estaría oscilando siempre. Cuando la corriente instantánea pasa por un máximo temporal (en el punto correspondiente a la resonancia), es la inductancia la que almacena toda la energía; un cuarto de ciclo después, la corriente se hace cero, y por ello la tensión en los terminales del condensador pasa por su máximo; en ese momento es el condensador el que lleva toda la energía almacenada por el circuito resonante y así sucesivamente.

Con esta introducción ya estamos preparados para expresar el factor de calidad Q de un circuito resonante en función de las energías calculadas en la resonancia: energía disipada por ciclo W_d , de acuerdo con la ecuación (2.180) y la energía almacenada en el circuito determinada por (2.187). Si se divide (2.187) por (2.180) se obtiene:

$$\frac{W_a}{W_d} = \frac{LI_{\text{máx}}^2}{RI_{\text{máx}}^2} f_0 = \frac{L}{R} f_0 \quad (2.188)$$

y teniendo en cuenta la expresión del factor de calidad (2.177) resulta:

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L2\pi f_0}{R} = 2\pi \frac{W_a}{W_d} \quad (2.189)$$

Es decir el factor de calidad es 2π veces el cociente entre la energía almacenada y la energía disipada por ciclo, a la frecuencia de resonancia. Por otro lado, en la situación de resonancia, toda la tensión del generador de la Figura 2.68a queda reflejada en bornes de la resistencia R , de tal modo que la corriente del circuito es un máximo $I_{\text{máx}}$ para esa frecuencia de resonancia f_0 . En esta situación, la tensión en bornes de la inductancia es:

$$\underline{U}_L = jL\omega_0 I_{\text{máx}} = jL\omega_0 \frac{U}{R} = jQU \quad (2.190)$$

mientras que la tensión en el condensador es:

$$\underline{U}_C = -j \frac{1}{C\omega_0} I_{\text{máx}} = -jL\omega_0 \frac{U}{R} = -jQU \quad (2.191)$$

que como era de esperar, estas tensiones son de la misma magnitud pero de sentido contrario. Teniendo en cuenta que el factor de calidad Q suele ser muy superior a la unidad, las tensiones en la inductancia y en la capacidad serán en general elevadas y muy superiores a la tensión aplicada del generador.

El fenómeno de resonancia tiene aplicaciones muy positivas en las técnicas de las telecomunicaciones, por ejemplo para sintonizar diversas emisoras de radio con equipo receptor, el aparato de radio tiene en su interior un condensador variable (condensador de sintonía o *tuning*) que al ir cambiando la posición de sus placas internas varía su capacidad, por lo que, de acuerdo con (2.168), se pueden ir seleccionando las diferentes frecuencias de las emisoras de radiodifusión, señales que previamente detectadas y amplificadas se hacen después audibles en el altavoz.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.22

Un circuito serie R - L - C está alimentado por un generador de tensión de 100 V. Si los valores de los parámetros son: $R = 5 \Omega$, $L = 2 \text{ mH}$; $C = 20 \mu\text{F}$. Calcular: a) frecuencia de resonancia; b) intensidad que circula por el circuito si la frecuencia del generador es igual a la frecuencia de resonancia; c) tensiones en R , L y C ; d) frecuencias f_1 y f_2 ; e) anchura de banda; f) factor de calidad del circuito resonante.

Solución

a) La impedancia compleja del circuito para una pulsación ω es igual a:

$$\underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

la condición de resonancia es según (2.165):

$$X(\omega) = L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

de donde se deduce:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5.000 \text{ rad/s} \Rightarrow f = \frac{\omega_0}{2\pi} = 795,77 \text{ Hz}$$

b) Si se toma la tensión como referencia: $\underline{U} = 100 \angle 0^\circ$, la corriente que resultará a la frecuencia anterior será:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{100 \angle 0^\circ}{5} = 20 \angle 0^\circ$$

c) Las tensiones complejas en cada elemento pasivo son entonces:

$$\underline{U}_R = R \underline{I} = 5 \cdot 20 \angle 0^\circ = 100 \angle 0^\circ \quad ; \quad \underline{U}_L = +j L \omega \underline{I} = +j 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5.000 \cdot 20 \angle 0^\circ = 200 \angle 90^\circ$$

$$\underline{U}_C = -j \frac{1}{C\omega} \underline{I} = -j \frac{1}{20 \cdot 10^{-6} \cdot 5.000} \cdot 20 \angle 0^\circ = 200 \angle -90^\circ$$

d) Las frecuencias f_1 y f_2 vienen definidas por:

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \quad ; \quad \omega_2 = +\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}$$

que al sustituir valores nos da:

$$\omega_1 = 3.903,88 \text{ rad/s} \quad ; \quad \omega_2 = 6.403,88 \text{ rad/s}$$

es decir:

$$f_1 = 621,32 \text{ Hz} \quad ; \quad f_2 = 1.019,21 \text{ Hz}$$

e) Lo que corresponde a un ancho de banda:

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 397,89 \text{ Hz}$$

f) El factor de calidad del circuito es según (2.176) expresado en frecuencias:

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{795,77}{397,89} \approx 2$$

que es un valor pequeño para que tenga utilidad en el campo de las telecomunicaciones.

2.16. Los filtros eléctricos

Los filtros eléctricos son circuitos que tienen una respuesta a la frecuencia de forma muy específica y que permiten eliminar frecuencias indeseables en señales de comunicación y también en señales de potencia. Existen para ello: *filtros paso bajo, paso alto, paso banda y banda eliminada (o de rechazo de banda)* en función de las frecuencias de corte de los filtros. En la Figura 2.69 se muestran con línea continua las respuestas ideales de estos filtros y con trazado discontinuo la respuesta real y que se corresponden con los cuatro tipos mencionados.

El estudio de los filtros eléctricos pertenece a áreas más especializadas de la ingeniería eléctrica, sin embargo para que comprenda el lector cómo trabajan, se va a comentar a continuación cómo funciona un *filtro paso bajo* construido con elementos pasivos, que en el caso más simple está formado por una resistencia y un condensador, tal como se muestra en la Figura 2.70, es decir la resistencia se conecta en serie y el condensador en paralelo con la carga. Se observa que el filtro se alimenta por un generador de c.a. de frecuencia variable y de tensión constante U_1 . La salida del filtro es la tensión U_2 que se aplica a una carga externa. Para analizar el funcionamiento del filtro, se va a desconectar la carga. Se trata de determinar el cociente entre la tensión de salida y la tensión de entrada al filtro en función de la pulsación (frecuencia) del generador.

Si la señal de entrada tiene una pulsación $\omega = 2\pi f$, el cociente U_2/U_1 se puede obtener aplicando el segundo lema de Kirchhoff al circuito de la Figura 2.70, por lo que resulta:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad ; \quad \underline{U}_2 = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} \quad (2.192)$$

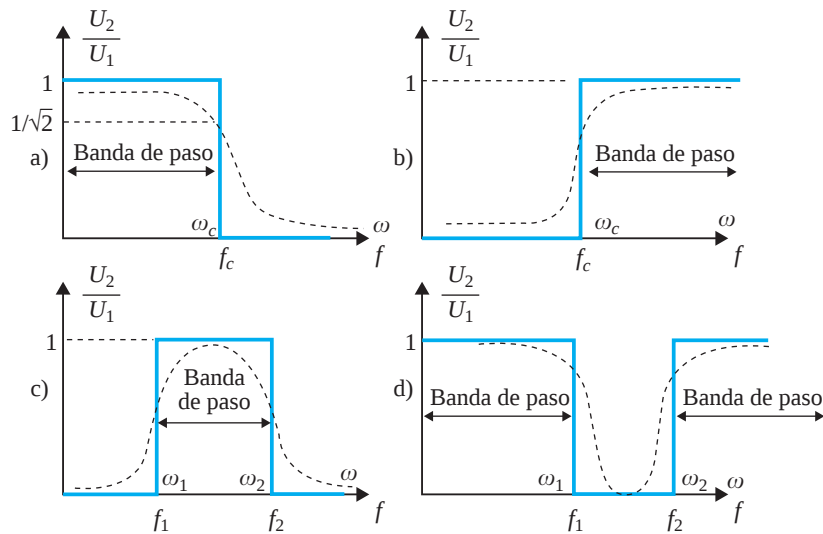


Figura 2.69 Respuesta ideal y real de los filtros eléctricos

es decir:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (2.193)$$

de donde se deduce que el cociente modular es:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (2.194)$$

de acuerdo con la ecuación anterior se observan los valores límites siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Para } \omega = 0 \quad U_2/U_1 &= 1 \\ \text{Para } \omega = \infty \quad U_2/U_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.195)$$

En definitiva para bajas frecuencias $\omega \rightarrow 0$, el condensador se comporta como un circuito abierto (impedancia infinita), y no deja pasar la corriente por la malla del esquema de la Figura 2.70, es por ello que la señal de salida coincide con la entrada, o de otro modo, la señal de entrada se transmite a la salida. Se dice entonces que no existe *atenuación*, o re-

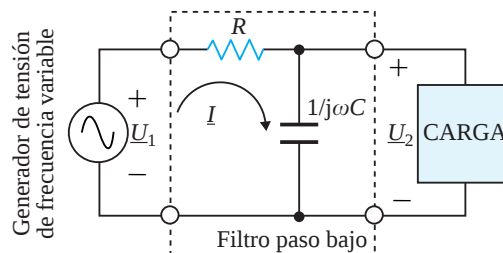


Figura 2.70 Filtro paso bajo

ducción de la señal al pasar por el filtro. Conforme la frecuencia va aumentando, de acuerdo con (2.194), la tensión U_2 va disminuyendo paulatinamente, y cuando $\omega \rightarrow \infty$, el condensador se comporta como un cortocircuito (su impedancia es cero), por lo que la tensión de salida tiende a cero. En resumen, el filtro bloquea las señales de alta frecuencia, dejando pasar las bajas frecuencias. En la Figura 2.69a se representa en trazo discontinuo el cociente (2.194) en función de la pulsación (y frecuencia) de la tensión de entrada del generador. Debido a las características de este tipo de respuesta, la red RC estudiada responde al nombre de *filtro paso bajo*, ya que *deja pasar las señales de baja frecuencia*, atenuando (reduciendo) fuertemente las señales de alta frecuencia. Una característica importante de los filtros es la frecuencia de corte f_c (o pulsación de corte ω_c), que se define como la frecuencia (o pulsación) para la cual el cociente (2.194) vale $1/\sqrt{2}$, es decir:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.196)$$

generalmente la relación anterior suele medirse en decibelios, en este caso (2.196) se expresa así :

$$20 \log \frac{U_2}{U_1} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ db} \quad (2.197)$$

de este modo la frecuencia de corte f_c (o pulsación de corte ω_c) representa la frecuencia (pulsación) a la cual la tensión de salida se reduce 3 db frente a la tensión de entrada. Teniendo en cuenta (2.196), el valor de la pulsación ω_c correspondiente es:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c R C = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \quad (2.198)$$

que supone una frecuencia en hercios:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (2.199)$$

que es el valor de la frecuencia de corte de un filtro paso bajo. En la Figura 2.69a se ha representado con línea gruesa la característica ideal de un filtro paso bajo, que es aquel que tiene una tensión de salida constante para un rango de frecuencias: $0 < f < f_c$ y tiene una salida nula para $f > f_c$. Existen configuraciones reales formada por redes LC en escalera que se acercan a esta respuesta ideal; un tipo muy extendido es el filtro de Butterworth, en el que prácticamente $U_2/U_1 = 1$ en la banda de paso (es decir para $\omega < \omega_c$) y para $\omega > \omega_c$ la tensión de salida cae a cero de una forma muy abrupta. Existen otros tipos de filtros cuasi-ideales como los de Chebyshev, Bessell y elípticos. En la práctica de las telecomunicaciones y de la instrumentación se realizan estos filtros analógicos con ayuda de amplificadores operacionales, por lo que se denominan **filtros activos**, incluso modernamente se van imponiendo los filtros digitales para señales de poca energía y gran información.

En el caso de un *filtro paso alto*, la tensión de salida es constante para $f > f_c$ y es nula para $f < f_c$ (Figura 2.69b) y el filtro está formado por un condensador en serie y una resistencia en paralelo, es decir un montaje inverso al señalado en la Figura 2.70. Los *filtros*

paso banda dejan pasar la señal para el rango $f_1 < f < f_2$, y anulando las señales correspondientes a frecuencias fuera de esta banda (Figura 2.69c) y el filtro está formado por una red serie LC , conectada en serie con la carga y una red LC en paralelo, conectada en paralelo con la carga. Los *filtros de banda eliminada o de rechazo de banda* se comportan de forma inversa a los de paso banda, esto es rechazan una banda específica de frecuencias $f_1 < f < f_2$, mientras que dejan pasar (transmiten) las señales correspondientes a frecuencias fuera de esta banda (Figura 2.69d) y el filtro está formado por una red paralelo LC conectada en serie con la carga y una red LC en serie conectada en paralelo con la carga. El rango de frecuencias que son transmitidas por un filtro se conoce con el nombre de *banda de paso*, mientras que el rango de frecuencias que son atenuadas totalmente, se denomina *banda de rechazo*. En el diseño de filtros eléctricos, es frecuente comenzar con un prototipo del tipo paso bajo que, por medio de transformaciones matemáticas, permite obtener los parámetros de los demás tipos de filtros: paso alto, paso banda y banda eliminada o de rechazo de banda.



Comentarios prácticos

1) Aplicaciones de los filtros en Ingeniería Eléctrica: En el campo de la Electrotecnia, se utilizan filtros paso bajo para mejorar la tensión continua que se obtiene a la salida de los rectificadores, y conseguir de este modo, que la tensión continua sea más pura y libre de componentes de corriente alterna. Esto es necesario para la alimentación de motores de c.c. en tracción eléctrica, también se requieren filtros para conseguir tensiones continuas necesarias en la industria de la electrólisis y galvanoplastia (recubrimientos electrolíticos). Otra aplicación importante es en los enlaces asíncronos que unen redes eléctricas de distinta frecuencia, y que consiste en la operación de rectificación-filtrado e inversión; es decir, la energía eléctrica de una red de c.a. de una frecuencia se pasa a c.c., a continuación se filtra, y después mediante un inversor u ondulator, se transforma en c.a. de la frecuencia de la otra red. (Es el único procedimiento para intercambiar energía eléctrica entre redes de distinta frecuencia). También se emplean filtros para mejorar las ondas que producen los convertidores electrónicos y que se utilizan en la regulación de motores eléctricos y para evitar que se propaguen armónicos en la red, debido a las conmutaciones electrónicas de los componentes de potencia como tiristores, IGBTs, GTOs, etc. Hay que destacar que para filtrar señales de mucha energía, como sucede en el campo de la Electrotecnia, los filtros paso bajo se realizan con componentes pasivos formados normalmente por bobinas y condensadores.

2) Aplicaciones de los filtros en Ingeniería Electrónica y de Telecomunicación: En el campo de las telecomunicaciones, en el que las señales son de poca energía (pero con gran contenido de información), el uso de los filtros hizo posible la telefonía a gran distancia, por medio de señales de alta frecuencia que actuaban como portadoras, que se modulaban con las señales de voz (frecuencias de 0 a 3.000 Hz), pudiendo llevar miles de canales telefónicos por un mismo cable. Al llegar al extremo receptor, las señales se separaban mediante filtros paso banda, que dejaban pasar un solo canal y con un filtro paso bajo posterior se recuperaba la señal audible (denominada señal de banda base), que se oía en el auricular del teléfono. En los equipos de audio de alta fidelidad, se incluyen filtros para modificar el nivel de las señales de las distintas frecuencias, lo que permite controlar el tono de los sonidos que se escuchan en los altavoces (estos filtros se denominan ecualizadores). En el campo de la instrumentación, cuando se miden magnitudes mecánicas (deformación, desplazamiento, fuerza, presión,...) mediante transductores eléctricos (que son los elementos que transforman las señales físicas correspondientes, en señales eléctricas), suelen aparecer señales indeseables, que se conocen con el nombre de ruido, y que deben filtrarse previamente, para no cometer errores de medida; generalmente son filtros paso bajo, para anular las altas frecuencias que son representativas del ruido.

3) Historia de los filtros: El desarrollo de los filtros eléctricos ha sido extraordinario desde que fueran inventados en 1909 por George Campbell, ingeniero de la Bell Telephone. Entre los años 1909 y 1960, los filtros se construían con elementos pasivos formados por redes LC en escalera. Con la aparición en el mercado en 1959 del circuito integrado, comienza la época de los filtros activos, constituidos por amplificadores operacionales (que son circuitos integrados específicos) y solamente con componentes RC , lo que hizo posible evitar las voluminosas y caras inductancias. Con estos filtros no solamente se conseguía mejorar el filtrado de las señales, sino que además

se podía aumentar la ganancia de potencia de las mismas. Los filtros cuasi ideales tipo Butterworth, Bessel o Chebyshev, se construían (y se construyen) utilizando varios amplificadores operacionales con realimentaciones múltiples o del tipo puente Sallen-Key. La integración a gran escala que se produce en la electrónica a partir de la década de 1960, permitió una reducción de volumen y precios de los componentes electrónicos activos, lo que propició el paso de las técnicas de señales analógicas a las digitales. La manipulación de esta información que se torna numérica, dio lugar a áreas específicas de la ingeniería eléctrica, como es el procesamiento de la señal digital, que se vio favorecida enormemente con la llegada al mercado del microprocesador en el año 1971. Se inició con ello, la etapa del filtrado digital, que alcanzó un nuevo hito con el desarrollo de chips DSP (*digital signal processing*), que son circuitos integrados de bajo coste, que contienen unidades aritméticas muy rápidas, con registros que almacenan los coeficientes de los filtros, que a veces incluyen convertidores analógico-digitales o digitales-analógicos y con un hardware adicional para aumentar la velocidad de las operaciones mediante el procesamiento paralelo. Los filtros digitales están sustituyendo progresivamente a los analógicos, porque se implementan las ecuaciones de los filtros mediante software y hardware y entre sus grandes ventajas, es que son altamente inmunes al ruido, de alta precisión, facilidad para manipular las características de los filtros, y además, con un coste cada vez más reducido. Esto ha hecho posible la aplicación del filtrado digital a campos muy diversos: reconocimiento de voz, tratamiento de patrones e imágenes, en las aplicaciones médicas que utilizan ultrasonidos o imágenes: ecografías, escáneres, resonancia magnética nuclear,... Todas estas aplicaciones requieren el uso de técnicas matemáticas muy sofisticadas, como la Transformada de Fourier Simple o Rápida (*FFT, Fast Fourier Transform*), Transformada en Z para señales muestreadas, Transformadas de Hilbert y otras.

■ 2.17. Circuitos eléctricos con señales no sinusoidales

■ 2.17.1. Introducción

En este capítulo se han estudiado los circuitos eléctricos en régimen permanente y con excitaciones sinusoidales, que son las formas de onda que se generan en los alternadores de las centrales eléctricas. Como ya se ha comentado, este tipo de señales permite abordar los problemas de circuitos eléctricos de c.a. utilizando el cálculo simbólico con números complejos, debido a que se pueden representar las tensiones y corrientes sinusoidales mediante sus fasores equivalentes. El gran desarrollo producido en la electrónica de potencia en los últimos veinticinco años ha permitido regular las máquinas eléctricas mediante accionamientos eléctricos que emplean rectificadores y convertidores, que se comportan como cargas no lineales, lo que provoca fuertes distorsiones en la forma de onda de la red, que deja de ser sinusoidal. Este tipo de accionamientos son cada vez más frecuentes en la industria y en el transporte, aplicados en este caso a la tracción eléctrica. También existen cargas no lineales en el alumbrado fluorescente, que disponen cada vez con más frecuencia de balastos electrónicos para mejorar la calidad y rendimiento de su alumbrado y que deforman la onda de la red. Incluso el creciente número de ordenadores personales, fotocopiadoras, impresoras, facsímiles (faxes) y escáneres que incluyen en su interior fuentes de alimentación conmutadas, son elementos que causan distorsiones en las ondas de las redes de distribución.

En este epígrafe se presentan los fundamentos de los circuitos eléctricos con señales no sinusoidales, para que el lector tenga una información básica sobre el tema, no solamente por la importancia que ya tiene actualmente sino por la que va a tener en un futuro. Se van a revisar primeramente conceptos sobre las series de Fourier y después se van a aplicar al análisis de circuitos con tensiones o corrientes no sinusoidales, en el que se incluirán los conceptos de potencia activa y reactiva y factor de potencia, que en estos casos obedecen a otras expresiones distintas a las clásicas y con otros significados.

■ 2.17.2. Revisión matemática. Series de Fourier

Debe señalarse que las ondas no sinusoidales, producidas por las cargas no lineales, son de naturaleza periódica, por lo que para trabajar con ellas y de acuerdo con el teorema de Fourier, se pueden desarrollar en series infinitas de funciones sinusoidales. Recuerdese que una función periódica $f(t)$ es aquella que se repite cada T segundos, es decir se cumple la condición:

$$f(t) = f(t + T) \quad (2.200)$$

el *periodo* de la función $f(t)$ es T y un ciclo de $f(t)$ es la porción de la onda $f(t)$ correspondiente a un periodo. La frecuencia f de la función $f(t)$ es el número de ciclos por segundo y se mide en hertz (en castellano hercios). En la Figura 2.71 se muestran diversas ondas periódicas en las que se señalan con trazo grueso los ciclos de repetición correspondientes.

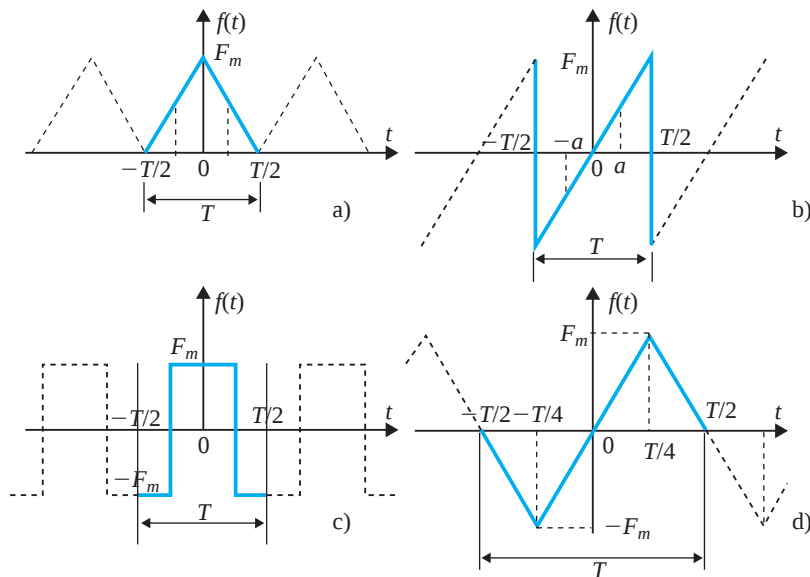


Figura 2.71 Ondas periódicas

Se denomina *pulsación fundamental* o frecuencia angular fundamental ω a:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ rad/s} \quad (2.201)$$

Jean Baptiste Fourier (1768-1830) demostró en su libro: *Théorie analytique de la chaleur* (Teoría analítica del calor, 1822), que si se dispone de una función $f(t)$ periódica, se puede desarrollar en una serie infinita de funciones sinusoidales:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + \dots + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t + \dots \quad (2.202)$$

o en forma más compacta:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sen n\omega t) \quad (2.203)$$

el primer término a_0 es una constante. Los términos seno y coseno de múltiplos enteros de ω se denominan *armónicos*, siendo el factor n el orden del armónico. Los términos correspondientes a $n = 1$ se denominan de *primer armónico* o fundamental.

Fourier demostró que estos coeficientes vienen determinados por las integrales siguientes:

a) Término constante a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2.204)$$

b) Coeficientes a_n :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad (2.205)$$

c) Coeficientes b_n :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sen n\omega t dt \quad (2.206)$$

Se puede demostrar fácilmente que para calcular los coeficientes de Fourier, se pueden realizar las integrales anteriores (2.204), (2.205) y (2.206) en cualquier intervalo de tiempo, siempre que tenga la anchura T , es decir, se puede tomar como límite inferior un tiempo genérico t_0 y el superior debe ser $t_0 + T$, de este modo las expresiones (2.205) y (2.206) se pueden escribir en general:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sen n\omega t dt \quad (2.207)$$

El cálculo de las integrales anteriores se puede facilitar observando las simetrías de la función $f(t)$ y es por ello que las funciones se clasifican en:

a) Función par: Se dice que $f(t)$ es una función par cuando se cumple la igualdad:

$$f(-t) = f(t) \quad (2.208)$$

es decir al sustituir t por $-t$ no cambia la función. Las Figuras 2.71a y 2.71c son un ejemplo de funciones pares. Obsérvese que una función par es simétrica respecto del eje vertical (eje de ordenadas).

b) Función impar: Se dice que $f(t)$ es una función impar cuando se cumple:

$$f(-t) = -f(t) \quad (2.209)$$

es decir al sustituir t por $-t$ cambia únicamente el signo de la función. Las Figuras 2.71b y 2.71d son un ejemplo de funciones con simetría impar. Una función impar es antisimétrica respecto del eje vertical en el origen.

- c) **Simetría de media onda:** Se dice que una función $f(t)$ tiene simetría de media onda cuando satisface la condición:

$$f(t) = -f(t + T/2) \quad (2.210)$$

Las Figuras 2.71c y 2.71d son un ejemplo de funciones con simetría de media onda. Se debe notar que la porción negativa de la onda es el reflejo de la porción positiva, desplazada horizontalmente medio periodo.

Las propiedades de simetría anteriores hacen más rápido el cálculo de los coeficientes de Fourier. Así se demuestra fácilmente que si $f(t)$ es una función par se cumple:

$$\int_{-a}^{+a} f(t) dt = 2 \int_0^{+a} f(t) dt \quad (2.211)$$

lo que puede verse de un modo intuitivo en la Figura 2.71a, ya que el área que abraza la función entre $-a$ y 0 es la misma que entre 0 y a .

De un modo análogo si $f(t)$ es una función impar se cumplirá:

$$\int_{-a}^{+a} f(t) dt = 0 \quad (2.212)$$

ya que el área entre $-a$ y 0 tiene el mismo valor que entre 0 y a , pero de signo contrario, lo que se hace evidente observando la función impar de la Figura 2.71b. En definitiva comparando las expresiones (2.204) y (2.212) se deduce que en una función impar el término a_0 es siempre igual a cero.

Por otro lado se puede comprobar que en las *funciones pares*, las expresiones matemáticas para determinar los coeficientes genéricos a_n y b_n al aplicar (2.207) y eligiendo $t_0 = -T/2$ son respectivamente:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt \quad ; \quad b_n = 0 \quad (2.213)$$

Es decir, el desarrollo en serie de Fourier de una función par *consiste únicamente de términos coseno*. Este resultado es aceptable intuitivamente: una onda de tipo coseno es par, por lo que la suma de términos coseno dará lugar a una $f(t)$ par.

Y operando de un modo similar, en el caso de funciones impares se obtiene:

$$a_n = 0 \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sen n\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sen n\omega t dt \quad (2.214)$$

En consecuencia el desarrollo en serie de Fourier de una función impar *consiste únicamente de términos seno*. Este resultado es aceptable intuitivamente: una onda de tipo seno es impar, por lo que la suma de términos seno dará lugar a una función resultante $f(t)$ impar.

Si la onda $f(t)$ tiene *simetría media onda*, se puede demostrar que los siguientes coeficientes a_n son de la forma:

$$a_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par; } a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (2.215)$$

Mientras que para los coeficientes b_n se obtiene:

$$b_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par}; \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n\omega t \, dt \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (2.216)$$

de este modo una función con simetría de media onda tiene un desarrollo en serie de Fourier que solamente contiene armónicos impares.

Debe añadirse también que si la función $f(t)$ además de tener simetría media onda es también par, el desarrollo en serie de Fourier tendrá solamente *armónicos impares tipo coseno*, lo que se justifica por la doble propiedad de *función par y además con simetría de media onda*. Análogamente si $f(t)$ es una *función impar con simetría media onda*, su desarrollo en serie de Fourier tendrá *solamente armónicos impares tipo seno*.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.23

En la Figura 2.72 se muestra a la izquierda un ciclo de una onda periódica de tensión rectangular de pulsación ω , que tiene un valor máximo positivo $+U_m$ entre 0 y $T/2$ y un valor máximo negativo $-U_m$ entre $T/2$ y T . Determinar el desarrollo en serie de Fourier de esta onda de tensión.

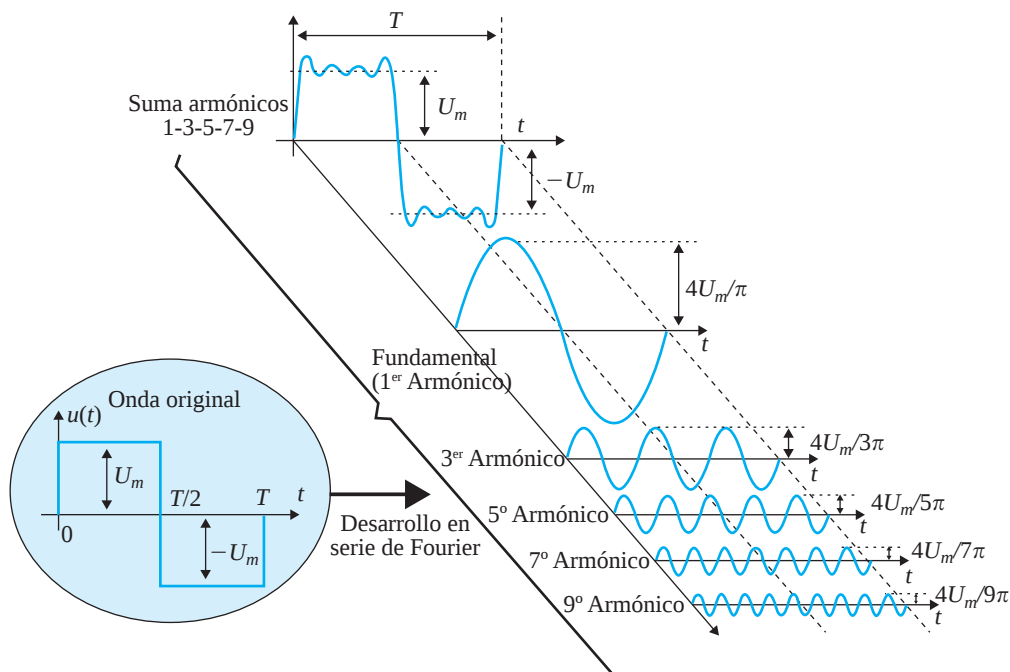


Figura 2.72 Composición en serie de Fourier de una onda periódica rectangular

Solución

De acuerdo con (2.185) el desarrollo es de la forma:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t)$$

El cálculo de los términos de la serie de Fourier de la onda rectangular, de acuerdo con (2.204), (2.205) y (2.206), incluyendo el cambio $\omega t = \alpha$ en la resolución de las integrales e integrando entre $-\pi$ y $+\pi$, da lugar a los siguientes resultados:

Término a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 -U_m d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} U_m d\alpha = -\frac{U_m}{2} + \frac{U_m}{2} = 0$$

Término a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos n\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -U_m \cos n\alpha d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_m \cos n\alpha d\alpha = \\ &= \left[-\frac{U_m}{\pi} \frac{\sin n\alpha}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{U_m}{\pi} \frac{\sin n\alpha}{n} \right]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Término b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin n\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -U_m \sin n\alpha d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_m \sin n\alpha d\alpha = \\ &= \left[\frac{U_m}{\pi} \frac{\cos n\alpha}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[-\frac{U_m}{\pi} \frac{\cos n\alpha}{n} \right]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

que da lugar a:

$$b_n = \frac{2U_m}{\pi n} (1 - \cos n\pi)$$

que para n par, se tiene $\cos n\pi = 1$ y para n impar resulta $\cos n\pi = -1$, lo que da lugar a:

$$\begin{aligned} b_n &= 0 && \text{para } n \text{ par} \\ b_n &= \frac{4U_m}{\pi n} && \text{para } n \text{ impar} \end{aligned}$$

y de este modo el desarrollo en serie de Fourier de la onda rectangular es de la forma:

$$u(t) = \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin n\omega t = \frac{4U_m}{\pi} \sin \omega t + \frac{4U_m}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4U_m}{5\pi} \sin 5\omega t + \frac{4U_m}{7\pi} \sin 7\omega t + \frac{4U_m}{9\pi} \sin 9\omega t + \dots$$

En la Figura 2.72 se dibujan las ondas anteriores y en la parte superior se muestra la suma correspondiente de los armónicos 1, 3, 5, 7 y 9, que como se observa tiende a reproducir la onda rectangular original y que se parecerá tanto más a esta cuanto más términos se utilicen de la serie. Se debe señalar, sin embargo, que cuando la función original tiene discontinuidades, como sucede en este caso, no existe una buena convergencia de la suma de la serie en los entornos de las discontinuidades. Es por ello que la suma muestra un pico seguido de oscilaciones rápidas y aunque se incluyan más términos en la serie, las oscilaciones se vuelven más rápidas pero los picos nunca desaparecen. A este efecto se le conoce con el nombre de **Fenómeno de Gibbs**.

■ 2.17.3. Aplicaciones de las series de Fourier a los circuitos eléctricos

Si se considera ahora una función periódica de tensión $u(t)$, de acuerdo con (2.203), y transformando los términos trigonométricos de la misma frecuencia en términos coseno, su desarrollo en serie de Fourier se puede poner en la forma siguiente:

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \quad (2.217)$$

en la que U_0 representa la componente de c.c. de la onda de tensión y U_n la *tensión eficaz del armónico de orden n* . Como es lógico al término U_1 (para $n = 1$) se denomina *armónico fundamental*. Nótese que para adaptar la nomenclatura de las series de Fourier a los circuitos eléctricos, en la ecuación (2.217) se han expresado los valores máximos en función de magnitudes eficaces, por ser más práctico en el estudio de los circuitos, como ya se ha demostrado a lo largo de este capítulo.

Si la señal periódica no sinusoidal de tensión $u(t)$ se aplica a una red lineal, se puede calcular la respuesta de la red, es decir la corriente absorbida por la misma, como la respuesta a cada una de las tensiones anteriores de (2.217), lo que es consecuencia de la validez del *teorema de superposición para redes lineales*. De este modo la corriente respuesta será de la forma siguiente:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \cos(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n) \quad (2.218)$$

y en la que se cumple:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z(0)} \quad ; \quad I_n = \frac{U_n}{Z(n\omega)} \quad ; \quad \varphi = \arctg \frac{\text{Im}[Z(n\omega)]}{\text{Re}[Z(n\omega)]} \quad (2.219)$$

donde $Z(0)$ es la impedancia que ofrece la red lineal a la frecuencia cero, es decir la resistencia en corriente continua y $Z(n\omega)$ es la impedancia de la red lineal a la pulsación armónica $n\omega$. En definitiva, las ecuaciones anteriores señalan que se puede aplicar el método fasorial a cada una de las tensiones armónicas U_n en que se descompone la tensión original $u(t)$, exceptuando que para la componente continua U_0 , la red actúa como una resistencia. Al término I_1 (para $n = 1$) de la ecuación (2.218) se le denomina *armónico fundamental de la corriente*. De acuerdo con (2.12), el valor eficaz, o valor cuadrático medio de una señal periódica, de periodo T , se calcula mediante la siguiente expresión:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (u^2(t) dt)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \cos(n\omega t + \alpha_n))^2 dt} \quad (2.220)$$

y cuyo resultado es:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2} \quad (2.221)$$

lo que significa que el *valor eficaz de la tensión periódica es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las tensiones eficaces de sus componentes armónicas, incluyendo el término de corriente continua*. De una forma similar, el valor eficaz de la corriente periódica $i(t)$ de la expresión (2.218) es igual a:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2} \quad (2.222)$$

En la Figura 2.73 se muestra una interpretación geométrica de la ecuación (2.222) (y que sirve también para (2.221) cuando se trata de tensiones). En el caso de la Figura 2.73a se muestra la composición vectorial para obtener el valor eficaz de una corriente I , que tiene una componente de c.c. I_0 y un solo armónico I_1 . En la Figura 2.73b se explica la composición vectorial de una corriente con componente continua y dos armónicos. Continuando de este modo se puede interpretar la ecuación (2.222) como la hipotenusa de un triángulo rectángulo multidimensional, en el que cada cateto es el valor eficaz de los respectivos armónicos, tal como se señala en la Figura 2.73c.

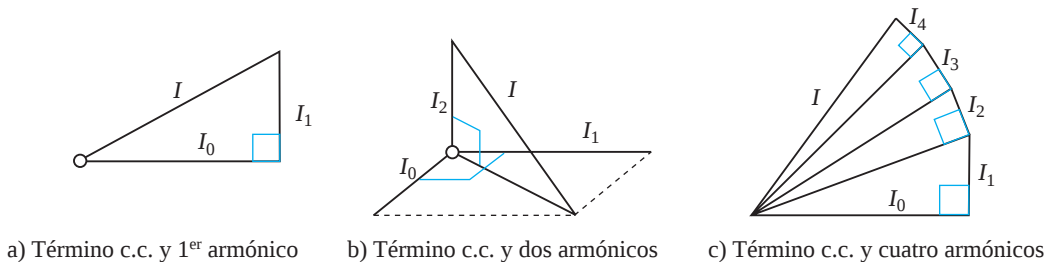


Figura 2.73 Composición geométrica para la determinación de los valores eficaces

Si se considera un circuito eléctrico al que se aplica una tensión periódica $u(t)$ y que absorbe una corriente periódica $i(t)$, definidas respectivamente por las expresiones (2.217) y (2.218), la potencia media o activa absorbida por el circuito, se define por la integral:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt \quad (2.223)$$

cuyo resultado es:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n \quad (2.224)$$

lo que significa que *la potencia activa es la suma de las potencias activas de los diferentes armónicos y que en el caso de la componente de c.c. es el producto $U_0 I_0$* . Debe destacarse que no hay contribuciones a la potencia activa de los armónicos de tensión y corriente que son de diferentes frecuencias, lo cual es consecuencia de la propiedad de ortogonalidad de las funciones coseno. En el caso de que las señales periódicas no tengan componentes de c.c., la expresión (2.224) se transforma en:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n \quad (2.225)$$

debe recordarse que U_n e I_n son los valores eficaces de las respectivas componentes armónicas de tensión y de corriente.

La definición de **potencia aparente** para funciones no sinusoidales, se define de un modo similar al que se emplea en régimen sinusoidal, y es el *producto de los valores eficaces de la tensión por la corriente*, que teniendo en cuenta (2.221) y (2.222) da lugar a:

$$S = UI = \sqrt{\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n^2\right)} \quad (2.226)$$

La definición de **factor de potencia** con señales periódicas, sinusoidales o no sinusoidales) se *define como el cociente entre la potencia activa y la potencia aparente* y se representa con la letra griega λ , es decir:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n}{\sqrt{\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n^2\right)}} \quad (2.227)$$

Respecto a la potencia reactiva Q , la definición y significado físico para tensiones y corrientes sinusoidales puras está claro y su expresión es $Q = UI \sin \varphi$. Sin embargo la definición de potencia reactiva para funciones periódicas no sinusoidales, no es un asunto simple ni trivial, siendo objeto en la actualidad de una gran controversia entre los ingenieros y científicos. Algunos autores para especificar esta potencia descomponen las corrientes armónicas en sus partes activa y reactiva y a partir de ellas proponen sus definiciones de potencias, otros científicos introducen previamente el concepto de potencia reactiva instantánea para definir luego las diversas potencias, y otros investigadores describen la **potencia reactiva** con señales periódicas no sinusoidales simplemente como una extrapolación del concepto clásico, es decir *como la suma de las potencias reactivas individuales producidas por los diferentes armónicos*. Eligiendo esta versión como más adecuada por sus ventajas pedagógicas (aunque se acepta que esta definición al igual que las otras no tiene una clara interpretación física), se puede escribir:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \quad (2.228)$$

Por analogía entre las ecuaciones (2.225) y (2.228), se considera que con la definición anterior, no hay contribuciones a la potencia reactiva de los armónicos de tensión y frecuencia que son de diferentes frecuencias. A diferencia con el caso sinusoidal puro, es importante señalar que, con señales no sinusoidales, la suma de los cuadrados de las potencias activas y reactivas no es igual al cuadrado de la potencia aparente, es decir:

$$S \neq \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (2.229)$$

y de hecho la *potencia no activa*, no es igual a la *potencia reactiva*. Es por ello que en los circuitos no sinusoidales se define una nueva potencia, denominada **potencia deformante** o **potencia de distorsión** D , mediante la siguiente expresión:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \quad (2.230)$$

La potencia anterior se mide, por analogía con la potencia reactiva, en *voltamperios de distorsión* (Vad o vad). De este modo la potencia aparente admite la siguiente representación vectorial:

$$S = iP + jQ + kD \quad (2.231)$$

en la expresión anterior los símbolos **i**, **j**, y **k** son los vectores unitarios a lo largo de los tres ejes de coordenadas cartesianas.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.24

Se tiene una red con una tensión no sinusoidal cuya frecuencia fundamental es de 50 Hz ($\omega \approx 314$ rad/s) y que obedece a la siguiente expresión instantánea:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 500 \cos(\omega t - 10^\circ) + \sqrt{2} \cdot 60 \cos(3\omega t - 15^\circ) + \sqrt{2} \cdot 20 \cos(5\omega t - 18^\circ) + \sqrt{2} \cdot 10 \cos(7\omega t - 20^\circ)$$

Esta red alimenta una carga formada por un circuito serie constituido por una resistencia de 100 ohmios y una inductancia de 0,1 henrios. Determinar: a) expresión de la corriente instantánea $i(t)$ que circula por la carga; b) tensión eficaz U y corriente eficaz I ; c) potencias aparente S , activa P y reactiva Q ; d) potencia de distorsión D .

Solución

a) La impedancia compleja de la carga para el armónico de orden n es de la forma:

$$\underline{Z}_n = R + j(nL\omega) = Z_n \angle \varphi_n$$

que da lugar a los siguientes valores:

$$\underline{Z}_0 = 100 \, \Omega; \quad \underline{Z}_1 = 100 + j0,1 \cdot 314 \approx 104,8 \angle 17,4^\circ \, \Omega; \quad \underline{Z}_3 = 100 + j0,1 \cdot 942 \approx 173,4 \angle 43,3^\circ \, \Omega;$$

$$\underline{Z}_5 = 100 + j0,1 \cdot 1.570 \approx 186,1 \angle 57,5^\circ \, \Omega; \quad \underline{Z}_7 = 100 + j0,1 \cdot 2.198 \approx 241,5 \angle 65,5^\circ \, \Omega$$

por consiguiente los valores de las diversas corrientes armónicas de acuerdo con (2.219) son:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{550 \angle -10^\circ}{104,8 \angle 17,4^\circ} = 5,25 \angle -27,4^\circ; \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{60 \angle -15^\circ}{173,4 \angle 43,3^\circ} = 0,346 \angle -58,3^\circ;$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_5}{\underline{Z}_5} = \frac{20 \angle -18^\circ}{186,1 \angle 57,5^\circ} = 0,107 \angle -75,5^\circ; \quad \underline{I}_7 = \frac{\underline{U}_7}{\underline{Z}_7} = \frac{10 \angle -20^\circ}{241,5 \angle 65,5^\circ} = 0,041 \angle -85,5^\circ$$

y por ello la corriente instantánea $i(t)$ de la carga es:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 5,25 \cos(\omega t - 27,4^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,346 \cos(3\omega t - 58,3^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,107 \cos(5\omega t - 75,5^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,041 \cos(7\omega t - 85,5^\circ)$$

b) Los valores de la tensión y de la corriente eficaz son de acuerdo con (2.203) y (2.204):

$$U = \sqrt{\sum_{n=1}^7 U_n^2} = \sqrt{550^2 + 60^2 + 20^2 + 10^2} = 553,7 \, \text{V}$$

$$I = \sqrt{\sum_{n=1}^7 I_n^2} = \sqrt{5,25^2 + 0,346^2 + 0,107^2 + 0,041^2} = 5,26 \, \text{A}$$

c) El valor de la potencia aparente de acuerdo con (2.226) es:

$$S = U \cdot I = 553,7 \cdot 5,26 = 2.912,5 \text{ VA}$$

y las potencias activas y reactivas teniendo en cuenta (2.225) y (2.228) son respectivamente:

$$P = \sum_{n=1}^7 U_n I_n \cos \varphi_n = 550 \cdot 5,25 \cdot \cos 17,4^\circ + 60 \cdot 0,346 \cdot \cos 43,3^\circ + \\ + 20 \cdot 0,107 \cdot \cos 57,5^\circ + 10 \cdot 0,041 \cdot \cos 65,5^\circ = 2.772 \text{ W}$$

$$Q = \sum_{n=1}^7 U_n I_n \sin \varphi_n = 550 \cdot 5,25 \cdot \sin 17,4^\circ + 60 \cdot 0,346 \cdot \sin 43,3^\circ + \\ + 20 \cdot 0,107 \cdot \sin 57,5^\circ + 10 \cdot 0,041 \cdot \sin 65,5^\circ \approx 880 \text{ VAr}$$

El lector puede comprobar que la potencia activa anterior coincide con la potencia disipada en la resistencia de carga, es decir:

$$P = RI^2 = 100 \cdot 5,26^2 = 2.770 \text{ W } (\approx 2.772 \text{ W, errores de redondeo})$$

d) El valor de la potencia de distorsión de acuerdo (2.212) es:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{2.912,5^2 - 2.772^2 - 880^2} = 155,8 \text{ VAd}$$

■ 2.17.4. Circuitos eléctricos con tensión sinusoidal y corriente no sinusoidal

En muchos casos prácticos, sobre todo en lo que se refiere a las aplicaciones de la electrónica de potencia donde se utilizan variadores de velocidad u otro tipo de convertidores electrónicos, la tensión de alimentación (red) es prácticamente sinusoidal y solamente existen armónicos puros de corriente (es decir que no tienen una componente de c.c). En estas condiciones, la tensión de la red tiene únicamente un valor eficaz $U = U_1$. En estas circunstancias y teniendo en cuenta las expresiones (2.225) y (2.228), solamente hay aportaciones a las potencias activas y reactivas a la frecuencia fundamental (primer armónico), y los valores correspondientes son:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} U_1 I_n \cos \varphi_n = U I_1 \cos \varphi_1 = P_1$$

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n = U I_1 \sin \varphi_1 = Q_1$$
(2.232)

donde I_1 es el valor eficaz del fundamental de corriente (de pulsación igual a la correspondiente a la tensión de la red). El ángulo φ_1 es el desfase entre la tensión sinusoidal de la red y el primer armónico o fundamental de la corriente y que se denomina **ángulo de des-**

plazamiento. Por otro lado en estos casos el valor de la potencia aparente, teniendo en cuenta (2.226), es ahora:

$$S = UI = \sqrt{\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n^2\right)} \approx U \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2\right)} \quad (2.233)$$

Esta simplificación proporciona una expresión matemática relativamente sencilla para la potencia de distorsión señalada en (2.230), que al tener en cuenta las ecuaciones (2.232) y (2.233) da lugar a:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = U \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2\right) - I_1^2} = U \sqrt{\left(\sum_{n=2}^{\infty} I_n^2\right)} = UI_H \quad (2.234)$$

Donde se ha llamado **corriente total armónica** I_H a la raíz cuadrada del sumatorio de las corrientes armónicas a partir de $n = 2$. En la Figura 2.74 se muestra el tetraedro de potencias para estas situaciones concretas. Obsérvese que OM es la potencia activa del armónico fundamental, el segmento MN es la potencia reactiva del armónico fundamental, por lo que el segmento ON es la potencia aparente fundamental. El ángulo φ_1 entre P_1 y S_1 es el ángulo de desplazamiento del armónico fundamental, cuyo coseno se denomina **factor de potencia de desplazamiento**:

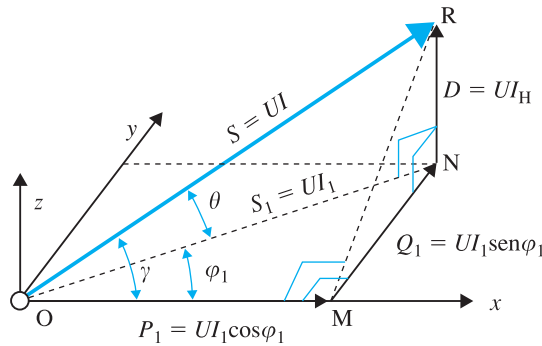


Figura 2.74 Potencias en circuitos con tensión sinusoidal y corriente no sinusoidal

Por otro lado, el factor de potencia definido en (2.227) es ahora igual a:

$$\lambda = \frac{P_1}{S} = \frac{UI_1 \cos \varphi_1}{UI} = \frac{I_1}{I} \cos \varphi_1 = \frac{I_1}{\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2\right)}} \cos \varphi_1 \quad (2.235)$$

y que en el gráfico de la Figura 2.74 se identifica como el coseno del ángulo γ , es decir se cumple $\lambda = \cos \gamma$. Se denomina **factor de distorsión** F_d al cociente entre el valor eficaz del armónico fundamental de corriente y el valor eficaz de la corriente:

$$F_d = \frac{I_1}{\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2\right)}} = \frac{I_1}{I} = \frac{S_1}{S} \quad (2.236)$$

lo que permite identificar al factor anterior como el coseno del ángulo θ señalado en la Figura 2.74, es decir $F_d = \cos \theta$. En consecuencia, según (2.235) y (2.236), se puede escribir:

$$\lambda = F_d \cos \varphi_1 \quad (2.237)$$

Es decir, el factor de potencia λ es igual al producto del factor de distorsión por el *factor de desplazamiento* $\cos \varphi_1$ (este último es en definitiva el f.d.p. del primer armónico).

Se denomina **Tasa de distorsión armónica total THD (Total Harmonic Distortion)** a la relación entre la *potencia aparente de los armónicos superiores al fundamental (para $n \geq 2$)* y la *potencia aparente del fundamental*. Teniendo en cuenta que suponemos la tensión sinusoidal, su valor es:

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{n=2}^{\infty} I_n^2\right)}}{I_1} = \frac{I_H}{I_1} \quad (2.238)$$

De acuerdo con la expresión anterior, la THD de una onda de corriente sin armónicos es igual a cero. Debe destacarse que con nuestras simplificaciones, la potencia aparente de los armónicos superiores al fundamental es según (2.234) el valor de la potencia de distorsión D , por lo que analizando la Figura 2.74, la THD es la tangente del ángulo θ . En consecuencia se puede escribir:

$$F_d = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\text{THD})^2}} \quad (2.239)$$

lo que permite relacionar el factor de distorsión F_d con la tasa de distorsión THD y si se sustituye la expresión anterior en (2.237) se obtiene:

$$\lambda = \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{1 + (\text{THD})^2}} \quad (2.240)$$

Que relaciona el factor de potencia λ con el factor de desplazamiento $\cos \varphi_1$ y la tasa de distorsión armónica THD. Una consecuencia que se puede obtener de (2.240) es que las cargas monofásicas equipadas con convertidores electrónicos como son los ordenadores personales, fax, y otros equipos, suelen tener altas corrientes de distorsión armónica y debido a ello el factor de potencia real λ es generalmente inferior a 0,707, pese a tener factores de potencia de desplazamiento ($\cos \varphi_1$) muy cercanos a la unidad.

Debe señalarse también que la distorsión armónica no se puede compensar con condensadores en paralelo, como se hace vulgarmente para corregir el factor de potencia de las instalaciones. Con los condensadores solamente se puede corregir el factor de potencia de desplazamiento $\cos \varphi_1$. Conviene destacar este hecho especialmente en aquellas instalaciones que tienen cargas electrónicas monofásicas, que suelen tener altos factores de potencia de desplazamiento pero con bajos factores de potencia λ . En estos casos, el colocar condensadores en paralelo suele empeorar el factor de potencia, debido a la aparición de resonancias en los niveles de armónicos elevados. Una solución más eficaz suele ser añadir filtros activos o pasivos para anular los armónicos producidos por las cargas no lineales del receptor.

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 2.25**

Se tiene una red con una tensión instantánea de la forma $u(t) = U_m \cos \omega t = \sqrt{2} \cdot 100 \cos \omega t$ (la frecuencia es de 50 Hz) y la corriente que suministra la red a una carga no lineal es de la forma:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 5 \cos(\omega t - 25^\circ) + \sqrt{2} \cdot 3 \cos(3\omega t - 36^\circ) + \sqrt{2} \cdot 1,5 \cos(5\omega t - 48^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,5 \cos(7\omega t - 62^\circ)$$

Calcular: a) potencia activa, reactiva y aparente debidas al primer armónico de corriente; b) corriente eficaz I y corriente armónica I_H ; c) potencias aparentes y armónicas suministradas por la red; d) factor de desplazamiento, factor de potencia y factor de distorsión; e) tasa de distorsión armónica THD.

Solución

a) Las potencias activa, reactiva y aparente del primer armónico de corriente son respectivamente:

$$P = P_1 = UI_1 \cos \varphi_1 = 100 \cdot 5 \cdot \cos 25^\circ = 453,2 \text{ W} ; Q = Q_1 = UI_1 \sin \varphi_1 = 100 \cdot 5 \cdot \sin 25^\circ = 211,3 \text{ VAR}$$

$$S_1 = UI_1 = 100 \cdot 5 = 500 \text{ W}$$

b) El valor de la corriente eficaz es:

$$I = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2} = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1,5^2 + 0,5^2} = 6,04 \text{ A}$$

y el de la corriente armónica es:

$$I_H = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} I_n^2} = \sqrt{3^2 + 1,5^2 + 0,5^2} = 3,39 \text{ A}$$

c) Los valores de las potencias aparente y armónica son respectivamente:

$$S = U \cdot I = 100 \cdot 6,04 = 604 \text{ VA}$$

$$D = U \cdot I_H = 100 \cdot 3,39 = 339 \text{ VAd}$$

d) El factor de desplazamiento es el f.d.p. del primer armónico, es decir $\cos \varphi_1 = \cos 25^\circ = 0,906$. Los factores de potencia y de distorsión son de acuerdo con (2.235) y (2.236):

$$\lambda = \frac{P_1}{S} = \frac{453,2}{604} = 0,75$$

$$F_d = \frac{S_1}{S} = \frac{500}{604} = 0,828$$

e) La tasa de distorsión armónica viene expresada por (2.238) y su valor es:

$$\text{THD} = \frac{I_H}{I_1} = \frac{3,39}{5} = 0,678$$



Comentarios prácticos

1) Normativas sobre armónicos: Debido al fuerte impacto que supone la utilización de convertidores electrónicos, en la generación de armónicos en las instalaciones eléctricas, la Comisión Electrotécnica Internacional elaboró ya en 1982 un primer borrador de una norma, conocida como estándar IEC-555, que actualmente se llama Norma IEC 61000:3. De acuerdo con esta norma se obliga a una limitación de las amplitudes de los diversos armónicos, dando una tabla con los valores máximos permitidos. Esta Norma está aprobada por el IRANOR y en España se llama Norma UNE-EN 61000-4-13:2003/11:2010 titulada: «*Compatibilidad electromagnética (CEM). Parte 4-13: Técnicas de ensayo de medida. Ensayos de inmunidad a baja frecuencia de armónicos e interarmónicos incluyendo las señales transmitidas en los accesos de alimentación de corriente alterna*». El IEEE (*Institute of Electrical and Electronic Engineers*, Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos, una organización mundial con sede en EE.UU), publicó en 1993 el IEEE/ANSI Standard 519, que es una guía para control de armónicos y compensación de reactiva de los convertidores estáticos de potencia (*IEEE Guide for Harmonic Control and Reactive Compensation of Static Power Converters*), en la que la limitación de armónicos se basa en la relación entre la componente fundamental de la corriente de carga y la corriente de cortocircuito en el punto de conexión a la red. Esta guía señala una limitación de armónicos análoga a la IEC-555 (actual IEC 61000), pero amplía su campo a cargas de gran potencia alimentadas por redes de alta tensión.

2) Problemas de armónicos en instalaciones: Los equipos de electrónica de potencia que cada vez se utilizan con más frecuencia en las instalaciones con motores de cargas variables, las fuentes de alimentación conmutadas de los ordenadores, los balastos electrónicos de los diferentes tipos de lámparas de descarga, la soldadura por arco eléctrico, los hornos de arco, etc. son cargas perturbadoras, que influyen en la calidad de onda de la red. Debe evitarse por ello tanto la producción como la transmisión de perturbaciones, para lo cual es conveniente que los arrancadores electrónicos de motores sean suaves y escalonados. Es también importante la utilización de compensadores estáticos que reduzcan las fuertes oscilaciones de las corrientes en las cargas. Se recomienda también una alimentación eléctrica independiente de los receptores generadores de armónicos y la instalación de filtros antiarmónicos, sintonizados a las frecuencias apropiadas, para mejorar la calidad de la onda de la red. Hasta hace poco tiempo, un problema frecuente en las instalaciones de baja tensión de oficinas con gran número de ordenadores, es que se producían disparos intempestivos de los interruptores de protección contra corrientes de defecto, conocidos vulgarmente como **interruptores diferenciales**, lo cual se debía a las fuentes de alimentación conmutadas de los propios ordenadores, que producían armónicos y que los interruptores diferenciales lo interpretaban como una fuga («la corriente de fuga» de cada ordenador era de 2 a 3 mA, por lo que con 10 o 15 máquinas se tenían los 30 mA, que es el valor asignado de la corriente de defecto a la que tiene que disparar el diferencial). Este problema obligaba al instalador a separar las zonas de protección de cada diferencial y limitar el número de ordenadores conectados a cada línea. Afortunadamente esta situación ya está resuelta, porque actualmente ya existen en el mercado **interruptores diferenciales superinmunizados**, que incorporan filtros de alta frecuencia, discriminando un defecto real, del problema de existencia de armónicos, con lo cual se evitan los disparos intempestivos de los diferenciales clásicos.

3) Instrumentos de medida de verdadero valor eficaz (*true r.m.s.*): Para medir tensiones y corrientes alternas en las instalaciones eléctricas, se utilizan voltímetros y amperímetros. La lectura que proporcionan estos aparatos de medida de c.a. (bien sean analógicos o digitales) es el valor eficaz de la magnitud correspondiente. De acuerdo con el principio físico de funcionamiento, estos aparatos se dividen en dos tipos: a) instrumentos de verdadero valor eficaz y b) instrumentos de no verdadero valor eficaz. Los aparatos de medida de verdadero valor eficaz señalan el valor eficaz de la señal que miden, independientemente de su forma de onda, bien sea sinusoidal, cuadrada, triangular, etc., a este grupo pertenecen por ejemplo los instrumentos electrodinámicos de hierro móvil, térmicos y otros. Sin embargo los instrumentos de no verdadero valor eficaz tienen un principio de funcionamiento por el cual responden, no al valor eficaz de la magnitud que miden, sino generalmente a su valor medio (y en algunos casos al valor máximo), pese a que la lectura que señalan en la escala sea el valor eficaz, esto es así porque están calibrados únicamente para señales sinusoidales en las que la relación entre el valor medio y el eficaz está bien definida. Por ejemplo los instrumentos de bobina móvil (que son los clásicos empleados para medir magnitudes de c.c.) se emplean también en c.a. a base de incluir en su interior un rectificador, por lo que estos aparatos dan una desviación proporcional al valor medio de la señal que miden, y para que señale valores eficaces se prepara en fábrica una corrección de su escala. Evidentemente este último tipo de instrumentos no son adecuados para medir valores eficaces de señales no sinusoidales porque no están calibrados para ello y es por esto que son instrumentos de no verdadero valor eficaz. En consecuencia debe advertirse que si se emplean este tipo de aparatos de medida en instalaciones eléctricas en las que existan armónicos, se pueden cometer graves errores de lectura, ya que estos instrumentos suelen medir del orden de un 30 % menos que el valor eficaz verdadero.



Problemas

- 2.1. Hallar la suma de las tensiones: $u_1 = 50\sqrt{2} \cos(\omega t - 150^\circ)$; $u_2 = 200\sqrt{2} \sin(\omega t + 50^\circ)$. Expresar la suma como una función coseno y también como seno.

[Res. $188,4\sqrt{2} \cos(\omega t - 54,41^\circ)$; $188,4\sqrt{2} \sin(\omega t + 35,59^\circ)$]

- 2.2. En el circuito de la Figura P.2.1, el valor de u_g es $u_g(t) = 120\sqrt{2} \cos 400t$ y la corriente $i(t)$ está adelantada 45° respecto de la tensión. Calcular el valor de la resistencia R y la d.d.p. instantánea en bornes de cada elemento pasivo.

[Res. $R = 40 \Omega$; $u_R = 120 \cos(400t + 45^\circ)$; $u_L(t) = 30 \cos(400t + 135^\circ)$; $u_C(t) = 150 \cos(400t - 45^\circ)$]

- 2.3. En el circuito de la Figura P.2.2, los valores de u_g e i son: $u_g(t) = 10\sqrt{2} \cos 10t$; $i(t) = 10\sqrt{2} \cos 10t$. Calcular el valor de la impedancia Z .

[Res. Z es la asociación en serie de una resistencia de 1Ω con una inductancia de $0,1 \text{ H}$]

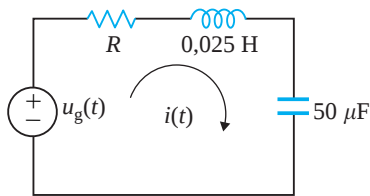


Figura P.2.1

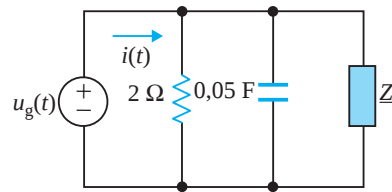


Figura P.2.2

- 2.4. En el circuito de la Figura P.2.3, los generadores de tensión tienen el mismo valor instantáneo dado por la ecuación: $u_{g1} = u_{g2} = 10\sqrt{2} \cos t$. Calcular por el método de las corrientes de malla, la corriente $i(t)$ que circula por la bobina de 4 henrios.

[Res. $i(t) = 2\sqrt{2} \cos(t + 90^\circ)$]

- 2.5. Calcular por el método de los nudos la tensión instantánea u_{AD} en el circuito de la Figura P.2.4, si los valores instantáneos de los generadores son: $u_{g1}(t) = 10\sqrt{2} \cos(10t + 90^\circ)$; $i_{g2}(t) = 10\sqrt{2} \cos 10t$.

[Res. $u_{AD} = 10 \cos(10t + 45^\circ)$]

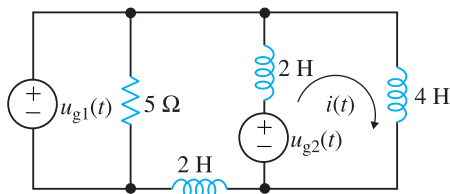


Figura P.2.3

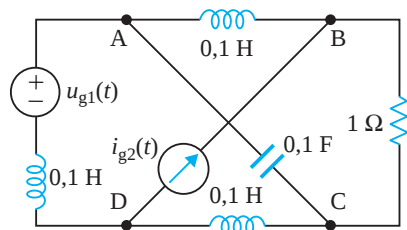


Figura P.2.4

- 2.6. En el circuito de la Figura P.2.5, calcular la corriente instantánea $i(t)$ aplicando el teorema de Thévenin.

[Res. $\underline{E}_{Th} = 40 \angle 90^\circ$; $\underline{Z}_{Th} = 1 + j1 \Omega$; $i(t) = 10 \cos(t + 135^\circ)$]

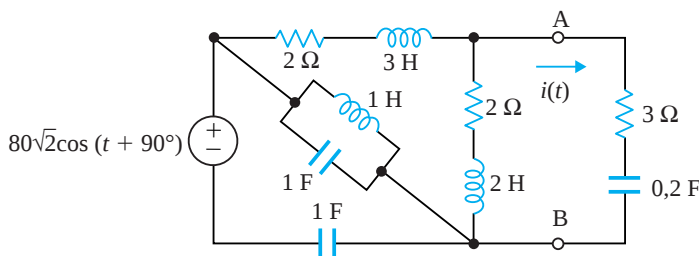


Figura P.2.5

- 2.7. La Figura P.2.6 representa una red que trabaja con una frecuencia $f = 10/2\pi$, y tiene dos terminales accesibles desde el exterior A y B. Se efectúan dos medidas: a) cuando se conecta entre los terminales un condensador de 0,1 faradios, la tensión en este tiene una magnitud de 50 voltios; b) cuando se conecta a una inductancia de 0,1 henrios, la corriente que circula a través de ella es de $50/\sqrt{2}$ amperios, observando que esta corriente se adelanta 45° a la tensión que existía entre A y B cuando se conectó el condensador. Calcular el circuito equivalente de Thévenin de la red que tenga sentido físico.

[Res. $|U_{Th}| = 100 \text{ V}$; $Z_{Th} = \text{resistencia de } 2 \Omega \text{ en serie con una inductancia de } 0,1 \text{ H}$]

- 2.8. El circuito de la Figura P.2.7 se conecta a una red monofásica con una tensión eficaz de 100 V, absorbiendo una potencia activa de 400 W y una potencia reactiva de 400 VAR. Si la magnitud de la d.d.p. en bornes de la resistencia R_2 es de 60 V. Calcular: a) valores de R_1 , R_2 y X_2 ; b) magnitudes de las corrientes I_1 e I_2 .

[Res. 1) $R_1 = 100 \Omega$; $R_2 = 12 \Omega$; $X_2 = 16 \Omega$; 2) $|I_1| = 1 \text{ A}$; $|I_2| = 5 \text{ A}$]

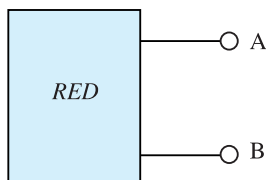


Figura P.2.6

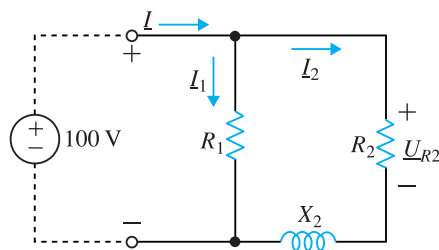


Figura P.2.7

- 2.9. En el circuito de la Figura P.2.8, se sabe que la magnitud de la impedancia $\underline{Z}$ es de 5Ω y que absorbe una potencia activa de 2.904 W. La potencia activa suministrada por el generador es de 4.840 W. Calcular: a) impedancia $\underline{Z}$; b) inductancia L si la tensión eficaz del generador es de 220 V, con $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

[Res. a) $R = 3 \Omega$; $X = 4 \Omega$; b) $L = 0,1 \text{ henrios}$]

- 2.10.** En el circuito de la Figura P.2.9, el generador tiene una tensión de 500 V y sabemos que entrega al circuito una corriente de 20 A con f.d.p. inductivo. La potencia media absorbida por el circuito es de 8 kW y la magnitud de la tensión entre B y C es de 500 V. Calcular los valores de R_1 , L_1 y C_2 .

[Res. $R_1 = 160 \Omega$; $L_1 = 12$ henrios; $C_2 = 5.000 \mu\text{F}$]

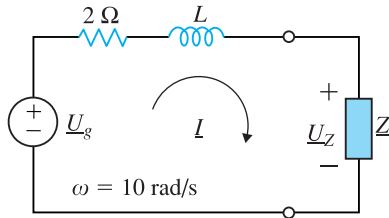


Figura P.2.8

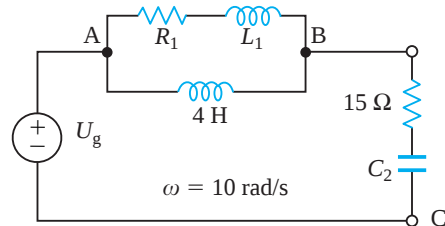


Figura P.2.9

- 2.11.** En el circuito de la Figura P.2.10, el generador de tensión tiene un valor instantáneo: $u_g(t) = 100\sqrt{2} \cos t$ voltios. Calcular: a) tensión instantánea $u_{CD}(t)$ en bornes de la impedancia $\underline{Z}_L$; b) valor de la impedancia $\underline{Z}_L$ para que la tensión en bornes de L_2 sea cero; c) potencia compleja suministrada por el generador en las condiciones del apartado anterior.

[Res. a) $u_{CD} = 100\sqrt{2} \cos(t + 180^\circ)$; b) $\underline{Z}_L = -j0,5 \Omega$; c) $S = 0 + j20.000$]

- 2.12.** En el circuito de la Figura P.2.11, los valores de las tensiones de los generadores son: $u_{g1} = 100\sqrt{2} \cos 100t$; $u_{g2} = 100\sqrt{2} \cos(100t + \alpha)$. Calcular: a) fase α del generador u_{g2} si se sabe que entrega al circuito una potencia activa de 100 W; b) potencia compleja suministrada por el generador u_{g1} al circuito.

[Res. a) $\alpha = 90^\circ$; b) $-20 + j120$]

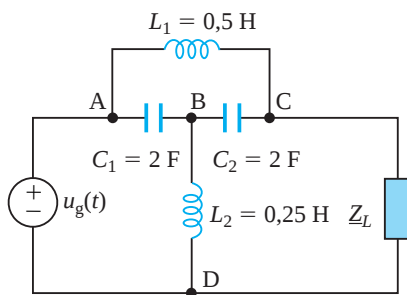


Figura P.2.10

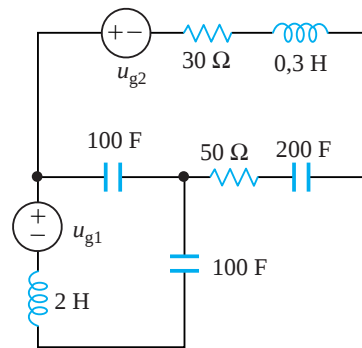


Figura P.2.11

- 2.13.** En el circuito de la Figura P.2.12, los valores instantáneos de los generadores son: $u_{g1} = 8 \cos(t + 45^\circ)$; $i_{g2} = 8\sqrt{2} \cos t$; $u_{g3} = 8 \cos(t + 45^\circ)$. Calcular: a) valor instantáneo de la corriente $i(t)$ del circuito; b) potencia activa, reactiva y aparente entregadas por el generador u_{g1} al circuito.

[Res. a) $i(t) = 4 \cos(t + 90^\circ)$; b) $P_{g1} = 16 \text{ W}$; $Q_{g1} = -16 \text{ VAR}$; $S = 16\sqrt{2} \text{ VA}$]

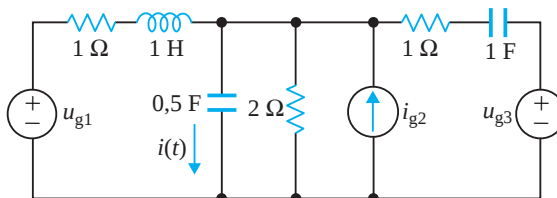


Figura P.2.12

- 2.14.** En el circuito de la Figura P.2.13, los valores instantáneos de los generadores son: $u_{g1} = 20\sqrt{2} \cos 100t$; $u_{g2} = 8 \cos(100t + 45^\circ)$; $i_{g3} = 20\sqrt{2} \sin 100t$. Calcular: a) diferencia de potencial instantánea en bornes de la resistencia de 2Ω ; b) potencia activa y reactiva suministrada por el generador de tensión u_{g2} al circuito.

[Res. a) $u_{DF} = 4\sqrt{2} \cos 100(t + 90^\circ)$; b) $P_{g2} = +40 \text{ W}$; $Q_{g2} = -136 \text{ VAR}$]

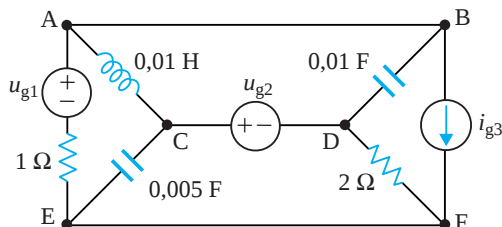


Figura P.2.13

- 2.15.** Calcular en el circuito de la Figura P.2.14: a) d.d.p. instantánea entre los nudos B y D; b) potencias complejas suministradas por los generadores; c) potencias complejas en los elementos pasivos del circuito. Compruébese el balance de potencias en la red.

[Res. a) $u_{BD} = 10\sqrt{2} \cos(10t - 90^\circ)$ voltios; b) $\underline{S}_1 = -100 + j100$; $\underline{S}_2 = +j400$; $\underline{S}_3 = 500 + j200$; c) $\underline{S}(1 \Omega) = 200 \text{ W}$; $\underline{S}(2 \Omega) = 200 \text{ W}$; $\underline{S}(j2 \Omega) = +j1.600 \text{ VAR}$; $\underline{S}(j1 \Omega) = +j100 \text{ VAR}$; $\underline{S}(-j2 \Omega) = -j1.000 \text{ VAR}$; $\underline{S}_{\text{gen}} = \underline{S}_{\text{recept}} = 400 \text{ W} + j700 \text{ VAR}$]

- 2.16.** Calcular la d.d.p. instantánea entre los nudos A y B del circuito de la Figura P.2.15. ¿Qué potencias activas suministran los generadores al circuito? ¿Dónde se disipan estas potencias? Compruébese.

[Res. $u_{AB} = 10 \cos(100t + 135^\circ)$ voltios; $P_{g1} = 0 \text{ W}$; $P_{g2} = 50 \text{ W}$; $P_{g3} = 100 \text{ W}$. Las potencias se disipan en las resistencias: $P_{CB}(1 \Omega) = 25 \text{ W}$; $P_{AD}(1 \Omega) = 125 \text{ W}$]

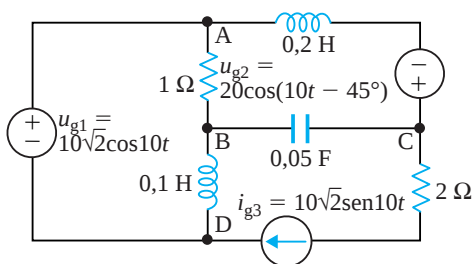


Figura P.2.14

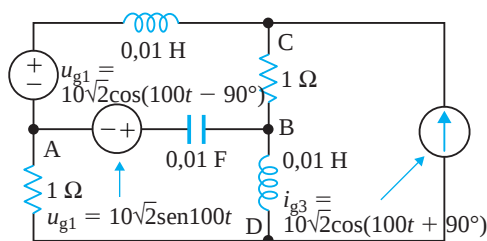


Figura P.2.15

- 2.17.** En la red de c.a. de la Figura P.2.16, los valores instantáneos de los generadores son: $u_{g1} = 10\sqrt{2} \cos 100t$ voltios; $i_{g2} = 20\sqrt{2} \sin 100t$ amperios. Calcular: a) corriente instantánea que circula por la rama BC; b) potencias activas y reactivas suministradas por los generadores al circuito.

[Res. a) $i_{BC}(t) = 20 \cos(100t + 45^\circ)$; b) $P_{g1} = -60 \text{ W}$; $Q_{g1} = +200 \text{ VAR}$; $P_{g2} = 320 \text{ W}$; $Q_{g2} = 0 \text{ VAR}$]

- 2.18.** En el circuito de la Figura P.2.17, los valores instantáneos de los generadores son: $u_{g1} = 40\sqrt{2} \sin 10t$ voltios; $i_{g2} = 10\sqrt{2} \cos 10t$ amperios. Calcular: a) d.d.p. instantánea entre los nudos A y D; b) potencias activas y reactivas suministradas por los generadores al circuito.

[Res. a) $u_{AD} = 40 \cos(10t + 135^\circ)$; b) $P_{g1} = 800 \text{ W}$; $Q_{g1} = 800 \text{ VAR}$; $P_{g2} = 900 \text{ W}$; $Q_{g2} = -400 \text{ VAR}$]

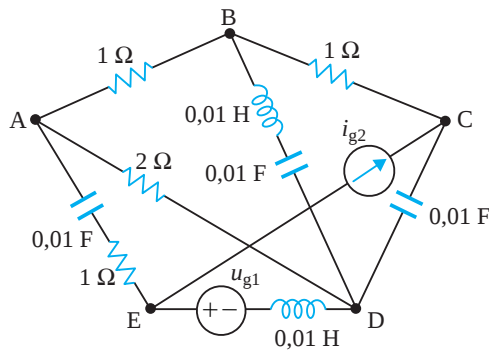


Figura P.2.16

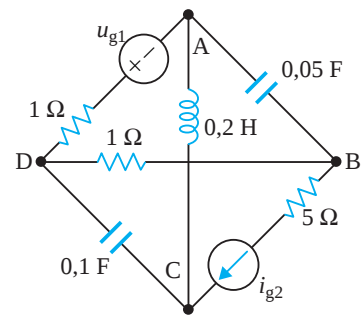


Figura P.2.17

- 2.19.** Calcular en el circuito de la Figura P.2.18: a) potencias complejas suministradas por los generadores; b) potencias activas y reactivas en los elementos pasivos. Compruébese el balance de potencia en el circuito.

[Res. a) $\underline{S}_{g1} = 100 + j0$; $\underline{S}_{g2} = 0 + j200$; $\underline{S}_{g3} = 200 + j0$; b) $P_{BC}(1 \Omega) = 100 \text{ W}$; $P_{AD}(1 \Omega) = 200 \text{ W}$; $Q_{AB}(0.1 \text{ H}) = +100 \text{ VAR}$; $Q_{CD}(0.1 \text{ H}) = +200 \text{ VAR}$; $Q_{AC}(0.1 \text{ F}) = -100 \text{ VAR}$. Se comprueba que $\underline{S}_{\text{gen}} = 300 + j200 = \underline{S}_{\text{recept}} = \sum P_i + j \sum Q_i$]

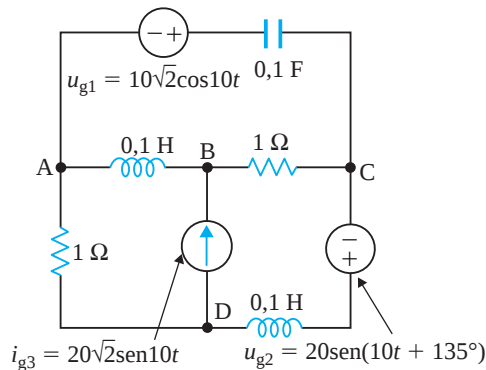


Figura P.2.18

- 2.20.** En el circuito de la Figura P.2.19, los valores instantáneos de los generadores son: $u_{g1} = 10\sqrt{2} \cos 10t$; $u_{g2} = 10 \cos (10t + 45^\circ)$; $i_{g3} = 20 \sin (10t + 135^\circ)$; $i_{g4} = 10\sqrt{2} \sin 10t$. Calcular: a) d.d.p. instantánea entre los nudos A y B; b) potencia activa y reactiva suministrada por u_{g1} .

[Res. a) $u_{AB} = 5\sqrt{2} \cos (10t + 90^\circ)$; b) $P_{g1} = 50 \text{ W}$; $Q_{g1} = +100 \text{ VAR}$]

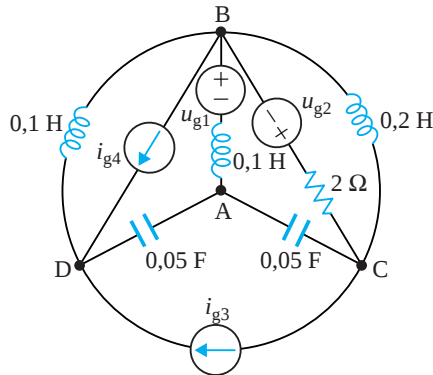


Figura P.2.19

- 2.21.** En el circuito de la Figura P.2.20, los valores instantáneos de los generadores son: $u_1 = 5\sqrt{2} \cos 10t$ voltios; $i_2 = 10\sqrt{2} \sin 10t$ amperios; $u_3 = 4 \cos (10t - 45^\circ)$ voltios. Calcular: a) d.d.p. instantánea entre los nudos A y D; b) potencia activa, reactiva y aparente suministrada por el generador u_1 al circuito.

[Res. a) $u_{AD} = \sqrt{2} \cos 10t$; b) $P_1 = 10 \text{ W}$; $Q_1 = 40 \text{ VAR}$; $S_1 = 41,23 \text{ VA}$]

- 2.22.** En el circuito eléctrico de c.a. de la Figura P.2.21, los valores instantáneos de los generadores son: $i_1 = 10\sqrt{2} \cos 10t$; $i_2 = 10\sqrt{2} \cos (10t + 90^\circ)$; $u_3 = 10 \cos (10t - 45^\circ)$; $u_4 = 5\sqrt{2} \sin 10t$. Calcular las potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por los generadores.

[Res. $P_1 = 100 \text{ W}$; $Q_1 = -100 \text{ VAR}$; $S_1 = 100\sqrt{2} \text{ VA}$; $P_2 = 200 \text{ W}$; $Q_2 = 0$; $S_2 = 200 \text{ VA}$; $P_3 = 25 \text{ W}$; $Q_3 = -25 \text{ VAR}$; $S_3 = 25\sqrt{2} \text{ VA}$; $P_4 = 50 \text{ W}$; $Q_4 = 25 \text{ W}$; $S_4 = 55,9 \text{ VA}$]

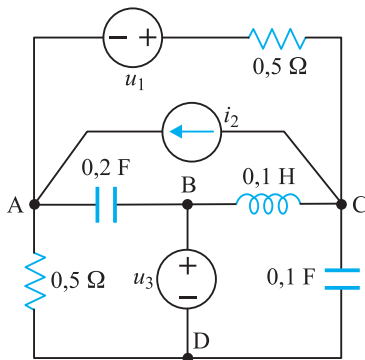


Figura P.2.20

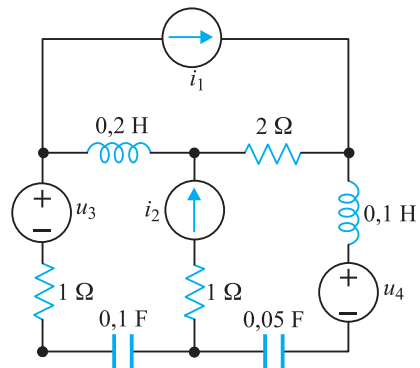


Figura P.2.21

- 2.23.** En el circuito eléctrico de la Figura P.2.22, se pide: a) d.d.p. instantánea entre los nudos A y B; b) potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por los generadores.

[Res. a) $u_{AB} = 10 \cos(10t - 135^\circ)$; b) $P_a = 350 \text{ W}$; $Q_a = 50 \text{ VAR}$; $S_a = 353,55 \text{ VA}$; $P_b = 0$; $Q_b = 100 \text{ VAR}$; $S_b = 100 \text{ VA}$; $P_c = 600 \text{ W}$; $Q_c = 0$; $S_c = 600 \text{ VA}$]

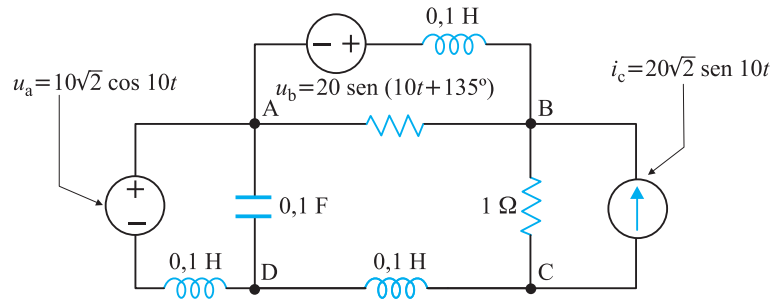


Figura P.2.22

- 2.24.** En el circuito de la Figura P.2.23, el módulo de la f.e.m. del generador de tensión es de 100 V. La potencia activa suministrada por el generador es de 1.000 W y el módulo de la corriente $\underline{I}$ es $10\sqrt{2}$ amperios, de carácter inductivo. a) Calcular el valor complejo de la impedancia $\underline{Z}_1$; b) ¿cuál es la magnitud de la d.d.p. existente entre los nudos A y B?; c) tomando la tensión $\underline{U}_{AB}$ como vector de referencia, calcular las expresiones complejas de las corrientes $\underline{I}_1$ e $\underline{I}_2$; d) de acuerdo con la referencia anterior ¿cuáles son los valores de las fases α y β ?

[Res. a) $\underline{Z}_1 = -j5$; b) $|\underline{U}_{AB}| = 100 \text{ V}$; c) $\underline{I}_1 = +j20$; $\underline{I}_2 = 10 - j10$; d) $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 45^\circ$]

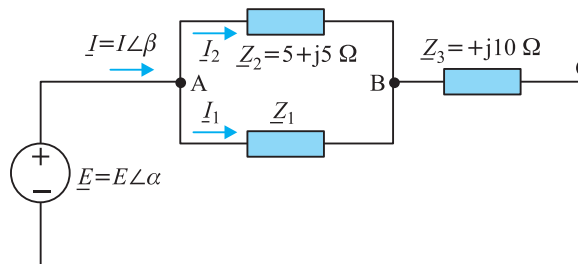


Figura P.2.23

- 2.25.** En el circuito de la Figura P.2.24, los valores instantáneos de los generadores son: $i_1 = 10\sqrt{2} \sin 100t$ amperios; $i_2 = 10\sqrt{2} \cos 100t$ amperios; $u = 1.000\sqrt{2} \cos 100t$ voltios. Calcular: a) corriente instantánea i_a que circula por el generador de tensión; b) potencia activa, reactiva y aparente suministrada por el generador de corriente i_2 .

[Res. a) $i_a = 10\sqrt{2} \cos(100t + 180^\circ)$; b) $P = +10 \text{ kW}$; $Q = +10 \text{ kVAR}$; $S = 10\sqrt{2} \text{ VA}$]

- 2.26.** En el circuito de la Figura P.2.25, los valores instantáneos de los generadores son: $u_1 = 10\sqrt{2} \cos 10t$ voltios; $u_2 = 10\sqrt{2} \sin 10t$ voltios; $i = 20 \cos(10t + 45^\circ)$ amperios. Calcular: a) d.d.p. instantánea en-

tre los nudos A y B; b) potencia compleja suministrada por el generador de corriente al circuito; c) potencia disipada en la resistencia de $1\ \Omega$.

[Res. a) $u_{AB} = 10\sqrt{2} \cos(10t + 90^\circ)$; b) $\underline{S} = 200 + j100$; c) $P(1\ \Omega) = 250\ \text{W}$]

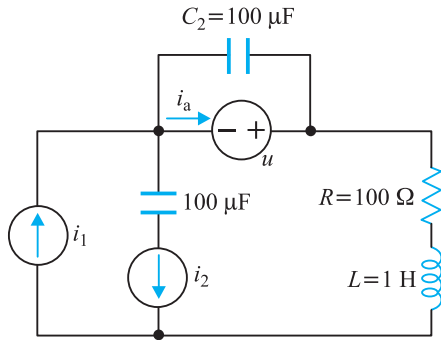


Figura P.2.24

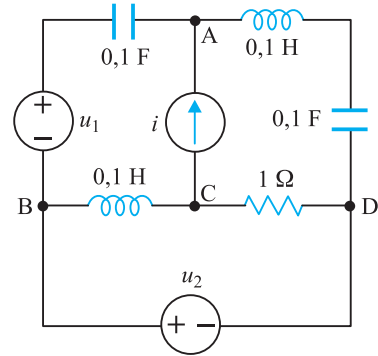


Figura P.2.25

- 2.27.** En el circuito de la Figura P.2.26, los valores instantáneos de los generadores de tensión son: $u_1 = 10\sqrt{2} \cos t$ voltios; $u_2 = 10\sqrt{2} \sin t$ voltios. La potencia compleja suministrada por el generador u_2 es $\underline{S} = 250 + j150$. Calcular: a) valor instantáneo de la corriente suministrada por el generador de intensidad i ; b) potencias activa, reactiva y aparente suministrada por el generador de corriente al circuito.

[Res. a) $i = 30 \cos(t + 45^\circ)$; b) $P = 300\ \text{W}$; $Q = 300\ \text{VAR}$; $S = 300\sqrt{2}\ \text{VA}$]

- 2.28.** En el circuito de la Figura P.2.27, los valores instantáneos de los generadores son: $i_1 = 20 \cos(10t + 45^\circ)$; $u_2 = 10\sqrt{2} \cos 10t$; $u_3 = 20\sqrt{2} \cos 10t$; $i_4 = 10\sqrt{2} \sin 10t$. Calcular: a) d.d.p. instantánea entre los nudos A y B; b) potencia compleja suministrada por el generador i_1 al circuito.

[Res. a) $u_{AB} = 10\sqrt{2} \sin 10t$; b) $\underline{S} = 200 - j200$]

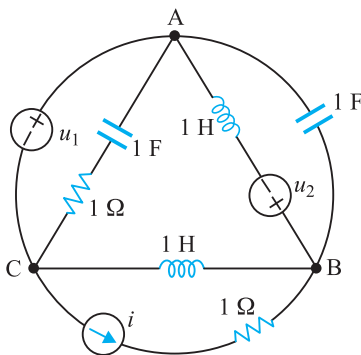


Figura P.2.26

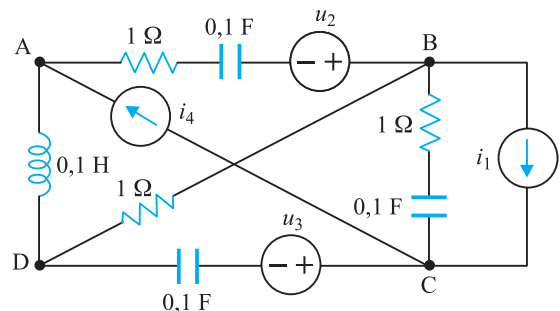


Figura P.2.27

- 2.29.** En el circuito de c.a. de la Figura P.2.28, la frecuencia de los generadores es de $10/2\pi$ hercios. La tensión instantánea del generador de tensión es: $u_2 = 10\sqrt{2} \cos 10t$ voltios. Si la potencia compleja suministrada por este generador al circuito es: $\underline{S} = 200 - j100$. Calcular: a) corriente instantánea del generador de intensidad i_2 ; b) d.d.p. instantánea entre los nudos B y D.

[Res. a) $i_2 = 20 \cos (10t + 135^\circ)$; b) $u_{BD} = 20 \cos (10t + 135^\circ)$]

- 2.30.** En el circuito de la Figura P.2.29, los valores instantáneos de los generadores de tensión son: $u_2 = 10\sqrt{2} \cos 100t$ voltios; $u_2 = 10\sqrt{2} \sin 100t$ voltios. La potencia compleja suministrada por el generador u_2 es: $\underline{S} = 250 + j150$. Calcular: a) valor instantáneo de la corriente suministrada por el generador de intensidad; b) d.d.p. compleja entre los nudos B y C; c) potencia disipada en la resistencia de 1Ω .

[Res. a) $i = 30 \cos (100t + 45^\circ)$; b) $\underline{U}_{BC} = -j 5$; c) $P(1 \Omega) = 50 \text{ W}$]

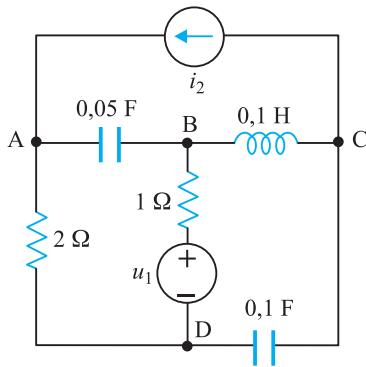


Figura P.2.28

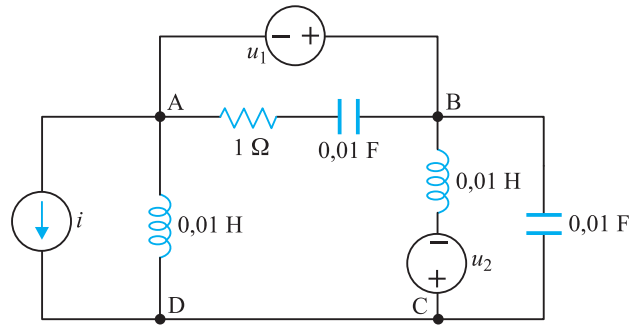


Figura P.2.29

- 2.31.** En el circuito de la Figura P.2.30, los valores instantáneos de los generadores son: $u_1 = 10\sqrt{2} \sin t$ voltios; $u_2 = 50\sqrt{2} \cos t$ voltios; $i = 20 \cos (t + 45^\circ)$ amperios. Calcular: a) valores de la resistencia R en ohmios y de la inductancia L en henrios, para que el generador u_2 entregue al circuito una potencia activa de 500 W y una potencia reactiva inductiva de 500 VAR; b) d.d.p. instantánea entre los nudos A y B.

[Res. a) $R = 1 \Omega$; $L = 2 \text{ H}$; b) $u_{AB} = 20\sqrt{2} \cos (t + 180^\circ)$]

- 2.32.** En el circuito de la Figura P.2.31, los generadores son de c.a. sinusoidal de la misma frecuencia. La expresión instantánea del generador de corriente es $i = 20 \cos (10t + 135^\circ)$. Si el generador de tensión no produce potencia activa y la potencia reactiva que entrega al circuito es capacitiva y de valor 100 VAR (es decir $\underline{S} = 0 - j100$). Calcular: a) tensión instantánea u_g ; b) potencia compleja suministrada por el generador de corriente.

[Res. a) $u_b = 10\sqrt{2} \cos (10t - 90^\circ)$; b) $\underline{S} = 150 - j250$]

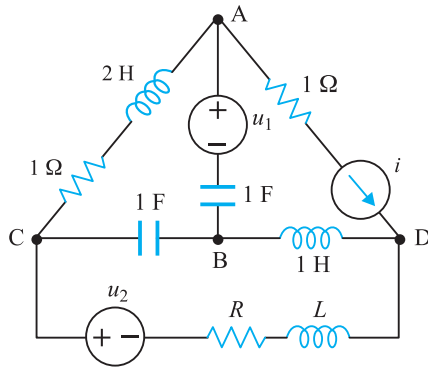


Figura P.2.30

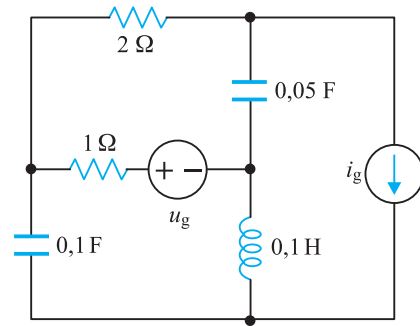


Figura P.2.31

- 2.33.** En el circuito de la Figura P.2.32, ambos generadores tienen la misma frecuencia. El valor instantáneo de la corriente del generador de intensidad es: $i_a = 10\sqrt{2} \cos 100t$ amperios. Se sabe además que la potencia compleja suministrada por el generador de corriente al circuito $\underline{S}_a = 900 - j400$. Calcular: a) tensión instantánea del generador de tensión u_b ; b) potencia compleja suministrada por el generador de tensión al circuito; c) comprobar el balance de potencias en el circuito, es decir la suma de las potencias de los generadores es igual a la suma de las potencias de los receptores.

[Res. a) $u_b = 40\sqrt{2} \sin 100t$; b) $\underline{S}_b = 800 + j800$; c) $\underline{S}$ (generadores) = $1.700 + j400$; $\underline{S}(1 \Omega) = 800 \text{ W}$; $\underline{S}(1 \Omega) = 400 \text{ W}$; $\underline{S}(5 \Omega) = 500 \text{ W}$; $\underline{S}(0,02 \text{ H}) = +j2.600$; $\underline{S}(0,005 \text{ F}) = -j200$; $\underline{S}(0,01 \text{ F}) = -j2.000$]

- 2.34.** En el circuito de la Figura P.2.33, los valores instantáneos de los generadores son: $u_1 = 10\sqrt{2} \cos 100t$ voltios; $i_3 = 10 \cos (100t + 45^\circ)$. Sabiendo que la potencia compleja suministrada por el generador de tensión al circuito es: $\underline{S}_1 = -100 + j100$. Calcular: a) valor instantáneo de i_2 ; b) potencia compleja suministrada por el generador de corriente i_3 .

[Res. a) $i_2 = 10\sqrt{2} \sin 100t$; b) $\underline{S}_3 = 0 - j500$]

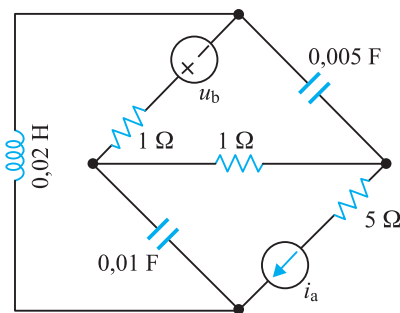


Figura P.2.32

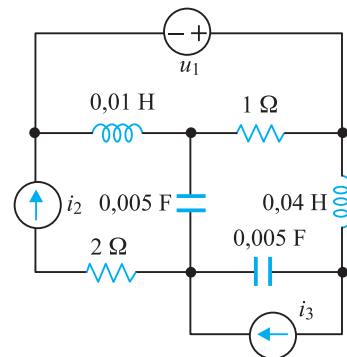


Figura P.2.33

- 2.35.** En el circuito de la Figura P.2.34, los valores instantáneos de los generadores son: $u_1 = 10\sqrt{2} \cos 10t$ voltios; $u_2 = 10\sqrt{2} \sin 10t$; $i_3 = 10 \sin (10t + 45^\circ)$ amperios. Sabiendo que el generador de tensión u_1 entrega al circuito una potencia activa de 100 W y una potencia reactiva inductiva de 400 VAR. Cal-

cular: a) d.d.p. instantánea u_{CE} en bornes del generador de corriente; b) valores de la resistencia R y capacidad C de la rama AB del circuito.

[Res. a) $u_{CE} = 90\sqrt{2} \cos(10t + 90^\circ)$; b) $R = 1 \Omega$; $C = 0,1 \text{ F}$]

- 2.36.** En el circuito de la Figura P.2.35 se conocen los valores instantáneos de los generadores: $u_b = 5\sqrt{2} \cos 10t$ voltios; $i_c = 10\sqrt{2} \sin 10t$ amperios. La potencia compleja suministrada por u_b es $\underline{S} = 10 + j40$. Calcular: a) tensión instantánea del generador u_a ; b) potencia disipada en la resistencia de $0,5 \Omega$ de la parte superior izquierda del circuito.

[Res. a) $u_a = 4 \cos(10t - 45^\circ)$; b) 2 W]

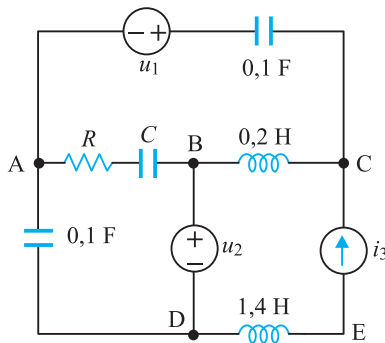


Figura P.2.34

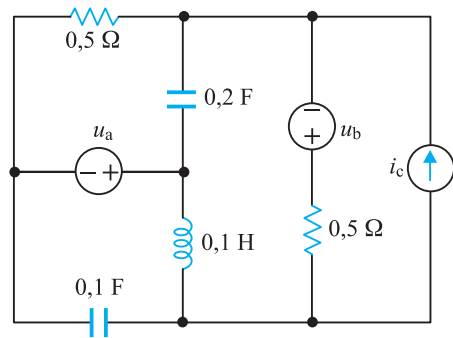


Figura P.2.35

- 2.37.** Se dispone del circuito eléctrico de la Figura P.2.36, en el que ambos generadores tienen la misma frecuencia. a) Si la potencia activa suministrada por el generador de tensión es de 8 W con f.d.p. $0,447$ inductivo, determinar su tensión instantánea u_1 si la intensidad del generador de corriente en valor instantáneo es $i_2 = 2\sqrt{2} \cos 10t$ amperios. Nota: de las dos soluciones posibles tómese aquella que dé lugar a una tensión más pequeña. b) Calcular la potencia compleja entregada por el generador de corriente. c) Comprobar el balance de potencias en el circuito.

[Res. a) $u_1 = 4\sqrt{2} \cos 10t$; b) $\underline{S}(i_2) = 72 + j16$; c) $\underline{S}(\text{generadores}) = \underline{S}(\text{receptores}) = 80 + j32$]

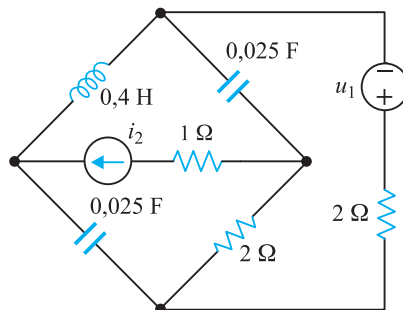


Figura P.2.36

- 2.38.** En el circuito de la Figura P.2.37, los valores instantáneos de los generadores son: $u_a = 10\sqrt{2} \cos t$; $u_b = 20 \cos(t + \alpha)$ voltios; $i_c = 10\sqrt{2} \sin t$ amperios. Determinar: a) valor de la fase α en grados, del

generador de tensión u_b , si se sabe que el generador de tensión u_a no suministra potencia activa al circuito; b) calcular las potencias complejas suministradas por los tres generadores.

[Res. a) $\alpha = -45^\circ$; b) $\underline{S}_a = 0 - j100$; $\underline{S}_b = 0 + j100$; $\underline{S}_c = 100 + j200$]

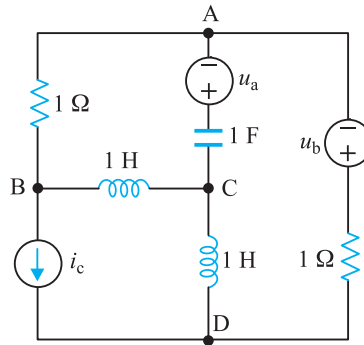


Figura P.2.37

2.39.

En la Figura P.2.38 se muestra un generador u_g que a través de una línea de impedancia $0,1 + j0,2 \Omega$ (total: ida y vuelta) alimenta un receptor constituido por dos cargas: a) Iluminación incandescente de 4 kW; b) Motor de 10 kW de potencia mecánica, rendimiento del 80 % y f.d.p. 0,7 inductivo. Calcular: a) tensión que debe aplicarse al extremo generador u_g para que las cargas tengan una tensión en bornes de 220 V; b) potencia reactiva de los condensadores conectados en el extremo receptor (ver línea a trazos de la Figura P.2.38) para elevar el f.d.p. del conjunto de las cargas a la unidad en el extremo receptor y capacidad necesaria si la frecuencia de la red es de 50 Hz; c) potencia compleja al principio de la línea (suministrada por u_g) en los dos casos siguientes: 1) sin conectar los condensadores, 2) conectando los condensadores.

[Res. a) $u_g = 239,28 \text{ V}$; b) 12,76 kVar; $C = 839 \mu\text{F}$; c) 1) $17.400 + j14.555$; 2) $17.063 + j1.125$]

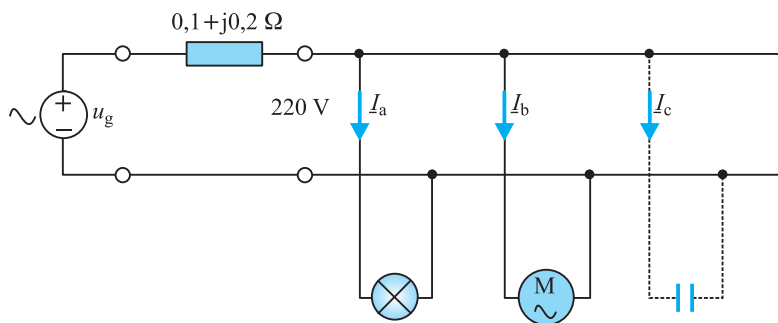


Figura P.2.38

2.40.

Un generador alimenta dos cargas con las siguientes características: 1) Motor de 5 CV, rendimiento del 85 % y f.d.p. 0,75 inductivo (1 CV = 736 W); 2) Grupo de soldadura de 3 kW; $\eta = 80 \%$, d.d.p. 0,8 inductivo. Desde el generador hasta la carga 1, la línea de alimentación tiene una impedancia de $0,1 + j0,1 \Omega$. La impedancia de la línea entre la carga 1 y la carga 2 es de $0,2 + j0,2 \Omega$. Suponiendo que la tensión en bornes de la carga 2 es de 220 V, 50 Hz. Calcular: a) tensión en bornes de la carga 1 y a principio de línea (tensión del generador); b) si en paralelo con la carga 1, se pone un condensador

de 500 μF (la tensión en la carga 2 se supone que sigue siendo de 220 V). ¿Cuál será la potencia compleja a principio de línea, a la salida del generador?

[Res. a) $u_1 = 225,96 \text{ V}$; $u_g = 232,55 \text{ V}$; b) $\underline{S} = 8.305 - j1.158$]

- 2.41.** En el circuito de la Figura P.2.39, los valores instantáneos de los generadores son: $i_a = \sqrt{2} 10 \cos 10t \text{ A}$; $u_b = \sqrt{2} E \cos(10t + \alpha) \text{ V}$. Se sabe que el generador de corriente i_a suministra al circuito una potencia activa de 900 W y una potencia reactiva capacitiva de 400 VAR. Calcular: a) valores de E y α del generador de tensión; b) d.d.p. instantánea entre los nudos A y D; c) potencia activa, reactiva y aparente suministrada por el generador e_b de tensión al circuito.

[Res. a) $E = 40 \text{ V}$; $\alpha = -90^\circ$; b) $u_{AD}(t) = 40 \cos(10t + 135^\circ)$; c) $P_b = 800 \text{ W}$; $Q_b = 800 \text{ VAR}$; $S_b = 800\sqrt{2} \text{ VA}$]

- 2.42.** En el circuito de la Figura P.2.40, los valores instantáneos de los generadores son: $i_a = 10\sqrt{2} \sin 10t \text{ A}$; $u_b = \sqrt{2} 10 \cos 10t \text{ V}$; $i_c = \sqrt{2} 100 \cos 10t \text{ V}$; $u_d = \sqrt{2} 20 \cos 10t \text{ V}$. Se sabe que el generador de corriente i_c suministra al circuito una potencia compleja $\underline{S}_c = 10.000 - j8.000$. Calcular: a) valores R y L de la impedancia conectada en serie con el generador de tensión u_b ; b) diferencia de potencial instantánea en bornes del condensador de 0,05 F; c) potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por los demás generadores al circuito.

[Res. a) $R = 4 \Omega$; $L = 0,3 \text{ H}$; b) $u_c = 40 \cos(10t + 135^\circ)$; c) $P_b = 100 \text{ W}$; $Q_b = 100 \text{ VAR}$; $S_b = 100\sqrt{2} \text{ VA}$; $P_a = -700 \text{ W}$; $Q_a = -300 \text{ VAR}$; $S_b = 761,6 \text{ VA}$; $P_d = -200 \text{ W}$; $Q_d = 200 \text{ VAR}$; $S_d = 200\sqrt{2} \text{ VA}$]

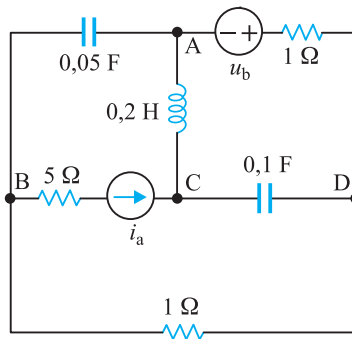


Figura P.2.39

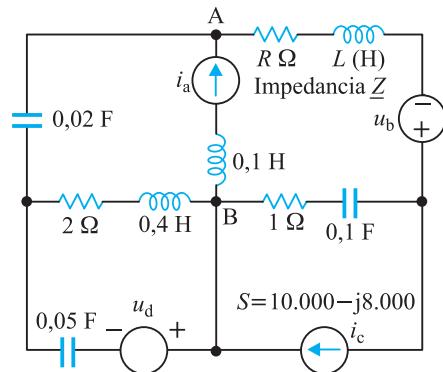


Figura P.2.40

- 2.43.** En el circuito de la Figura P.2.41, los valores instantáneos de los generadores son: $i_a = 20 \cos(100t + 45^\circ) \text{ A}$; $u_b = \sqrt{2} E \cos(100t + \alpha) \text{ V}$; $u_c = \sqrt{2} 250 \cos 100t \text{ V}$. Se sabe que el generador de corriente i_a suministra al circuito una potencia compleja $\underline{S}_a = 800 + j200$. Calcular: a) valores de E y α del generador de tensión u_b ; b) potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por los generadores u_b y u_c al circuito; c) potencias disipadas (activas) en las resistencias del circuito y potencias reactivas en las reactancias del mismo. Comprobar el balance de potencias en la red.

[Res. a) $E = 10 \text{ V}$; $\alpha = -90^\circ$; b) $P_b = 100 \text{ W}$; $Q_b = -200 \text{ VAR}$; $S_b = 223,61 \text{ VA}$; $P_c = 1.000 \text{ W}$; $Q_c = 1.000 \text{ VAR}$; $S_c = 1.000\sqrt{2} \text{ VA}$; c) $\underline{S}_{\text{gen}} = \underline{S}_{\text{recep}} = 1.900 + j1.000$]

- 2.44.** En el circuito de la Figura P.2.42, los valores instantáneos de los generadores son: $u_a = \sqrt{2} 10 \cos t$ V; $u_b = \sqrt{2} E \cos(t + \alpha)$ V; $i_c = 20 \cos(t - 45^\circ)$ A. Se sabe que el generador de tensión u_a suministra al circuito una potencia compleja $\underline{S}_a = 350 + j150$. Calcular: a) valores de E y α del generador de tensión u_b ; b) potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por los generadores u_b e i_c al circuito; c) potencias activas y reactivas en los elementos pasivos del circuito. Comprobar el balance de potencias en el circuito.

[Res. a) $E = 20$ V; $\alpha = -90^\circ$; b) $P_b = -200$ W; $Q_b = 0$ VAR; $S_b = 200$ VA; $P_c = 0$ W; $Q_c = 100$ VAR; $S_c = 1.000$ VA; c) $\underline{S}_{\text{gen}} = \underline{S}_{\text{recep}} = 150 + j250$]

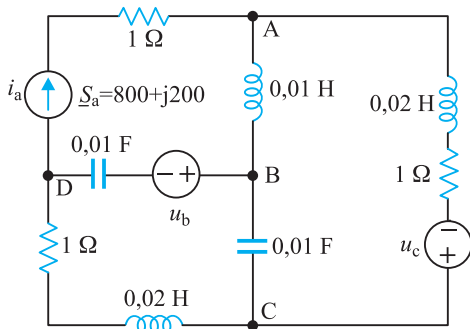


Figura P.2.41

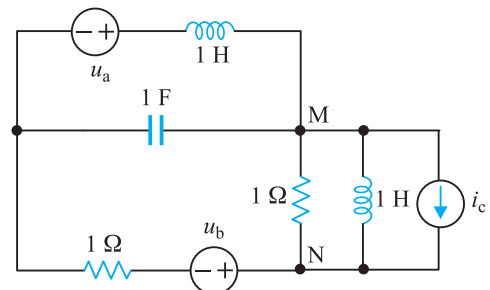


Figura P.2.42

- 2.45.** En el circuito de la Figura P.2.43, los valores instantáneos de los generadores son: $i_a = \sqrt{2} I \cos(100t + \alpha)$ A; $u_b = \sqrt{2} 20 \sin 100t$ V. Si el generador de tensión u_b entrega al circuito una potencia activa de 220 W y una potencia reactiva inductiva de 160 VAR, calcular: a) valores de I y α del generador de corriente; b) potencia activa, reactiva y aparente entregada por el generador de corriente al circuito; c) comprobar el balance de potencias en el circuito.

[Res. a) $I = 5$ A; $\alpha = 0^\circ$; b) $P_a = 170$ W; $Q_a = -110$ VAR; $S_a = 202,5$ VA; c) $\underline{S}_{\text{gen}} = \underline{S}_{\text{recep}} = 390 + j50$]

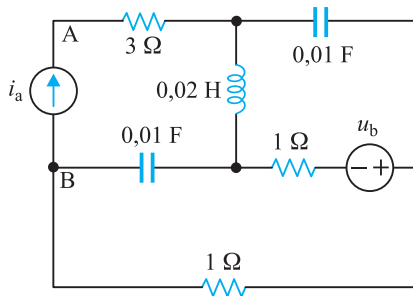


Figura P.2.43

- 2.46.** En el circuito de la Figura P.2.44, los valores instantáneos de los generadores son: $i_a = I \cos(100t + \alpha)$ A; $u_b = \sqrt{2} 40 \cos 100t$ V; $u_c = \sqrt{2} 20 \cos(100t + 180^\circ)$ V. Si el generador de tensión u_b no entrega al circuito ni potencia activa ni reactiva, calcular: a) valores de I y α del generador de corriente i_a ;

b) potencias activas, reactivas y aparentes entregadas por los generadores i_a y u_c al circuito; c) comprobar el balance de potencias en el circuito.

[Res. a) $I = 40$ A; $\alpha = +45^\circ$; b) $P_a = 1.600$ W; $Q_a = 400$ VAR; $S_a = 1.649,2$ VA; $P_c = 200$ W; $Q_c = -200$ VAR; $S_c = 200\sqrt{2}$ VA; c) $\underline{S}_{\text{gen}} = \underline{S}_{\text{recep}} = 1.800 + j200$]

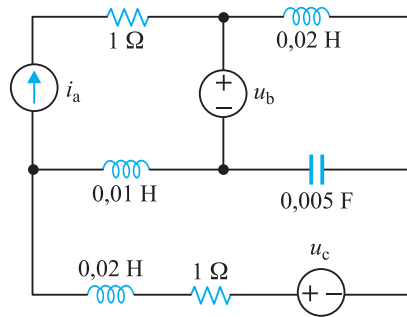


Figura P.2.44

2.47. En el circuito de la Figura P.2.45, los valores instantáneos de los generadores son: $u_a = \sqrt{2} E \cos 10t$ V; $i_b = \sqrt{2} 16 \cos(10t - 90^\circ)$ A. Se sabe que el generador de corriente i_b entrega al circuito una potencia activa de 1.088 W, pero se desconoce la potencia reactiva que suministra. Calcular: a) f.e.m. E del generador u_a ; b) potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por los dos generadores al circuito.

[Res. a) $E = 10$ V; b) $P_a = 140$ W; $Q_a = 0$ VAR; $S_a = 140$ VA; $P_b = 1.088$ W; $Q_b = -384$ VAR; $S_b = 1.153,8$ VA]

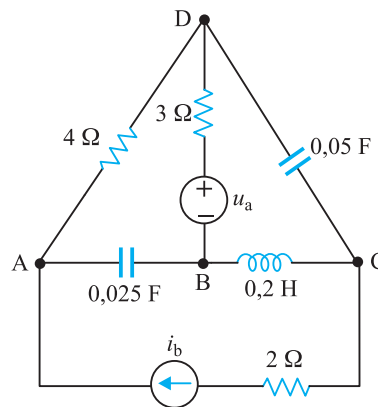


Figura P.2.45

2.48. En el circuito de la Figura P.2.46, los valores instantáneos de los generadores son: $u_a = \sqrt{2} 10 \cos 100t$ V; $u_b = \sqrt{2} 10 \sin 100t$ V; $i_c = \sqrt{2} I_c \cos(100t + \varphi_c)$ A. Se sabe que el generador de tensión u_b suministra una potencia activa al circuito de 50 W con f.d.p. $1/\sqrt{2}$ capacitivo. Calcular: a) valores I_c y φ_c del generador de corriente; b) d.d.p. instantánea entre los nudos A y B; c) potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por los generadores de tensión u_a y de corriente i_c al circuito.

[Res. a) $I_c = 10$ A; $\varphi_c = -90^\circ$; b) $u_{AB} = 10 \cos(100t + 135^\circ)$; c) $P_a = 0$ W; $Q_a = 50$ VAR; $S_a = 50$ VA; $P_c = 100$ W; $Q_c = -200$ VAR; $S_c = 223,6$ VA]

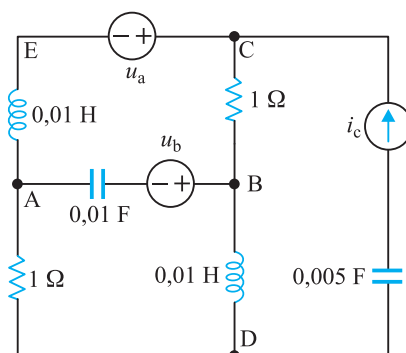


Figura P.2.46

- 2.49.** En el circuito de la Figura P.2.47, los valores instantáneos de los generadores son: $i_a = 10\sqrt{2} \cos 10t$ A; $u_b = \sqrt{2} 40 \sin 10t$ V. Calcular: a) potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por los generadores de tensión y de corriente al circuito; b) potencias disipadas en las resistencias y potencias reactivas en la bobina y condensadores del circuito. Comprobar el balance de potencias en el circuito; c) se quita la resistencia R de la rama superior derecha de la red. Calcular el circuito equivalente de Thévenin de toda la red entre los terminales A y B. Compruébese que la corriente que circula por $R = 1 \Omega$ a partir del Teorema de Thévenin coincide con el valor obtenido cuando se resolvió el circuito en el apartado a).

[Res. a) $P_a = 900$ W; $Q_a = -400$ VAR; $S_a = 984,9$ VA; $P_b = 800$ W; $Q_b = 800$ VAR; $S_b = 1.131,4$ VA; b) $\underline{S}(5 \Omega) = 500$ W; $\underline{S}(1 \Omega) = 800$ W; $\underline{S}(1 \Omega) = 400$ W; $\underline{S}(j2 \Omega) = +j2.600$ VAR; $\underline{S}(-j2 \Omega) = -j200$ VAR; $\underline{S}(-j1) = -j2.000$; c) $\underline{U}_{Th} = 60 \angle -90^\circ$ V; $\underline{Z}_{Th} = (1 + j3)/2 \Omega$; $\underline{I}_{AB} = (1 \Omega) = -20 - j20$ A]

- 2.50.** El circuito de la Figura P.2.48 se alimenta por una red de corriente alterna de tensión U_g . Se conocen las siguientes lecturas de los aparatos de medida: $P_2 = 6.300$ W; $A_2 = 100$ A; $A_3 = 75$ A; $V_2 = 216$ V. a) Calcular las lecturas A_1 y V_3 . b) Si se sabe además que $V_1 = 300$ V, determinar U_g y P_1 .

[Res. a) $A_1 = 35$ A; $V_3 = 225$ V; b) $U_g = 375$ V; $P_1 = 12.600$ W]

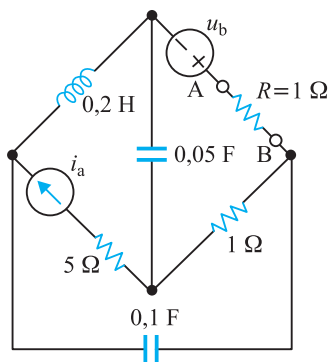


Figura P.2.47

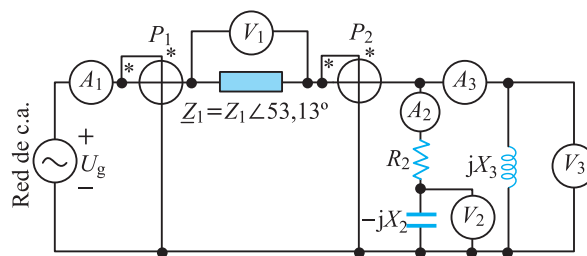


Figura P.2.48

- 2.51.** En el circuito de la Figura P.2.49, se sabe que la impedancia compleja del conjunto serie jX_1 y R_1 coincide con la del conjunto paralelo formado por R_2 y jX_2 . Se conocen además las magnitudes de las siguientes tensiones y corrientes del circuito: $U_g = 250$ voltios; $U_1 = 100$ voltios; $I_a = 7,5$ amperios. Calcular: a) potencia P que marcará el vatímetro; b) valores de R_1 y X_1 .

[Res. a) 1.875 W; b) $R_1 = 6 \Omega$; $X_1 = 8 \Omega$]

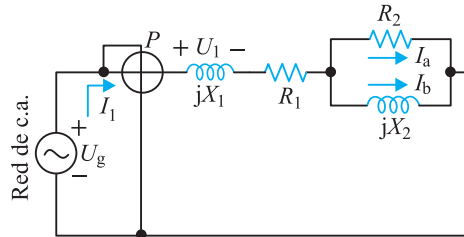


Figura P.2.49

- 2.52.** En el circuito de la Figura P.2.50, se sabe que la tensión de la red $U_g = 100\sqrt{2}$ voltios. Estando S_1 abierto y S_3 cerrado, las lecturas de los aparatos de medida fueron: $I_1 = 10$ A; $P = 1.000$ W; $V_2 = 25$ V. a) Calcular la lectura del voltímetro V_1 . Se cierra el interruptor S_1 y se abre el interruptor S_3 permaneciendo la misma tensión de red. Se observa que ahora la corriente del amperímetro I_1 señala 5 amperios y que el vatímetro marca 500 W de tipo capacitivo, calcular el valor de la impedancia compleja Z_2 .

[Res. a) $U_1 = 125$ V; b) $Z_2 = 10 - j27,5 \Omega$]

- 2.53.** En el circuito de la Figura 2.51, se sabe que el generador tiene una tensión de $U_g = 100$ V. La potencia que indica el vatímetro es de 800 W y es de tipo inductivo. Sabiendo además que $V_1 = 100$ V y que $A_1 = 10$ A, calcular: a) impedancia $-jX_1$ del condensador; b) valores de R_2 y jX_2 .

[Res. a) $-j8 \Omega$; b) $R_2 = 64 \Omega$; $X_2 = 48 \Omega$]

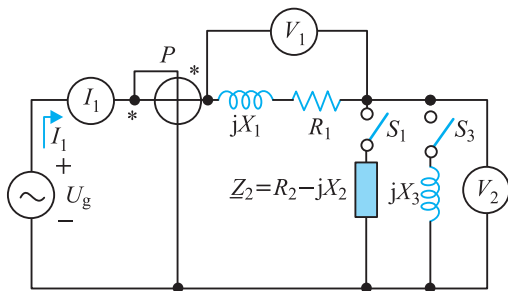


Figura P.2.50

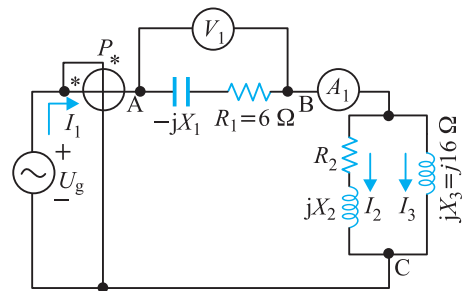


Figura P.2.51

- 2.54.** En el circuito de c.a. de la Figura P.2.52, se sabe que los amperímetros A_2 e A_3 señalan respectivamente 12 A y 10 A. El voltímetro V_3 marca un valor de 100 V y el vatímetro P señala 800 W. Calcular: a) valor de la reactancia X_3 y la lectura del amperímetro A_1 ; b) sabiendo que la red de alimentación tiene una tensión de 120 V, calcular el valor de la resistencia R_1 .

[Res. a) $X_3 = 6 \Omega$; $A_1 = 10$ A; b) $R_1 = 4 \Omega$]

- 2.55.** En el circuito de c.a. de la Figura P.2.53, las lecturas de los voltímetros V_c y V_3 son respectivamente 160 V y 200 V. El generador U_g trabaja con f.d.p. unidad, suministrando al circuito la potencia señalada por el vatímetro P_1 y que vale 3.750 W, se sabe además que el amperímetro A_2 marca 20 A. Calcular: a) lectura del vatímetro P_2 ; b) tensión U_g del generador; c) corrientes de los amperímetros A_1 y A_3 . Nota: Obsérvese que la impedancia $\underline{Z}_1$ es de tipo capacitivo.

[Res. a) $P_2 = 2.400$ W; b) $U_g = 250$ V; c) $A_1 = 15$ A; $A_2 = 25$ A]

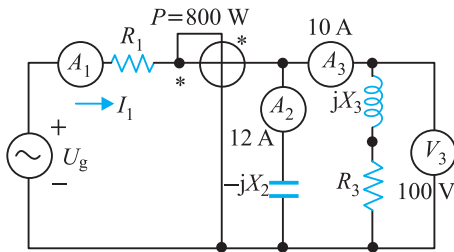


Figura P.2.52

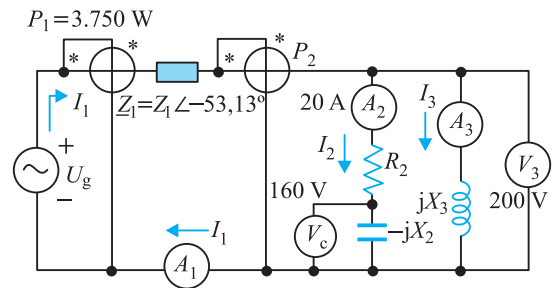


Figura P.2.53

- 2.56.** En el circuito de la Figura P.2.54, se sabe que el generador trabaja con f.d.p. unidad, se conocen además las lecturas de los siguientes aparatos de medida: $V_L = 300$ voltios; $A_1 = 20$ amperios; $P = 3.600$ W. a) Calcular la corriente que señalarán los amperímetros A_2 y A_3 . b) Obtener la tensión U_g del generador o red.

[Res. a) $A_1 = 15$ A; $A_2 = 7$ A; b) $U_g = 340$ V]

- 2.57.** En el circuito de la Figura P.2.55, la red de c.a. tiene una tensión constante $U_g = 120$ V. Estando cerrados los interruptores S_1 y S_2 se obtiene las siguientes lecturas: $A_g = 4,8$ amperios; $P_g = 460,8$ W. Al abrir S_1 siguiendo cerrado S_2 , se observa que el amperímetro A_g sigue marcando la misma corriente de 4,8 A. a) Calcular los valores de la impedancia compleja $\underline{Z}_1$ y la reactancia del condensador $-jX_C$. Abriendo S_2 y cerrando S_1 se han obtenido las siguientes medidas: $A_g = 3$ amperios; $P_g = 360$ W; $V_3 = 60$ V; $A_3 = 4$ A. b) Calcular el valor de la resistencia R_3 y la lectura del amperímetro A_2 .

[Res. a) $\underline{Z}_1 = 20 + j15 \Omega$; $-jX_C = -j30 \Omega$; b) $R_3 = 11,25 \Omega$; $A_2 = 5$ A]

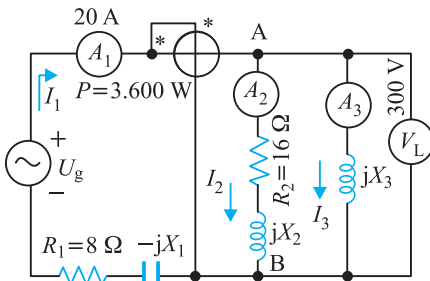


Figura P.2.54

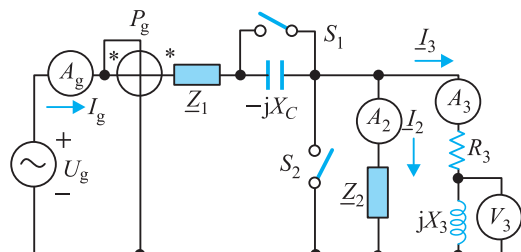


Figura P.2.55

- 2.58.** El circuito de la Figura P.2.56 se alimenta por una red monofásica de 250 V, 50 Hz. a) Estando el interruptor S_1 cerrado y S_2 abierto se observan las siguientes lecturas de los aparatos de medida:

$A_g = 12,5 \text{ A}$; $P_g = 1.875 \text{ W}$. Calcular los valores de R_1 y X_1 . b) Se abre S_1 (S_2 sigue abierto) y las lecturas son las siguientes $A_g = 10 \text{ A}$; $P_g = 2.400 \text{ W}$ y de tipo inductivo. Calcular las magnitudes de las d.d.p. U_{AB} y U_{BC} . c) El interruptor S_1 sigue abierto y se cierra S_2 . Calcular el valor de X_3 para que el amperímetro A_3 señale 12 A .

[Res. a) $R_1 = 100/3 \ \Omega$; $X_1 = 25 \ \Omega$; b) $U_{AB} = 200 \text{ V}$; $U_{BC} = 150 \text{ V}$; c) $X_3 = 3,5 \ \Omega$]

- 2.59.** En el circuito de la Figura P.2.57, la red de c.a. tiene una tensión eficaz constante $U_g = 200$ voltios. a) Estando abierto el interruptor D se observaron las siguientes lecturas: $A_g = 1 \text{ A}$; $P_g = 160 \text{ W}$ (de carácter inductivo), $V_2 = 200$ voltios. Calcular los valores de R_1 , X_1 y X_2 . b) Al cerrar el interruptor S se observaron las siguientes lecturas: $A_g = \sqrt{2}$ amperios; $P_g = 280 \text{ W}$ (de carácter capacitivo). Calcular los valores de R_3 y X_3 .

[Res. a) $R_1 = 72 \ \Omega$; $X_1 = 24 \ \Omega$; $X_2 = 16 \ \Omega$; b) $R_3 = 120 \ \Omega$; $X_3 = 160 \ \Omega$]

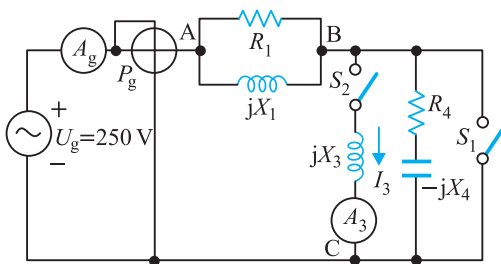


Figura P.2.56

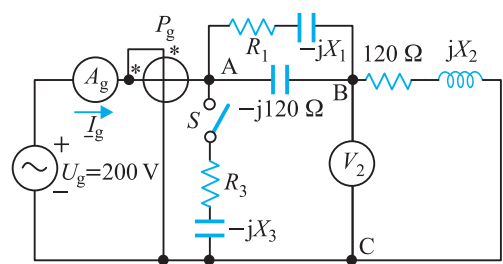


Figura P.2.57

- 2.60.** En el circuito de la Figura P.2.58, la red de c.a. tiene una tensión eficaz constante $U_g = 100$ voltios. Sabiendo que la tensión en la bobina jX_2 es de 80 voltios, que la tensión en el condensador $-jX_1$ es de 64 voltios y la corriente que señala el amperímetro A_1 es de 8 amperios. Calcular: a) la potencia que señalará el vatímetro P_2 ; b) sabiendo que el f.d.p. total del circuito es igual a la unidad, calcular las lecturas de los amperímetros A_g y A_2 y la del vatímetro P_1 .

[Res. a) $P_2 = 384 \text{ W}$; b) $A_g = 6 \text{ A}$; $A_2 = 10 \text{ A}$; $P_1 = 600 \text{ W}$]

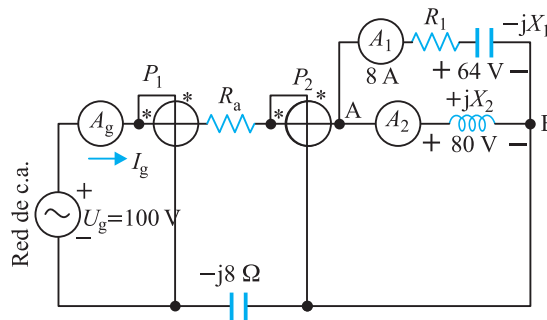


Figura P.2.58



Biografías

CAMPBELL, George A. (1870-1954). Ingeniero americano. Se graduó en Ingeniería Civil en el MIT en 1891, los dos años siguientes estudió Ingeniería Eléctrica en Harvard. Continuó estudios de Matemática y Física en diversas universidades europeas. En 1897 ingresó en el departamento de Ingeniería Mecánica de la *American Bell Telephone Company*. Conociendo el trabajo sobre líneas de transmisión de Oliver Heaviside, Campbell propuso añadir bobinas a intervalos regulares en las líneas telefónicas para reducir la atenuación y distorsión de la señales. Durante 1899 desarrolló una fórmula para la línea cargada que le dio el nombre de ecuación de Campbell. La ecuación permitía calcular la posición óptima y el tamaño de las bobinas de carga. Los ensayos de laboratorio confirmaron sus teorías en septiembre de 1899 y el primer uso de estas bobinas se realizó en mayo de 1900. Estos estudios le sirvieron para doctorarse en Harvard en 1901 y publicó un artículo sobre el tema en 1903. La innovación ahorró a la AT&T más de 100 millones de dólares en 1925. La prioridad de Campbell sobre la bobina de carga fue ganada finalmente por Michael I. Pupin, catedrático de la Universidad de Columbia que la había patentado en 1900 (parece ser que dos días antes que Campbell). El análisis de Campbell de la línea cargada había revelado que se comportaba como un filtro paso bajo que rechazaba las señales por debajo de una cierta frecuencia crítica. En un memorandum interno escrito en 1909, analizó los filtros paso banda que transmitían una estrecha banda de frecuencias y rechazaba las demás. En 1922 escribió un artículo sobre filtros eléctricos en la *Bell System Technical Journal*. Por todo ello se considera a Campbell como el inventor de los filtros eléctricos. Campbell recibió la medalla de Honor del IRE en 1936 y la medalla Edison del AIEE en 1940.

CAUCHY, Augustin Louis (1789-1857). Matemático francés. Ingresó en 1805 en la Escuela Politécnica, donde tuvo como maestros a Poisson, Ampère, Hachette y Prony. Ingeniero de la *Ecole de Ponts et Chaussées*. Profesor de la Politécnica (1815), también enseñó en la Soborna y en el *Collège de France*. Su obra principal fue en matemática pura, pero en un punto importante recayó en la física. Trabajó en cálculo diferencial e integral. Se le considera uno de los fundadores del álgebra compleja (1821), ampliando denominaciones introducidas por Argand en el plano complejo. En 1813 dio a conocer el método que lleva su nombre para determinar el número de raíces reales positivas y negativas de una ecuación de grado cualquiera, en 1814 apareció su memoria fundamental sobre las integrales definidas, luego abordando el teorema de Fermat sobre los números poligonales llegó a demostrarlo, cosa que no pudieron hacer Euler, Legendre, Lagrange ni Gauss. Cauchy se vio rodeado de controversias políticas a medida que iban pasando los años. Entre 1816 y 1830 dio simultáneamente tres cursos en París, uno de mecánica en la Politécnica, otro de álgebra superior también en la Politécnica y otro de física matemática en el *Collège de France*. Ferviente católico, fue además un partidario acérrimo de los Borbones y cuando Carlos X, último rey de esa familia se fue al exilio en 1830 también se exilió él para evitar el jurar fidelidad al nuevo rey Luis Felipe. Cauchy volvió a Francia en 1838 y cuando Luis Napoleón, sobrino de Napoleón, subió al poder como Presidente de la Segunda República, Cauchy no le juraría lealtad, pues rehusó a ello como ya había hecho Arago. En física, estudió la mecánica de sólidos deformables, la doble refracción óptica, la reflexión vítrea y metálica, etc. Conocía a la perfección el latín y el griego. Fue uno de los grandes matemáticos de su tiempo.

FOURIER, Jean Baptiste Joseph (1768-1830). Matemático francés. Fue preparado para sacerdote pero después estudió en la Academia Militar (1789-1793). Profesor en la Politécnica de Fortificaciones y Análisis Matemático. Acompañó a Napoleón a Egipto en 1798 y fue gobernador de una parte de ese país durante la ocupación francesa. Descubrió en 1807 el teorema o desarrollo en serie de Fourier, que demuestra que cualquier oscilación periódica se puede descomponer en una suma de términos trigonométricos, uno denominado fundamental y los demás armónicos del mismo. Hacia el año 1822, Fourier aplicando su teorema, completó su estudio sobre el flujo de calor y lo publicó en un libro llamado *Teoría Analítica del Calor*, que inspiró a Ohm a razonamientos análogos sobre el flujo eléctrico. En matemáticas desarrolló procedimientos generales de resolución de ecuaciones algebraicas, que ampliaron Navier y Sturm.

GUILLEMIN, Ernst Adolph (1898-1970). Ingeniero germano-americano. Estudió en la Universidad de Munich donde fue alumno de Arnold Sommerfeld. En 1926 se trasladó a los EE.UU. y fue contratado como profesor de ingeniería eléctrica en el MIT (*Massachusetts Institute of Technology*), donde permaneció el resto de su vida. Inicialmente enseñó máquinas eléctricas, pero enseguida se pasó a la rama de comunicaciones influenciado por los profesores T. E. Shea y E. L. Bowles. Entre los años 1931 y 1935 escribió un texto sobre redes de comunicaciones que incluía dos tomos: el primero se dedicaba a la teoría clásica de redes con parámetros concentrados y el segundo trataba la teoría clásica de las líneas largas, filtros y redes con parámetros distribuidos. Su contribución a la teoría de circuitos fue enorme publicando varios textos sobre esta materia dotados de un alto contenido matemático y que fueron adoptados como textos para la enseñanza de redes eléctricas en muchas universidades del mundo. Como profesor era inimitable, enseñaba con tanto entusiasmo y claridad que provocaba la admiración de sus alumnos, haciéndoles amar su asignatura. Fue profesor de profesores, que difundieron a su vez sus enseñanzas por todas las universidades del mundo. Medalla de honor del IRE y medalla de educación del AIEE. A modo de argumento y para comprender su intuición y claridad de mente, sirva la opinión de Bowles que consideraba a Guillemin como un *dispositivo adaptador de impedancias* entre el gran genio matemático y padre de la cibernética Norbert Wiener del MIT, con el resto de los catedráticos de esa institución.

JENKIN, Henry Charles Fleeming (1833-1885). Físico inglés. Estudió en Edimburgo, París y Génova. Entre 1851 y 1861 trabajó en diversas empresas británicas dedicadas principalmente al diseño y fabricación de los primeros cables telegráficos submarinos. En 1861 formó su propia empresa consultora a la que se asoció más tarde William Thomson (Lord Kelvin). Miembro del Comité de Patrones Eléctricos de Inglaterra que presidía Lord Kelvin (y al que pertenecían también: James Clerk Maxwell, Carey Foster, Latimer Clark y Charles Whetstone); en este puesto construyó una resistencia patrón para calibración y fabricó el primer equipo para la medida absoluta de la capacidad. Fue nombrado perito por la Comisión Real de Telegrafía submarina y de hecho intervino en numerosas expediciones de lanzamiento de cables telegráficos submarinos. En 1865 fue elegido catedrático de Ingeniería Eléctrica en el University College de Londres y más tarde en 1868 ocupó la misma asignatura en Edimburgo. En 1873 publicó un libro de texto de Electricidad y Magnetismo muy utilizado por los universitarios ingleses de final del siglo XIX. Junto con Lord Kelvin inventó utilísimos aparatos para la telegrafía submarina (tenían 35 patentes en común) y un sistema de transporte aéreo al que dio el nombre de *telpherage*. *Fellow de la Royal Society* en 1865 y miembro de la Institución de Ingenieros Civiles ingleses.

KENNELLY, Arthur Edwin (1861-1939). Ingeniero eléctrico anglo-americano, que nació en Colaba (India). Desde muy joven se interesó por la electricidad; a los 14 años se hizo telegrafista para la Compañía *Society of Telegraph Engineer* de Londres. En 1876 pasó a la Eastern Telegraph Co. donde trabajó como telegrafista y en el tendido de cables submarinos para telegrafía. En 1887 emigró a los EE.UU. y trabajó primeramente como ayudante de Edison en West Orange durante siete años. En 1894 se asocia con el Dr. Houston como ingeniero consultor. Catedrático de Ingeniería Eléctrica en Harvard desde 1902 hasta su retiro en 1930. También trabajó durante el periodo 1913-1924, como director de investigación eléctrica en el MIT. Introdujo en 1893 junto con Steinmetz el cálculo complejo para el estudio de los circuitos de c.a. (en un artículo presentado en este año al AIEE, utilizó por primera vez la palabra impedancia, para expresar la *resistencia* a la corriente alterna). A raíz de la transmisión hecha por radio por Marconi en 1902, desde Inglaterra a Terranova, postuló la existencia de una región ionizada en la alta atmósfera capaz de reflejar hacia la tierra las ondas de radio. Algo después, la misma explicación fue independientemente sugerida por Heaviside (capa de Kennelly-Heaviside conocida hoy día como región E de la ionosfera). Sus contribuciones más importantes se refieren a: teoría y práctica de la ingeniería eléctrica, el estudio de la ionosfera y la evolución de unidades y patrones eléctricos. Publicó 28 libros relacionados con la electricidad y más de 350 artículos técnicos. Presidente del AIEE en el bienio 1898-1899. Presidente del IRE en 1916. Doctor Honoris Causa por la Universidad de Pittsburgh (1895), por la Universidad de Toulouse (1923). Medalla Edison del AIEE. Medalla de Honor del IRE en 1932. Medalla de Plata Edward Longstreth del Instituto Franklin. Durante la Primera Guerra Mundial fue oficial del Cuerpos de Comunicaciones americano. Caballero de la Legión de Honor francesa.

SIEMENS, William (1823-1883). Ingeniero germano-inglés. Fue uno de los miembros de una saga alemana de inventores de la que su hermano mayor Werner fue fundador. William (entonces todavía Karl Wilhelm) aconsejado por su hermano mayor estudió una carrera técnica de tres años en Magdeburgo y financiado por un tío pasó un año en la Universidad de Göttinga donde tuvo como profesores a Whöhler y Wilhelm Weber. Se trasladó a Inglaterra en marzo de 1843 para tratar de introducir allí un procedimiento de galvanoplastia que su hermano Weber y él habían inventado. Vendió el proceso a la Empresa Elkington de Birmingham por 1600 libras. Volvió a Alemania para completar sus estudios y retornó a Inglaterra en febrero de 1844 con objeto de vender dos nuevos inventos: un regulador cronométrico o diferencial para el control de la velocidad de las máquinas de vapor, inventado por Werner pero desarrollado por él mismo y un proceso de copiado inventado por ambos hermanos. A Londres se llevó a dos hermanos pequeños: Carl y Friedrich. En 1859 se casó con Anne Gordon la hermana de un catedrático de ingeniería de la universidad de Glasgow y en ese mismo año se hizo ciudadano británico. Miembro de la *Royal Society* y primer Presidente del IEE (Instituto de Ingenieros Eléctricos Ingleses). Realizó estudios para mejorar el rendimiento de las máquinas de vapor. Creador en 1861 del método del horno de reverbero para la fundición del hierro con su hermano Friedrich y que sustituiría con el tiempo al tipo Bessemer inventado en 1856. Pionero en el desarrollo de la locomotora eléctrica, en la instalación de cables transoceánicos y en la mejora de generadores eléctricos.

STEINMETZ, Charles Proteus (1865-1923). Ingeniero eléctrico germano-americano. Padeciendo cifosis de nacimiento (una enfermedad degenerativa que produce la encorvadura de la espina dorsal) llevó una vida solitaria, iluminada solamente por la luz de su genio y la dulzura de su carácter. Estudió matemáticas, astronomía, física y química en Breslau y Berlín. Había completado su tesis doctoral en 1888, pero antes de leerla tuvo que huir a Suiza para evitar ser arrestado por su participación en un movimiento socialista juvenil. Estudió entonces ingeniería mecánica durante un año en el Politécnico de Zurich antes de emigrar definitivamente a los Estados Unidos en 1889. Cuando se hizo ciudadano americano cambió el nombre de Karl por Charles y le añadió el de Proteus (semidiós griego que tenía el don de metamorfosearse) para indicar su cambio de nombre y nacionalidad. Al llegar a este país trabajó para otro emigrante alemán, Rudolf Eickemeyer, que tenía un taller eléctrico en Yonkers, NY. Con el estímulo de Eickemeyer realizó sus investigaciones clásicas sobre histéresis magnética durante el trienio 1890-1892. Cuando a principios de 1893, Eickemeyer vendió su empresa a la recién creada General Electric, Steinmetz pasó como ingeniero a la nueva compañía, en donde permaneció el resto de su vida. Fundó en 1900 el laboratorio de Investigación de la GE y más tarde creó y dirigió el Departamento de Ingeniería y Consultoría. Sus excentricidades se hicieron famosas, en su despacho tenía el siguiente letrero: *No smoking, no Steinmetz*, se enfadaba cuando le decían de que estaba absolutamente

prohibido fumar en los laboratorios, él se quedaba fumando aunque estuviese prohibido para todos. Reconocido como una de las mentes más preclaras de su tiempo, su labor desarrollada en el campo de la ingeniería eléctrica es inmensa. Su dominio del análisis matemático facilitó el estudio de la corriente alterna al incorporar (junto con Kennelly) los números complejos para simplificar su análisis, dando lugar a unos procedimientos de cálculo similares a los que se empleaban para el estudio de la corriente continua. Escribió un gran número de libros de Ingeniería Eléctrica entre los que se destacan: *Theory and Calculation of Alternating Current Phenomena* y *Theoretical Elements of Electrical Engineering*, estos libros se tomaron como textos obligados en casi todas las universidades del mundo. Desarrolló circuitos equivalentes para el estudio de las máquinas eléctricas, sustituyendo los antiguos diagramas vectoriales por esquemas eléctricos, lo que simplificó muchísimo el estudio de las máquinas eléctricas. También escribió numerosos artículos científicos en casi todas las ramas de la Ingeniería Eléctrica. En 1902 fue contratado como catedrático de Ingeniería Eléctrica por la Union College, alternando la enseñanza con su trabajo en la GE. Se le acreditan unas doscientas patentes de inventos en todas las ramas de la Ingeniería Eléctrica. Presidente n.º 14 del AIEE en el bienio 1901-1902. En 1977 lo incluyeron en la Galería de la Fama de los inventores nacionales americanos.

THOMSON, William, Lord Kelvin (1824-1907). Matemático y físico escocés. Su padre era un eminente matemático que ganó la cátedra de esta asignatura en la Universidad de Glasgow cuando William tenía siete años y desde entonces vivió en esta ciudad. Fue un niño prodigio en Matemáticas. Ingresó en la Universidad de Glasgow a los doce años. A los dieciséis años se fue a estudiar a Cambridge y se graduó en 1845 con el número dos en matemáticas. Al acabar su carrera perfeccionó estudios en París con Regnault, científico que calculó que el cero absoluto estaba a -273°C . En 1846, cuando contaba solamente veintidós años se encargó de la cátedra de Filosofía Natural (hoy Física) de la Universidad de Glasgow, que había de desempeñar por espacio de cincuenta y tres años. Sus trabajos ejercieron una gran influencia en el progreso de la Física en la segunda mitad del siglo XIX, de ahí que Glasgow fuera durante más de medio siglo, uno de los principales centros intelectuales de Inglaterra. La mayor parte de sus investigaciones se realizaron en el campo de la termodinámica y la electricidad. Propuso la creación de la escala absoluta de temperaturas, dio una de las mejores fórmulas para el cálculo de los efectos térmicos debidos a la compresión, la expansión en gases, etc. Inventó gran número de aparatos de laboratorio para la medida de magnitudes eléctricas. Sus estudios fueron de una gran ayuda para la colocación del primer cable transatlántico para telegrafía (1866). Introdujo el teléfono de Bell en Gran Bretaña. En 1866, en recompensa de sus trabajos relacionados con la telegrafía submarina, se le concedió el título de caballero, en 1892 el de barón: *lord Kelvin de Largs* y en 1896, con motivo de sus bodas de oro como catedrático, la gran cruz de la Orden de la Reina Victoria; tres años más tarde renunció a la cátedra, pero siguió asistiendo a las clases como simple estudiante, en 1904 fue elegido Rector de la Universidad. Murió en 1907 y le enterraron en la abadía de Westminster, al lado de Newton. A su fallecimiento dejó una herencia de 162.000 libras esterlinas, lo que representaba una gran fortuna para esa época.



Referencias

- AKAGI, H., WATANABE, E. H., AREDES, M.: *Instantaneous Power Theory and Applications to Power Conditioning*. Wiley-IEEE Press, New York, 2007.
- BOITE, R.; NEIRYNCK, J.: *Traité d'Electricité. Tomo IV, Theorie des reseaux de Kirchhoff*. Editions Georgi, Lausanne, 1983.
- BOYLESTAD, R. L.: *Introductory Circuit Analysis*. 4ª ed.; Charles E. Merrill. Columbus, Ohio, 1982.
- BUDEANU, C.: *Puissance Réactives et Fictives*. Institute National Roumain, Bucarest, 1927.
- BUDAK, A.: *Circuit Theory Fundamentals and Applications*. Prentice Hall inc, Englewood Cliffs, N.J., 1978.
- CAHEN, F.: *Electrotechnique. Tome I. Circuits et Réseaux en Régime Permanent*. Gauthier Villars Editeur, París, 1962.
- CLEMENT, P. R.; JOHNSON, W. C.: *Electrical Engineering Science*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1960.
- DESOER, C. A.; KUH, E. S.: *Basic Circuit Theory*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1969.
- DURNEY, C. H.; HARRIS, L. D.: *Circuitos Eléctricos. Teoría y Aplicaciones en Ingeniería*. CECSA, México, 1985.
- EMANUEL, A.: *Powers in Nonsinusoidal Situations. A Review of Definitions and Physical Meaning*. IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 5, n.º. 3, July 1990, pp. 1377-1389.
- GUILLEMIN, E. A.: *Introducción a la Teoría de Circuitos*. Ed. Reverté, Barcelona, 1959.
- HAYT, W. H. Jr; KEMMERLY, J. E.; DURBIN, S. M.: *Engineering Circuit Analysis*, 6th ed, McGraw-Hill Book Co., New York, 2002.
- HOSTETTER, G. H.: *Engineering Network Analysis*. Harper and Row Pub, New York, 1984.
- HUELSMAN, L.: *Basic Circuit Theory*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

- JOHNSON, D.; HILBURN, J.; JOHNSON, J. R.: *Basic Electric Circuit Analysis*, 2ª ed, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- KARNI, S.: *Applied Circuit Analysis*. J. Wiley & Sons, New York, 1988.
- MEADOWS, R. G.: *Electric Network Analysis*. Penguin Books, Middlesex, England, 1972.
- OPPENHEIM, A. V.; WILSKY, A. S.; YOUNG, I. T.: *Signals and Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- PARRA, V.; PEREZ, A.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.: *Circuitos Eléctricos. Volumen I*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid, 2003.
- PASTOR, A.; ORTEGA, J.: *Circuitos Eléctricos. Volumen II*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid, 2005.
- SCOTT, D. E.: *Introducción al Análisis de Circuitos: Un Enfoque Sistémico*. McGraw-Hill/Interamericana de España S.A., Madrid, 1988.
- SHEPHERD, W.; ZAND, P.: *Energy Flow and Power Factor in Nonsinusoidal Circuits*. Cambridge University Press, England, 1979.
- SHENKMAN, A.: *Circuit Analysis for Power Engineering Handbook*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1998.
- TOMLINSON, G. H.: *Electrical Networks and Filters. Theory and Design*. Prentice Hall Int., London, 1991.
- VAN VALKENBURG, H. E.: *Análisis de Redes*. Ed. Limusa-Wiley, México, 1977.
- WATANABE, E. H.; STEPHAN, R. M.; AREDES, M.: *New Concepts of Instantaneous Active and Reactive Powers in Electrical Systems with Generic Loads*. IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 8, n.º 2, april, 1993, pp. 697-703.
- WILDI, T.: *Tecnología de los Sistemas Eléctricos de Potencia*. Ed. Hispano Europea, Barcelona, 1983.
- ZEVEKE, G.; IONKIN, P.: *Analysis of Electric Circuits*. Mir Publisher, Moscú, 1973.

Capítulo 3

Circuitos trifásicos

- 3.1 Introducción
- 3.2 Generación de tensiones trifásicas
- 3.3 Conexión en estrella equilibrada
- 3.4 Conexión en triángulo equilibrado
- 3.5 Cargas desequilibradas
- 3.6 Potencia en sistemas trifásicos
- 3.7 Corrección del factor de potencia en trifásica
- 3.8 Medida de la potencia en sistemas trifásicos
- 3.9 Transporte de energía eléctrica: ventaja de los sistemas trifásicos frente a los monofásicos
- 3.10 Componentes simétricas

■ 3.1. Introducción

En el Epígrafe 2.2, se ha demostrado cómo se puede generar una tensión alterna sinusoidal, cuando se mueve una bobina dentro de un campo magnético. La aparición de esta única onda alterna hace que se denomine esta máquina **generador monofásico**. Si el número de bobinas en el rotor se incrementa de una forma especial, el resultado es un **generador polifásico** que produce más de una onda alterna en cada revolución del rotor. Los sistemas polifásicos fueron inventados en 1888 por el ingeniero croata-americano Nikola Tesla (1856-1943), la base del mismo era el descubrimiento del motor asíncrono polifásico. El empresario norteamericano George Westinghouse (1846-1914) compró las patentes de Tesla y el impacto del nuevo sistema tuvo lugar en la Exposición Mundial de Chicago de 1893, donde se presentó un *generador bifásico* que suministraba dos tensiones desfasadas 90° en el tiempo a base de acoplar en el mismo eje mecánico dos alternadores monofásicos *decalados* 90° entre sí. Más tarde la compañía Westinghouse obtuvo en 1893 el permiso para construir en las cataratas del Niágara una central hidroeléctrica que se equipó con alternadores bifásicos y que entró en servicio en 1896. Disponía esta central de diez alternadores bifásicos de 3500 kVA cada uno. Europa a través de la compañía alemana AEG (*Allgemeine Elektrizitäts Gesellschafts*) construyó en 1891 la primera línea de *transporte trifásica* del mundo con motivo de la Exposición Internacional de Electricidad de Frankfurt. La línea tenía 175 km de longitud y unía las ciudades alemanas de Lauffen y Frankfurt. Se instaló la central hidroeléctrica en el río Neckar cerca de Lauffen que disponía de dos *alternadores trifásicos* de 210 kVA (uno de estos alternadores se expone en una sala del Museo de Ciencias de Munich, *Deutsches Museum*). El proyecto fue realizado por Michael Dolivo-Dobrowolsky (1861-1919) director técnico de la AEG, los alternadores fueron contruidos por los talleres suizos Oerlikon y diseñados por el ingeniero C. E. L. Brown (1863-1924), quien posteriormente fundaría a finales de 1891 la multinacional suiza Brown Boveri. Esta compañía se unió en 1987 con la empresa sueca ASEA (*Almanna Svenska Elektriska Aktiebolaget*) para formar la actual multinacional ABB.

En este capítulo se estudian únicamente los sistemas trifásicos puesto que son los que con más frecuencia se utilizan en la generación, transporte y distribución de energía eléctrica. La ventaja de los sistemas trifásicos en la ingeniería se debe a las siguientes propiedades:

1. Para transportar una determinada energía, a una cierta tensión, el sistema trifásico es más económico que el sistema monofásico, a igualdad de potencia a transmitir e igualdad en las pérdidas en el cobre de la línea, ya que se obtiene un ahorro en el peso de cobre de un 25 %.
2. La potencia instantánea de un sistema trifásico es constante, independiente del tiempo, por ello los motores trifásicos tienen un par absolutamente uniforme, lo que evita vibraciones y esfuerzos en el rotor.
3. Los motores trifásicos pueden arrancar por sí mismos, sin embargo los motores monofásicos necesitan dispositivos especiales para conseguir su arranque.

Existen también en la actualidad sistemas bifásicos que se emplean en servomecanismos, en aviones y barcos, para detectar y corregir señales de rumbo, indicación de alerones, etc.; sin embargo en la mayoría de los casos, cuando se necesitan sistemas mono o bifásicos, se consiguen utilizando de una forma adecuada los sistemas trifásicos. Las insta-

laciones domésticas o de pequeña entidad son monofásicas, pero esto no supone más que una derivación del sistema trifásico.

El número de tensiones (fases) que pueden producir los sistemas polifásicos no está limitado sin embargo a tres, y así existen algunos sistemas eléctricos que trabajan con más rendimiento si se aumenta el número de fases, este es el caso del proceso de rectificación (conversión de la c.a. en c.c.), donde se emplean sistemas hexafásicos y dodecafásicos para obtener una salida de corriente continua de mejores prestaciones (con menos rizado, es decir con menos componente alterna). Como quiera que como se ha indicado la generación y transporte de energía se realiza por medio de sistemas trifásicos, la forma de obtener 6 y 12 fases es por medio de conexiones especiales en los transformadores (máquinas eléctricas que se emplean para variar las tensiones en las redes eléctricas). Para comprender el funcionamiento de los sistemas eléctricos de potencia es por lo tanto esencial tener una buena formación en circuitos trifásicos. Afortunadamente, las técnicas utilizadas en la resolución de circuitos monofásicos estudiadas en el capítulo anterior pueden aplicarse directamente a los sistemas trifásicos. Es más, en muchos casos, los circuitos trifásicos se pueden reducir a esquemas monofásicos equivalentes, lo que facilita extremadamente los cálculos prácticos.

3.2. Generación de tensiones trifásicas

Consideremos el esquema de la Figura 3.1, donde existe un imán N-S fijo y dentro de él un cilindro (rotor) que se mueve a la velocidad angular ω rad/s impulsado por un sistema mecánico exterior. Este rotor tiene arrollado sobre él tres juegos de bobinas constituidos por los devanados AA', BB' y CC' que están separados entre sí 120° en el espacio (A, B y C representan los principios de las bobinas y A', B' y C' los finales correspondientes). Como quiera que las tres bobinas tienen el mismo número de espiras, y cada una de ellas gira con la misma velocidad angular ω , la f.e.m. inducida en cada devanado tendrá el mismo valor de pico, la misma forma y la misma frecuencia. Para cada arrollamiento, se obtendrá una onda, que como sabemos tendrá la forma sinusoidal, y de tal modo, que las tres tensiones resultantes estarán desfasadas 120° en el tiempo. En la Figura 3.2 se han representado estas tres tensiones. Se ha supuesto que el tiempo $t = 0$ la tensión en la bobina AA' es máxima (lo que corresponde para el caso de la Figura 3.1, el momento en el cual la superficie de la bobina AA' es horizontal, puesto que de acuerdo con la ley de inducción de Faraday, la f.e.m. es máxima cuando el flujo magnético es mínimo).

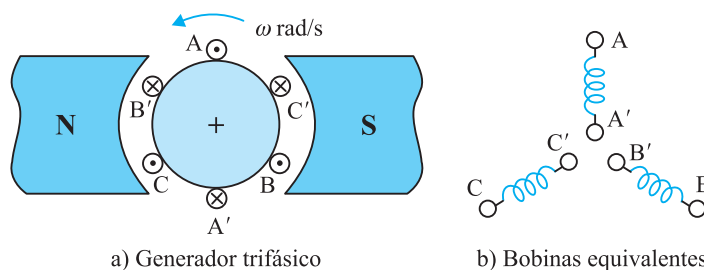


Figura 3.1 Generación de tensiones trifásicas

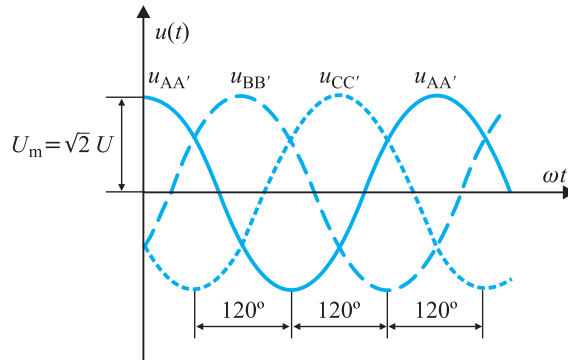


Figura 3.2 Representación de tensiones trifásicas en el dominio del tiempo

Las expresiones instantáneas de estas tres tensiones son las siguientes:

$$\begin{aligned} u_{AA'}(t) &= \sqrt{2} U \cos \omega t \\ u_{BB'}(t) &= \sqrt{2} U \cos (\omega t - 120^\circ) \\ u_{CC'}(t) &= \sqrt{2} U \cos (\omega t - 240^\circ) = \sqrt{2} U \cos (\omega t + 120^\circ) \end{aligned} \quad (3.1)$$

cada devanado en el que se produce una tensión sinusoidal se denomina **fase** y de ahí que el sistema aquí estudiado se denomine generador **trifásico** (no confundir la palabra fase, en el sentido que aquí se indica, es decir como componente de una de las tensiones generadoras, con ángulo de fase de una función sinusoidal, que se denomina también abreviadamente fase)¹.

La representación fasorial de las tensiones anteriores es la mostrada en la Figura 3.3, que corresponde a las siguientes expresiones matemáticas:

$$\underline{U}_{AA'} = U e^{j0^\circ} = U \angle 0^\circ; \underline{U}_{BB'} = U e^{-j120^\circ} = U \angle -120^\circ; \underline{U}_{CC'} = U e^{j120^\circ} = U \angle 120^\circ \quad (3.2)$$

El conjunto de tensiones (3.1) o (3.2) constituye un sistema denominado **simétrico** ya que está formado por tres tensiones sinusoidales del mismo valor eficaz U (o amplitud máxima $U_m = \sqrt{2} U$), la misma frecuencia y desfasados 120° entre sí.

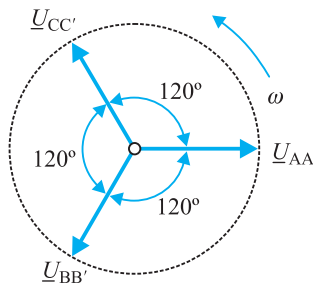


Figura 3.3 Fasores de tensiones trifásicas

¹ El término *fase* se aplica también a otros conceptos que aparecerán en el capítulo, por lo que debe interpretarse en cada momento según su contexto.

Obsérvese en la Figura 3.2 que en cualquier instante de tiempo se cumple:

$$u_{AA'}(t) + u_{BB'}(t) + u_{CC'}(t) = 0 \quad (3.3)$$

es decir la suma de los valores instantáneos de las tres tensiones es, en cada momento, igual a cero. La equivalencia de la ecuación (3.3) en valores fasoriales es:

$$\underline{U}_{AA'} + \underline{U}_{BB'} + \underline{U}_{CC'} = 0 \quad (3.4)$$

lo que se hace más evidente en el diagrama de la Figura 3.3. (Obsérvese, por ejemplo, que la suma de $\underline{U}_{BB'} + \underline{U}_{CC'}$ es igual a $-\underline{U}_{AA'}$, por lo que se cumple la relación (3.4) en cada momento considerado, ya que los fasores giran a la misma velocidad ω , permaneciendo invariable su posición relativa).

El orden en el que se suceden los valores máximos de las tensiones de cada una de las fases de un generador trifásico se denomina **secuencia de fases**. Con el rotor del generador girando, según se indica en la Figura 3.1a, la secuencia de fases es ABC. Es evidente que si se invierte el sentido de rotación del generador, la secuencia de fases también se invertirá. Como quiera, sin embargo, que los generadores siempre giran en el mismo sentido, la frecuencia de fases será invariable y debe señalarse de una forma adecuada. Un modo simple para determinar el sentido de sucesión de fases es recurrir a la representación fasorial. En la Figura 3.4 se representan los fasores de tensiones de dos sistemas trifásicos. El esquema de la Figura 3.4a corresponde a un sentido de sucesión de fases: A, B, C. Téngase en cuenta que los fasores giran a una velocidad angular ω en el sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que un observador situado en una posición fija (por ejemplo en el eje real) verá pasar los fasores de la Figura 3.4a en el sentido ABC, mientras que en el caso de la Figura 3.4b la secuencia será ACB. Se dice entonces que la sucesión de fases de la Figura 3.4a es de **secuencia directa o positiva**, mientras que el esquema de la Figura 3.4b corresponde a una **secuencia inversa o negativa** (en definitiva este último caso es equivalente a una sucesión ABC en el sentido horario, inverso o negativo). La secuencia de fases es de vital importancia en los sistemas de distribución de energía eléctrica, ya que determinan el sentido de rotación de los motores trifásicos. Por ejemplo si se intercambian dos tensiones de fase, se cambiará la secuencia, por lo que se invertirá el sentido de giro del motor.

El generador trifásico de la Figura 3.1 se representa generalmente por tres generadores de tensión con los valores señalados en (3.1) o (3.2), de tal manera que cada uno de ellos se

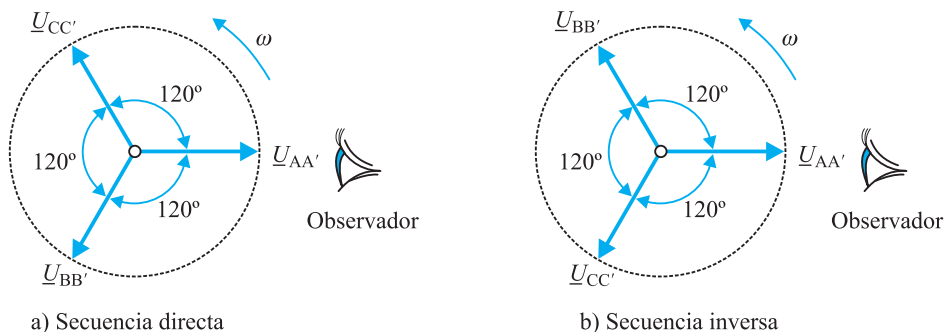


Figura 3.4 Fasores trifásicos de tensiones de secuencia directa y secuencia inversa

puede utilizar para alimentar sendas impedancias de carga: $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$, tal como se muestra en la Figura 3.5, en la que se han expresado los valores fasoriales de tensiones y corrientes². Se ha utilizado en esta figura la simbología de doble subíndice comentada en el Capítulo 1. Recuérdese que, de acuerdo con esta nomenclatura, una tensión $\underline{U}_{AA'}$ representa la d.d.p. entre los terminales A y A', o de A sobre A', lo que indica que A se toma con polaridad positiva respecto de A', lo que además está de acuerdo con el sentido físico de generación de tensión en los devanados de la Figura 3.1, puesto que A, B y C representan los principios de las bobinas y A', B', C', los finales correspondientes.

El circuito trifásico de la Figura 3.5 en el que cada fase del generador está unida a un receptor independiente de los demás y por medio de los conductores se denomina **circuito trifásico independiente**. Es evidente que esta disposición requiere un total de seis conductores para transmitir la energía del generador a los receptores. En los epígrafes siguientes se analizarán conexiones específicas que reducen el número de conductores para unir el generador con la carga, haciendo más económico de este modo el transporte de energía.

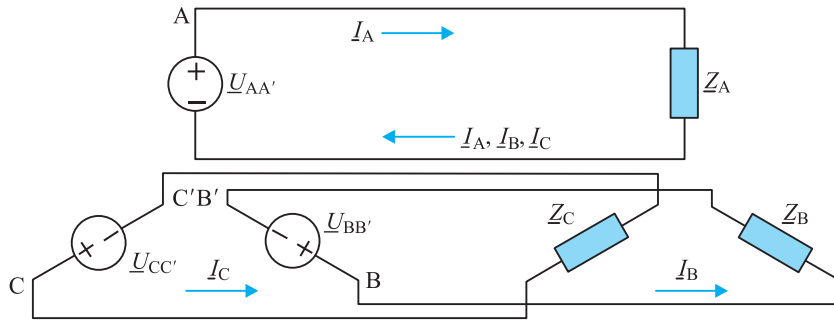


Figura 3.5 Alimentación independiente de tres cargas por medio de un generador trifásico

En el circuito de la Figura 3.5 se dispone, por consiguiente, de tres mallas independientes, dando lugar a unas corrientes de circulación:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{AA'}}{\underline{Z}_A} \quad ; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{BB'}}{\underline{Z}_B} \quad ; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CC'}}{\underline{Z}_C} \quad (3.5)$$

Es evidente que si las tensiones generadoras forman un sistema simétrico (ecuaciones 3.2), y además se cumple la igualdad de las impedancias de carga:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z} = Z \angle \varphi \quad (3.6)$$

entonces las corrientes (3.5) serán todas iguales en valor absoluto, y desfasadas en el mismo ángulo φ respecto a las tensiones correspondientes y por lo tanto separadas 120° entre sí, tal como se muestra en la Figura 3.6. De este modo los valores fasoriales de las corrientes suministradas por los generadores satisfacen la relación:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0 \quad (3.7)$$

² Por simplicidad se ha considerado, por ahora, que es despreciable la impedancia de las líneas de unión: generador-carga.

o en valores instantáneos:

$$i_A(t) + i_B(t) + i_C(t) = 0 \quad (3.8)$$

se dice entonces que las tres impedancias de carga (que según (3.6) son iguales en *módulo* y *fase*) constituyen un **sistema equilibrado**.

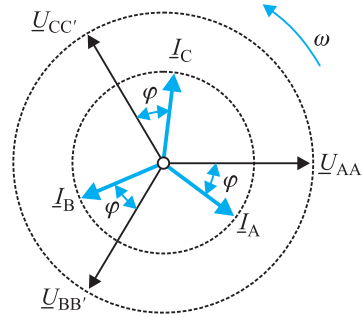


Figura 3.6 Fasores de tensiones y corrientes en un sistema trifásico equilibrado

Si las impedancias de carga son diferentes en módulo y (o) fase, las tres corrientes (3.5) serán desiguales por lo que la suma (3.7) o (3.8) será diferente de cero, se dice entonces que el receptor representa un **sistema desequilibrado**.

En lo que sigue se supondrá que las tensiones de generación son siempre simétricas (condición 3.2) y se harán estudios particulares para los sistemas equilibrados y desequilibrados en función de que las impedancias de carga sean iguales o no. Desde un punto de vista analítico, los sistemas equilibrados reúnen grandes ventajas, ya que lo que sucede en una fase, se repite en las otras dos con unos desfases de $\pm 120^\circ$. De este modo, es suficiente realizar los cálculos completos para una sola fase, lo que representa trabajar con el denominado **circuito equivalente monofásico**. Los sistemas desequilibrados sin embargo, al no tener estas propiedades de simetría, requieren un mayor esfuerzo analítico, ya que deben realizarse los cálculos simultáneamente para las tres fases. Afortunadamente y como ya veremos, los sistemas reales son prácticamente equilibrados, lo que simplificará enormemente los cálculos de los circuitos trifásicos.

■ 3.3. Conexión en estrella equilibrada

Un procedimiento para reducir el número de conductores que unen el generador con el receptor (carga) de la Figura 3.5, es utilizar un único conductor de retorno en lugar de los tres señalados, conectando a él los terminales finales de todas las fases del generador y de los receptores. En la Figura 3.7 se muestra el circuito correspondiente (en el que se han despreciado las impedancias de las líneas de unión entre el generador y la carga). Se dice entonces que tanto el generador como el receptor están conectados en **estrella** (y se simboliza con la letra Y). El sistema de la Figura 3.7 constituye una red trifásica estrella-estrella (Y-Y) de cuatro conductores. Los tres conductores externos se denominan **conductores de fase** y el de retorno se llama **conductor neutro**. Por convenio internacional, los conductores de fase se designan por las letras: R, S y T y es la nomenclatura que se ha expresado en

la Figura 3.7³. El terminal A corresponde a la fase R, el B a la S y el C a la T. El neutro se designa con la letra N (que es el punto común de A', B' y C') para distinguir los terminales entre el generador y el receptor, en la Figura 3.7 se han designado los de este con las mismas letras pero primadas «'» (aunque en este caso coinciden al no considerar impedancia en la línea).

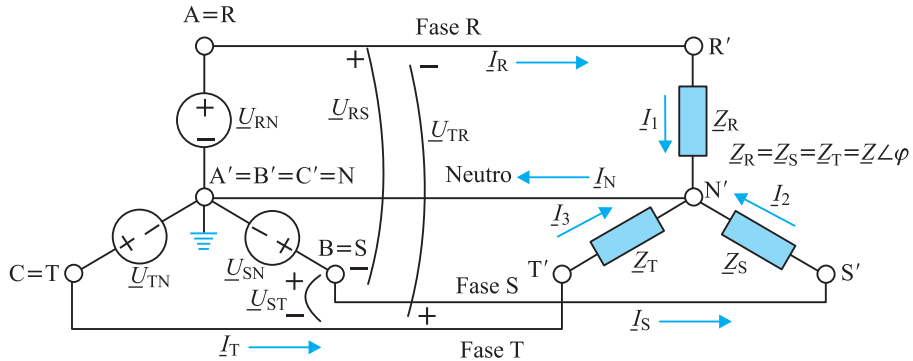


Figura 3.7 Sistema equilibrado Y-Y con neutro (a cuatro hilos)

Se denominan **tensiones simples** o **tensiones de fase**, las tres tensiones $\underline{U}_{RN}$, $\underline{U}_{SN}$ y $\underline{U}_{TN}$, de módulo U_F medidas entre cada conductor de fase y el punto neutro de la fuente (y son equivalentes a las tensiones $\underline{U}_{AA'}$, $\underline{U}_{BB'}$ y $\underline{U}_{CC'}$ del esquema de la Figura 3.5). Sus expresiones fasoriales para un sistema simétrico directo, tomando la fase R como referencia, serán de un modo análogo al indicado en (3.2):

$$\begin{aligned}\underline{U}_{RN} &= U_F e^{j0^\circ} = U_F \angle 0^\circ = U_F \quad ; \quad \underline{U}_{SN} = U_F e^{-j120^\circ} = U_F \angle -120^\circ = U_F \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \underline{U}_{TN} &= U_F e^{j120^\circ} = U_F \angle 120^\circ = U_F \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)\end{aligned}\quad (3.9)$$

generalmente el punto neutro del generador se toma como potencial de referencia y suele estar conectado a tierra por lo que $\underline{U}_N = 0$.

Se denominan **tensiones compuestas** o **tensiones de línea**, las tensiones medidas entre dos conductores de fase: $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$ y $\underline{U}_{TR}$. Las tensiones compuestas se pueden expresar respecto a las tensiones simples dando lugar a las siguientes relaciones:

$$\underline{U}_{RS} = \underline{U}_{RN} - \underline{U}_{SN} \quad ; \quad \underline{U}_{ST} = \underline{U}_{SN} - \underline{U}_{TN} \quad ; \quad \underline{U}_{TR} = \underline{U}_{TN} - \underline{U}_{RN} \quad (3.10)$$

las relaciones anteriores se determinan de un modo inmediato aplicando el segundo lema de Kirchhoff al circuito de la Figura 3.7. Las diferencias (3.10) se pueden obtener de un modo analítico, teniendo en cuenta (3.9) y así resulta:

$$\underline{U}_{RS} = \underline{U}_{RN} - \underline{U}_{SN} = U_F - U_F \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = U_F \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} U_F \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) \quad (3.11)$$

³ De acuerdo con el Reglamento Electrotécnico para Baja Tensión, aprobado en España por R.D. 842/2002 de 2 de agosto de 2002, los conductores de fase y el neutro se definen como *conductores activos*. Las fases también se denominan L1, L2 y L3, pero por motivos didácticos se ha preferido continuar con la nomenclatura clásica: R, S y T.

es decir:

$$\underline{U}_{RS} = \sqrt{3} U_F \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} U_F e^{j30^\circ} = \sqrt{3} (U_F \angle 0^\circ) e^{j30^\circ} = \sqrt{3} \underline{U}_{RN} e^{j30^\circ} \quad (3.12)$$

y de un modo análogo:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ST} &= \sqrt{3} U_F e^{-j90^\circ} = \sqrt{3} (U_F e^{-j120^\circ}) e^{j30^\circ} = \sqrt{3} \underline{U}_{SN} e^{j30^\circ} \\ \underline{U}_{TR} &= \sqrt{3} U_F e^{+j150^\circ} = \sqrt{3} (U_F e^{j120^\circ}) e^{j30^\circ} = \sqrt{3} \underline{U}_{TN} e^{j30^\circ} \end{aligned} \quad (3.13)$$

en la Figura 3.8 se muestra el diagrama de fasores correspondiente, en el que partiendo de las tensiones simples (3.9) y aplicando (3.10) se obtienen los resultados (3.12) y (3.13). ¡Comprobará el lector que este procedimiento fasorial es más intuitivo y práctico que el método analítico!

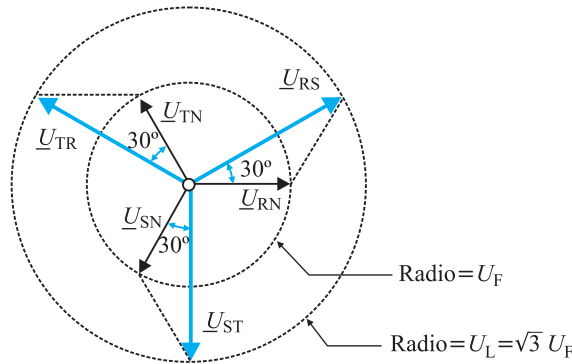


Figura 3.8 Diagrama fasorial de tensiones simples y compuestas en un sistema en estrella

Obsérvese tanto en las relaciones analíticas como fasoriales que las tensiones de línea forman también un sistema trifásico simétrico que está **adelantado 30°** respecto a las tensiones simples que comienzan por el mismo índice. Así en la Figura 3.8 se observa que $\underline{U}_{RS}$ está adelantada 30° respecto a la tensión simple $\underline{U}_{RN}$, lo que ya preveía el cálculo analítico expresado en (3.12); del mismo modo $\underline{U}_{ST}$ (o $\underline{U}_{TR}$), está adelantado 30° respecto de $\underline{U}_{SN}$ (o $\underline{U}_{TN}$). El módulo de las tensiones de línea U_L es según se muestra en (3.12) y (3.13), $\sqrt{3}$ veces el módulo U_F de las tensiones simples, es decir:

$$U_L = \sqrt{3} U_F \quad (3.14)$$

donde $U_L = |\underline{U}_{RS}| = |\underline{U}_{ST}| = |\underline{U}_{TR}|$ y $U_F = |\underline{U}_{RN}| = |\underline{U}_{SN}| = |\underline{U}_{TN}|$.

En las redes de distribución españolas, el módulo de las tensiones simples está normalizado en 230 V (antes 220 V), por lo que según (3.14) las tensiones de línea (cuando los generadores o transformadores están conectados en estrella) tienen un módulo de $230\sqrt{3} \approx 400$ V (antes $220\sqrt{3} \approx 380$ V). Hasta hace pocos años existían en España redes de distribución en áreas rurales, en las que la tensión simple era de 127 V, lo que correspondía a una tensión de línea de $127\sqrt{3} = 220$ V. Cuando se caracteriza una línea por una sola tensión, se refiere siempre a la **tensión de línea**. Así se dice: una red trifásica de 400 V (que da lugar a tensiones simples de $400/\sqrt{3} = 230$ V).

Si las cargas de la red de la Figura 3.7 son equilibradas se puede escribir:

$$\underline{Z}_R = \underline{Z}_S = \underline{Z}_T = \underline{Z} = Z \angle \varphi = Ze^{j\varphi} \quad (3.15)$$

como el generador y las cargas están unidos por una línea de impedancia despreciable se cumple:

$$\underline{U}_{RN} = \underline{U}_{R'N'} \quad ; \quad \underline{U}_{SN} = \underline{U}_{S'N'} \quad ; \quad \underline{U}_{TN} = \underline{U}_{T'N'} \quad (3.16)$$

las corrientes $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ de la Figura 3.7 que circulan por cada fase de la carga se denominan **corrientes de fase**. Los valores correspondientes se obtienen aplicando la ley de Ohm en alterna y teniendo en cuenta (3.16) resultando:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_R} = \frac{U_F e^{j0^\circ}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U_F}{Z} e^{j(0^\circ - \varphi)} = I_F e^{-j\varphi} \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_S} = \frac{U_F e^{-j120^\circ}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U_F}{Z} e^{j(-120^\circ - \varphi)} = I_F e^{-j\varphi} e^{-j120^\circ} \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{TN}}{\underline{Z}_T} = \frac{U_F e^{+j120^\circ}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U_F}{Z} e^{j(+120^\circ - \varphi)} = I_F e^{-j\varphi} e^{+j120^\circ} \end{aligned} \quad (3.17)$$

lo que indica que las corrientes de fase del receptor conectado en estrella forman un sistema trifásico equilibrado de corrientes cuyo módulo es: $I_F = U_F/Z$, desfasado un ángulo φ respecto del sistema de tensiones simples. En la Figura 3.9 se muestra este hecho.

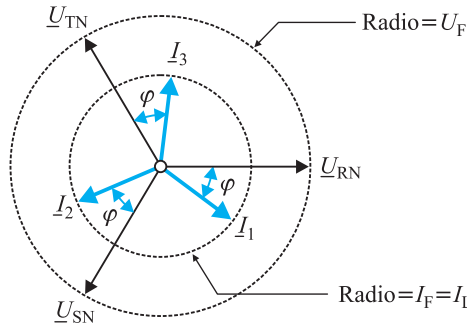


Figura 3.9 Diagrama fasorial de tensiones y corrientes de fase en un sistema en estrella

Se denominan **corrientes de línea** a las corrientes externas $\underline{I}_R, \underline{I}_S$ e $\underline{I}_T$ (Figura 3.7). Se observa en la Figura 3.7 que en el montaje de las cargas en estrella se cumple:

$$\underline{I}_R = \underline{I}_1 = I_F e^{-j\varphi} \quad ; \quad \underline{I}_S = \underline{I}_2 = I_F e^{-j\varphi} e^{-j120^\circ} \quad ; \quad \underline{I}_T = \underline{I}_3 = I_F e^{-j\varphi} e^{+j120^\circ} \quad (3.18)$$

si se denomina I_L al módulo de la corriente de línea, las ecuaciones (3.17) y (3.18) indican que:

$$I_L = I_F = \frac{U_F}{Z} \quad (3.19)$$

es decir en la conexión en estrella coinciden los valores de las corrientes de fase y de línea. La corriente que circula por el conductor neutro se obtiene aplicando el primer lema de Kirchhoff bien sea en el nudo N o en el N' resultando ser:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = \frac{U_F e^{-j\varphi}}{Z} [1 + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ}] = 0 \quad (3.20)$$

ya que la cantidad encerrada entre corchetes corresponde a la suma de tres fasores de módulo unidad y desfasados 120° , cuya suma es igual a cero. Se deduce en consecuencia que si la alimentación es simétrica y la carga está equilibrada no habrá *corriente de retorno* por el conductor neutro (de ahí procede su denominación). Por eso en este caso, este conductor es superfluo y no es necesario unir el punto neutro del generador con el punto neutro del receptor. Suprimiendo el conductor neutro, se obtiene un sistema estrella-estrella (Y-Y) a **tres hilos** (Figura 3.10). En esta red los puntos neutros N y N' están físicamente separados pero sin embargo están al mismo potencial de cero voltios siempre que la carga esté **equilibrada**. Veámoslo: Si se denomina $\underline{U}_{N'N}$ el potencial de N' respecto de N, se puede escribir:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{R'N'}}{\underline{Z}_R} = \frac{\underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{S'N'}}{\underline{Z}_S} = \frac{\underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{T'N'}}{\underline{Z}_T} = \frac{\underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}} \quad (3.21)$$

las corrientes anteriores se consideran positivas en el sentido generador-receptor, tal como se muestra en la Figura 3.10. Como quiera además que en el nudo N se cumple que $\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0$, resulta:

$$\frac{\underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}} + \frac{\underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}} + \frac{\underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}} = 0 \quad (3.22)$$

es decir:

$$\frac{1}{\underline{Z}} (\underline{U}_{RN} + \underline{U}_{SN} + \underline{U}_{TN}) - \frac{3\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}} = 0 \quad (3.23)$$

pero la suma comprendida entre paréntesis es igual a cero debido a que la alimentación es simétrica, de donde se deduce que:

$$\underline{U}_{N'N} = 0 \quad (3.24)$$

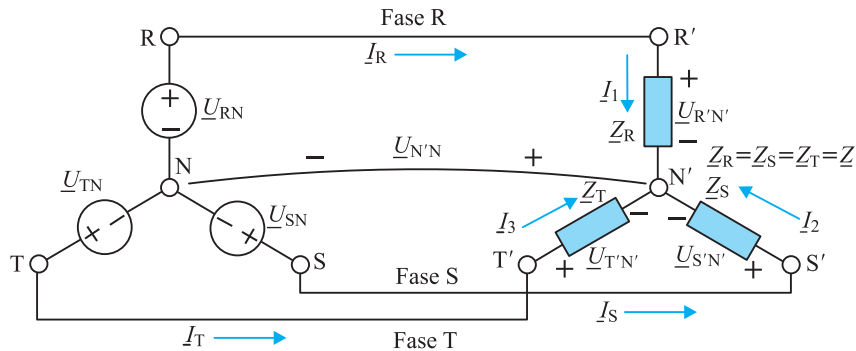


Figura 3.10 Sistema equilibrado Y-Y sin neutro (a tres hilos)

es decir los puntos N' y N de la Figura 3.10 aunque están físicamente separados tienen el mismo potencial.

La conexión estrella-estrella sin hilo neutro (Figura 3.10) supone un gran ahorro al dejar reducidos a tres los seis conductores iniciales que unían el generador con la carga. No obstante para poder prescindir del hilo neutro, las tres cargas de la Figura 3.10 deben ser idénticas, ya que de no serlo la ausencia del hilo neutro ocasionaría el desequilibrio de tensiones en las tres cargas (ver Epígrafe 3.5).

La red de la Figura 3.7 se denomina **sistema trifásico a cuatro hilos**. En estos sistemas, la sección del neutro acostumbra a ser la mitad (a veces igual) a la de los otros conductores de la línea (fases). El sistema trifásico a cuatro hilos es muy empleado en las redes de distribución de baja tensión para suministro de energía eléctrica en locales comerciales, pequeñas industrias e instalaciones domésticas. En la Figura 3.11 se representa el esquema de la instalación eléctrica de una pequeña industria. La acometida general constituye la fuente generadora que proporciona la empresa suministradora (que procede de los transformadores ubicados en la zona). Inmediatamente después de la entrada del cable de 4 hilos al edificio se colocan unos fusibles en todas las fases de la red para protegerla contra los cortocircuitos. Entre las diferentes fases de entrada y el hilo neutro se distribuyen las cargas de alumbrado que son del tipo monofásico. Se debe procurar repartir estas cargas entre las diferentes fases, intentando conseguir un sistema equilibrado (por ejemplo en el caso de que sean cargas de alumbrado, incluyendo el mismo número de lámparas de la misma potencia por fase). Los motores eléctricos trifásicos se conectan a las tres fases (tienen tres hilos de unión) y constituyen por sí mismos cargas equilibradas ya que solicitan un módulo de corriente idéntico para todas las fases.

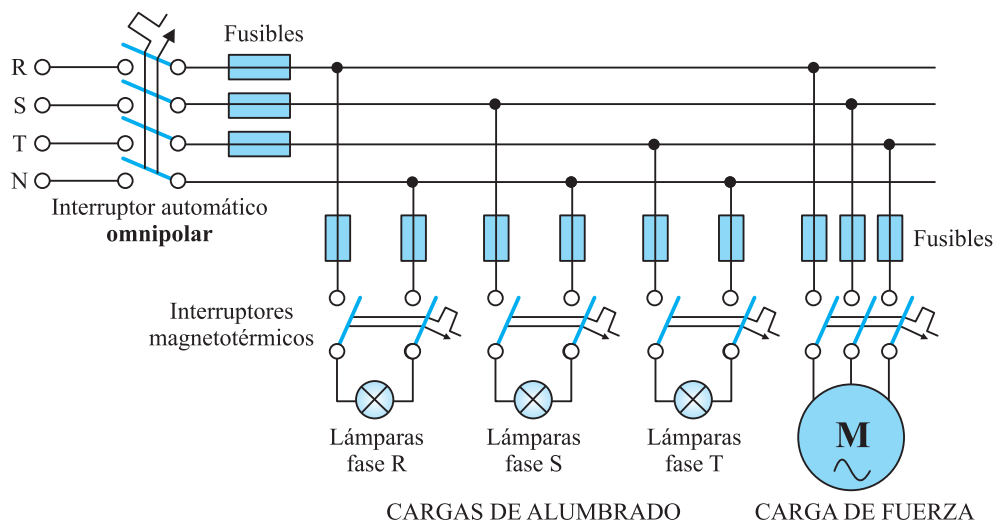


Figura 3.11 Red trifásica de distribución en baja tensión

Cada carga tiene sus propios fusibles de protección (o interruptores magnetotérmicos). A la entrada se debe colocar un interruptor general automático de **corte omnipolar (todos los polos: las tres fases y el neutro)** y que debe permitir su accionamiento manual, estando dotado de elementos de protección contra sobrecargas y cortocircuitos (artículo 1.2 de la Instrucción ITC BT-17 del Reglamento Electrotécnico para Baja Tensión). No se instala

fusible sobre el conductor neutro (ver Figura 3.11) pues la fusión de aquél (denominado técnicamente cortacircuito de fusible) equivale a la interrupción del hilo neutro y como resultado de ello, las tensiones correspondientes a los diversos grupos individuales de lámparas dejarían de ser iguales en el caso de que las cargas monofásicas no se hubieran repartido por igual en las tres fases (ver Epígrafe 3.5), de modo que en algunas lámparas la tensión sería insuficiente y en otras resultaría excesiva, lo que conducirá a su rápida destrucción (si el sistema estuviera perfectamente equilibrado, la apertura del hilo neutro no ejercería ninguna acción desfavorable).



Comentarios prácticos

Normativa legal en España

a) Tensiones nominales de distribución: De acuerdo con el Reglamento Electrotécnico para Baja Tensión, aprobado por Real Decreto 842/2002 de 2 de agosto de 2002 (BOE n.º 224 de 18 de septiembre de 2002), las tensiones nominales usualmente utilizadas en las distribuciones de corriente alterna son:

- 1) 230 V entre fases para las redes trifásicas de tres conductores.
- 2) 230 V entre fase y neutro, y 400 V entre fases, para las redes trifásicas de 4 conductores.

b) Identificación de los conductores por su color (Instrucción ITC-BT-19, artículo 2.2.4): Los conductores de la instalación deben ser fácilmente identificables, especialmente por lo que respecta al conductor neutro y al conductor de protección. Esta identificación se realizará por los colores que presenten sus aislamientos. Cuando exista conductor neutro en la instalación o se prevea para un conductor de fase su pase posterior a conductor neutro, se identificarán estos por el color azul claro. Al conductor de protección se le identificará por el color verde-amarillo. Todos los conductores de fase, o en su caso, aquellos para los que no se prevea su pase posterior a neutro, se identificarán por los colores marrón o negro. Cuando se considere necesario identificar tres fases diferentes, se utilizará el color gris. En resumen la identificación de los conductores por su color es la siguiente:

- Conductor de protección (PE): la combinación bicolor verde-amarillo.
- Conductor neutro (N): azul claro
- Conductores de fase: negro, marrón y gris.
- Conductor de protección y neutro (CPN): la combinación bicolor verde-amarillo y terminales azules claro o al contrario.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.1: Circuito equivalente monofásico

En la red trifásica de la Figura 3.12, la tensión compuesta al final de la línea es de 380 V. La carga es equilibrada y tiene una impedancia por fase de $38/\sqrt{3} \angle 45^\circ$ ohmios. Las impedancias de cada fase de la línea (incluso la del neutro) es de $1 + j2$ ohmios. La sucesión de fases es RST. Tomando la tensión $\underline{U}_{R'N'}$ como referencia, calcular: a) corrientes $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ e $\underline{I}_T$; b) tensiones $\underline{U}_{RN}$, $\underline{U}_{SN}$ y $\underline{U}_{TN}$; c) tensiones $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$ y $\underline{U}_{TR}$.

Solución

a) El módulo de la tensión compuesta al final de línea es de 380 V, lo que corresponde según (3.14) a una tensión simple de $380/\sqrt{3}$ voltios. Si se elige la tensión $\underline{U}_{R'N'}$ como referencia y teniendo en cuenta que el sentido de sucesión de las fases es RST, se tendrán las siguientes expresiones fasoriales:

$$\underline{U}_{R'N'} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{S'N'} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{T'N'} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle +120^\circ$$

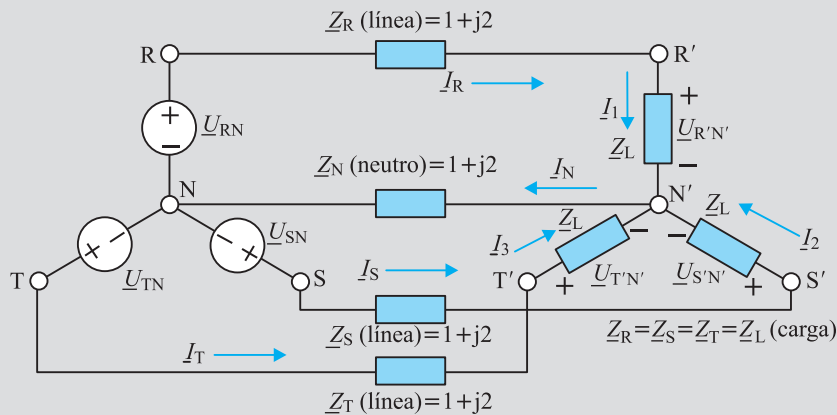


Figura 3.12 Circuito Y-Y equilibrado a cuatro hilos

En la Figura 3.13 se han representado los fasores correspondientes. Las corrientes $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$, que circularán por cada una de las impedancias de carga serán:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{R'N'}}{\underline{Z}_L} = \frac{380/\sqrt{3} \angle 0^\circ}{38/\sqrt{3} \angle 45^\circ} = 10 \angle -45^\circ ; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{S'N'}}{\underline{Z}_L} = 10 \angle -165^\circ ; \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{T'N'}}{\underline{Z}_L} = 10 \angle +75^\circ$$

que forman un sistema simétrico ya que la carga está equilibrada. Los valores de las corrientes de las líneas coinciden con las de fase.

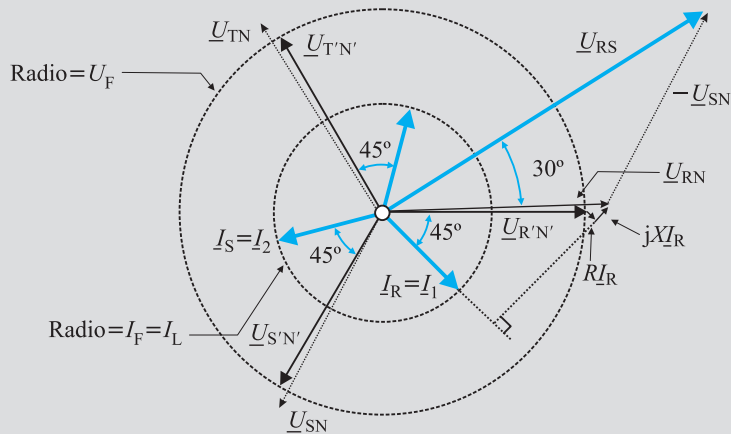


Figura 3.13 Diagrama fasorial de tensiones y corrientes

De acuerdo con la Figura 3.12, se puede escribir:

$$\underline{I}_R = \underline{I}_1 = 10 \angle -45^\circ ; \quad \underline{I}_S = \underline{I}_2 = 10 \angle -165^\circ ; \quad \underline{I}_T = \underline{I}_3 = 10 \angle +75^\circ \text{ amperios}$$

en la Figura 3.13 se han representado los fasores anteriores. La corriente del neutro será igual a cero, ya que el sistema es simétrico y equilibrado. Comprobémoslo:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 10 \angle -45^\circ + 10 \angle -165^\circ + 10 \angle +75^\circ = 0$$

b) La tensión fase-neutro a principio de línea, por ejemplo para la fase R (fase de referencia), se obtiene aplicando el segundo lema de Kirchhoff a la malla $R - Z_R - R' - Z_L - N' - Z_N - N$, de la Figura 3.12, lo que da lugar a:

$$\underline{U}_{RN} = \underline{U}_{R'N'} + \underline{Z}_R \underline{I}_R + \underline{Z}_N \underline{I}_N = \underline{U}_{R'N'} + \underline{Z}_R \underline{I}_R$$

es importante que el lector se dé cuenta de que la impedancia del neutro no interviene en el cálculo de la tensión al principio de línea ya que al estar el sistema equilibrado se cumplirá siempre que $\underline{I}_N = 0$, o de otro modo que $\underline{U}_{N'N} = \underline{Z}_N \underline{I}_N = 0$, es decir los puntos N y N' tienen el mismo potencial, y por ello, ambos puntos coinciden a efectos eléctricos. De este modo el circuito equivalente eléctrico de la Figura 3.12 es el mostrado en la Figura 3.14, donde se han unido los neutros N y N' por un hilo de impedancia nula, lo que facilita la comprensión de que N y N' son el mismo punto.

En este nuevo circuito la ecuación que relaciona la tensión a principio de línea con la tensión al final de línea para la fase R es:

$$\underline{U}_{RN} = \underline{U}_{R'N'} + \underline{Z}_R \underline{I}_R$$

que coincide como era de esperar con la deducida anteriormente. De un modo análogo las ecuaciones para las otras dos fases serían:

$$\underline{U}_{SN} = \underline{U}_{S'N'} + \underline{Z}_S \underline{I}_S \quad ; \quad \underline{U}_{TN} = \underline{U}_{T'N'} + \underline{Z}_T \underline{I}_T$$

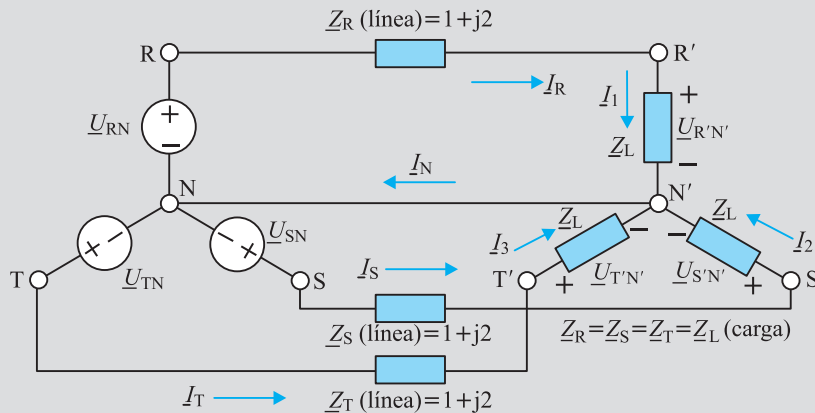


Figura 3.14 Conexión Y-Y equilibrada

En la práctica, debido a las simetrías de las ecuaciones anteriores (para las fases R, S y T), no es necesario realizar los cálculos para las tres fases, sino que es suficiente hacerlos para una, por ejemplo para la fase de referencia R. La idea consiste en dibujar el denominado **circuito equivalente monofásico** del sistema trifásico, el cual se obtiene considerando únicamente la fase R del circuito de la Figura 3.14 lo que da lugar al circuito de la Figura 3.15. En este circuito se cumple la relación:

$$\underline{U}_{RN} = \underline{U}_{R'N'} + \underline{Z}_R \underline{I}_R = \underline{U}_{R'N'} + (R + jX) \underline{I}_R$$

que como era de esperar coincide con la ya calculada en esta fase. En realidad el lector podría ahorrarse el esquema de la Figura 3.14 y haber obtenido directamente el equivalente monofásico de la Figura 3.15 a partir del circuito de la Figura 3.12, dándose cuenta que al estar el sistema equilibrado los neutros N y N' coinciden. Al sustituir los valores numéricos, se tiene para la fase R:

$$\underline{U}_{RN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (1 + j2) \cdot 10 \angle -45^\circ = 240,7 \angle 1,7^\circ \text{ voltios}$$

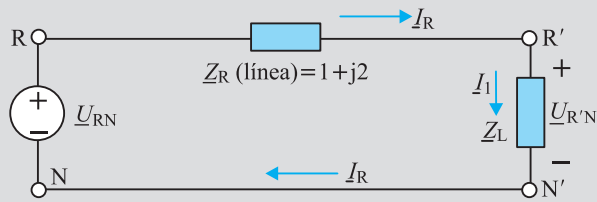


Figura 3.15 Circuito equivalente monofásico

La tensión anterior se ha representado en la Figura 3.13. A partir de este valor, se pueden escribir directamente los resultados para las otras dos fases. Como el sistema es de secuencia directa, la tensión $\underline{U}_{SN}$ tendrá el mismo valor modular que $\underline{U}_{RN}$ pero irá retrasada 120° de esta; de un modo análogo la tensión $\underline{U}_{TN}$ tendrá el mismo módulo que $\underline{U}_{RN}$ pero irá adelantada 120° de la misma. Es decir:

$$\underline{U}_{RN} = 240,7 \angle 1,7^\circ \Rightarrow \underline{U}_{SN} = 240,7 \angle (1,7^\circ - 120^\circ) = 240,7 \angle -118,3^\circ;$$

$$\underline{U}_{TN} = 240,7 \angle (1,7^\circ + 120^\circ) = 240,7 \angle 121,7^\circ$$

en la Figura 3.13 se han dibujado $\underline{U}_{SN}$ y $\underline{U}_{TN}$ en trazo discontinuo para indicar que no se han calculado directamente sino por las propiedades de simetría del sistema equilibrado.

c) Las tensiones compuestas a principio de línea se pueden calcular aplicando (3.10). No obstante teniendo en cuenta que el sistema está equilibrado, es más simple obtener $\underline{U}_{RS}$ a partir de (3.12):

$$\underline{U}_{RS} = \sqrt{3} \cdot 240,7 \angle 1,7^\circ \cdot e^{j30^\circ} = 416,9 \angle 31,7^\circ \text{ voltios}$$

Conocida la tensión anterior $\underline{U}_{RS}$, se pueden deducir las otras tensiones compuestas $\underline{U}_{ST}$ y $\underline{U}_{TR}$, directamente, ya que deberán tener el mismo módulo que $\underline{U}_{RS}$, pero con un desfase de $\pm 120^\circ$ respecto a esta, y así resulta:

$$\underline{U}_{ST} = 416,9 \angle (31,7^\circ - 120^\circ) = 416,9 \angle -88,3^\circ \text{ V} ; \quad \underline{U}_{TR} = 416,9 \angle (31,7^\circ + 120^\circ) = 416,9 \angle +151,7^\circ \text{ V}$$

téngase en cuenta que si la secuencia de fases es RST, el orden correspondiente a las tensiones de línea es: RS – ST – TR. (Obsérvese el orden cíclico de las combinaciones de las dos letras). Por ello $\underline{U}_{ST}$ se retrasa 120° de $\underline{U}_{RS}$ y $\underline{U}_{TR}$ se retrasa otros 120° de $\underline{U}_{ST}$, es decir se adelanta 120° de $\underline{U}_{RS}$. En la Figura 3.13 solamente se ha dibujado la tensión de línea $\underline{U}_{RS}$.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.2

En la red trifásica a tres hilos de la Figura 3.16, la tensión compuesta al principio de línea es de 380 V. (Por simplicidad y como es habitual en el estudio de los circuitos trifásicos, no se dibujan en la Figura 3.16 los generadores de tensión de la alimentación sino solamente sus terminales externos: las fases R, S y T, y en su caso el neutro N). La carga está equilibrada y tiene una impedancia por fase de $10 + j10 \Omega$. Los tres conductores de la línea tienen una impedancia de $1 + j1 \Omega$. La sucesión de fases es RST. Calcular: a) módulo de las corrientes de línea; b) módulo de la tensión compuesta en la carga.

Solución

a) Al estar la carga equilibrada, los neutros N y N' coinciden (incluso aunque no exista el hilo neutro como aquí sucede) por lo que se pueden facilitar los cálculos utilizando el circuito equivalente monofásico (esquema por fase), dando lugar para la fase R al circuito de la Figura 3.17. En este circuito se cumple:

$$\underline{U}_{RN} = \underline{U}_{R'N'} + \underline{Z}_R \underline{I}_R = \underline{Z}_L \underline{I}_R + \underline{Z}_R \underline{I}_R = (\underline{Z}_L + \underline{Z}_R) \underline{I}_R$$

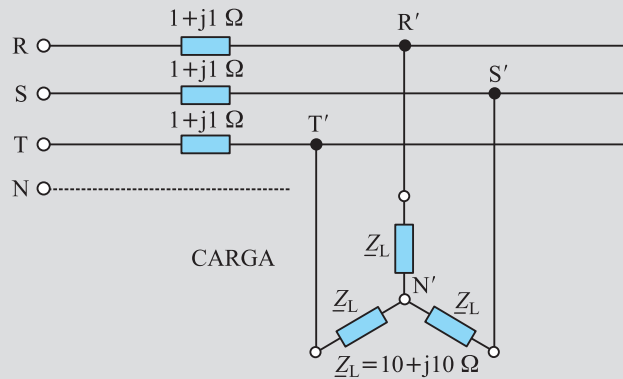


Figura 3.16 Carga en estrella equilibrada con impedancia de línea

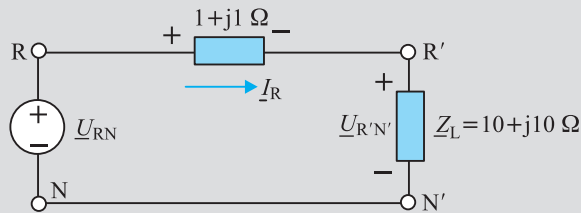


Figura 3.17 Circuito equivalente monofásico

si se toma la tensión al principio de línea como referencia se tiene:

$$\underline{U}_{RN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ$$

lo que da lugar a una corriente para la fase R:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{(10 + j10) + (1 + j1)} = 14,1 \angle -45^\circ \text{ A}$$

es decir el módulo de las corrientes de línea es $I_L = 14,1 \text{ A}$.

b) La tensión $\underline{U}_{R'N'}$ en el receptor vendrá expresada en el circuito de la Figura 3.17 por:

$$\underline{U}_{R'N'} = \underline{Z}_L \underline{I}_R = (10 + j10) 14,1 \angle -45^\circ = 200 \angle 0^\circ$$

por lo que la tensión simple en la carga será $U_F = 200 \text{ V}$, y la tensión de línea correspondiente será:

$$U_L = \sqrt{3} 200 = 346,1 \text{ V}$$

El lector observará que el circuito equivalente monofásico nos da la información básica que se desea y no es necesario hacer los cálculos de todas las fases. La fase R es suficiente para determinar todas las relaciones que se producen en el circuito.

3.4. Conexión en triángulo equilibrado

Si conectamos tres impedancias de carga $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ y $\underline{Z}_3$ directamente entre los conductores de una línea trifásica sin conductor neutro que sale de los terminales de un generador trifásico, se obtiene la conexión de receptores en **triángulo** (Figura 3.18).

En este montaje en triángulo (que se simboliza con la letra griega Δ) no se necesita distinguir entre tensiones de fase y de línea, ya que la tensión entre el principio y fin de cada fase (tensión de fase) del **receptor** representa al mismo tiempo la tensión de línea. Es decir en el esquema de la Figura 3.18 se cumple:

$$\underline{U}_{R'S'} = \underline{U}_{RS} \quad ; \quad \underline{U}_{S'T'} = \underline{U}_{ST} \quad ; \quad \underline{U}_{T'R'} = \underline{U}_{TR} \quad (3.25)$$

o en forma modular:

$$U_{F\Delta} = U_L \quad (3.26)$$

donde $U_{F\Delta}$ representa la tensión de cada una de las fases del triángulo, es decir:

$$U_{F\Delta} = |\underline{U}_{R'S'}| = |\underline{U}_{S'T'}| = |\underline{U}_{T'R'}| \quad (3.27)$$

y U_L es el módulo de las tensiones compuestas del generador:

$$U_L = |\underline{U}_{RS}| = |\underline{U}_{ST}| = |\underline{U}_{TR}| \quad (3.28)$$

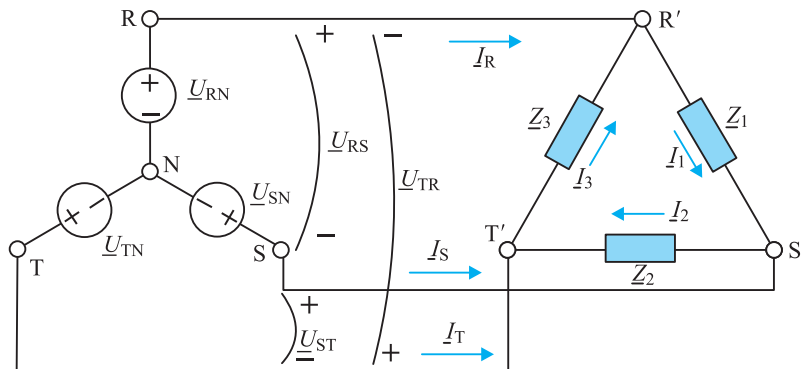


Figura 3.18 Carga equilibrada conectada en triángulo

Ahora bien, la tensión de línea U_L está relacionada con la tensión simple de los generadores U_F por la relación (3.14). De este modo en el circuito de la Figura 3.18 se cumple:

$$U_{F\Delta} = U_L = \sqrt{3} U_F \quad (3.29)$$

En la Figura 3.19 se han representado las tensiones simples del generador $\underline{U}_{RN}$, $\underline{U}_{SN}$, $\underline{U}_{TN}$ de módulo U_F y las tensiones de línea $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$, $\underline{U}_{TR}$ que son iguales a las tensiones simples de la carga en triángulo $\underline{U}_{R'S'}$, $\underline{U}_{S'T'}$, $\underline{U}_{T'R'}$ de módulo $U_{F\Delta} = U_L = \sqrt{3} U_F$. Se observa que, como ya se indicó en la Figura 3.8, las tensiones de línea forman un sistema

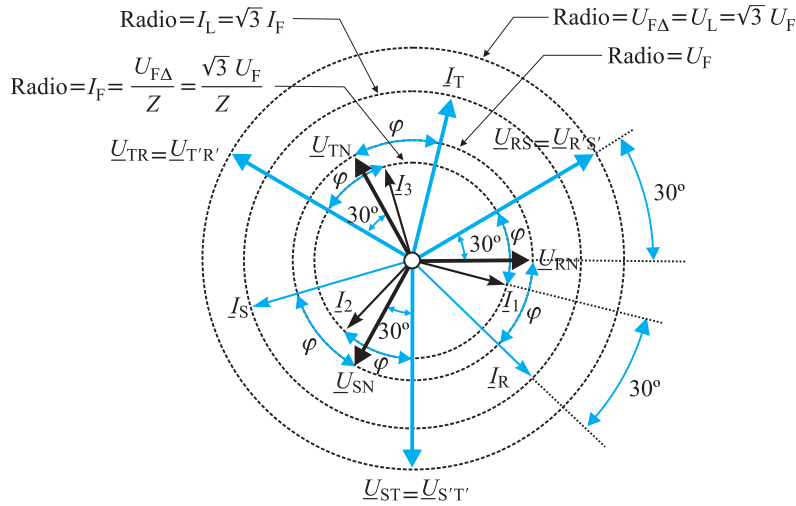


Figura 3.19 Diagrama fasorial de tensiones y corrientes en un sistema en triángulo equilibrado

trifásico simétrico que está adelantado 30° respecto a las tensiones simples del generador. Si las cargas del triángulo están equilibradas, se cumple:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = Z e^{j\varphi} \quad (3.30)$$

de este modo se obtienen unas **corrientes de fase** en el receptor $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ e $\underline{I}_3$ cuyos **sentidos positivos**, para una sucesión de fases RST, se eligen de R' a S', de S' a T' y de T' a R', tal como se muestra en la Figura 3.18 y cuyos valores son:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{R'S'}}{\underline{Z}} ; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{S'T'}}{\underline{Z}} ; \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{T'R'}}{\underline{Z}} \quad (3.31)$$

estas corrientes se pueden expresar en función de la tensión simple del generador U_F , teniendo en cuenta (3.12), (3.13) y (3.25) dando lugar a:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{RS}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{3} U_F e^{j30^\circ}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{\sqrt{3} U_F}{Z} e^{j(30^\circ - \varphi)} = I_F e^{j(30^\circ - \varphi)} \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{ST}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{3} U_F e^{-j90^\circ}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{\sqrt{3} U_F}{Z} e^{j(-90^\circ - \varphi)} = I_F e^{j(-90^\circ - \varphi)} \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{TR}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{3} U_F e^{j150^\circ}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{\sqrt{3} U_F}{Z} e^{j(150^\circ - \varphi)} = I_F e^{j(150^\circ - \varphi)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

las expresiones anteriores indican que si la carga está equilibrada, se obtiene un sistema trifásico simétrico de corrientes de fase, de módulo:

$$I_F = \frac{U_L}{Z} = \frac{\sqrt{3} U_F}{Z} \quad (3.33)$$

que se retrasa un ángulo de φ grados (que es el argumento de la impedancia) respecto a las tensiones de línea. En la Figura 3.19 se aprecia este hecho.

Por la línea de unión generador-receptor circulan unas **corrientes de línea** $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$ que se consideran positivas en el sentido generador-carga, tal como se muestra en la Figura 3.18. Los valores correspondientes se pueden calcular aplicando el primer lema de Kirchhoff a los nudos R', S' y T' de la carga, resultando:

$$\underline{I}_R = \underline{I}_1 - \underline{I}_3 \quad ; \quad \underline{I}_S = \underline{I}_2 - \underline{I}_1 \quad ; \quad \underline{I}_T = \underline{I}_3 - \underline{I}_2 \quad (3.34)$$

en la Figura 3.19 se muestran las diferencias fasoriales anteriores, que se pueden determinar de un modo analítico, teniendo en cuenta (3.32) y así resulta:

$$\underline{I}_R = \underline{I}_1 - \underline{I}_3 = I_F e^{j(30^\circ - \varphi)} - I_F e^{j(150^\circ - \varphi)} = I_F e^{-j\varphi} (e^{j30^\circ} - e^{j150^\circ}) \quad (3.35)$$

es decir:

$$\underline{I}_R = I_F e^{-j\varphi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} I_F e^{-j\varphi} \quad (3.36)$$

o de otro modo teniendo en cuenta (3.32):

$$\underline{I}_R = \sqrt{3} I_F e^{-j\varphi} = \sqrt{3} [I_F e^{j(30^\circ - \varphi)}] e^{-j30^\circ} = \sqrt{3} \underline{I}_1 e^{-j30^\circ} \quad (3.37)$$

y de una forma análoga para las otras corrientes:

$$\begin{aligned} \underline{I}_S &= \sqrt{3} I_F e^{-j\varphi} e^{-j120^\circ} = \sqrt{3} [I_F e^{j(-90^\circ - \varphi)}] e^{-j30^\circ} = \sqrt{3} \underline{I}_2 e^{-j30^\circ} \\ \underline{I}_T &= \sqrt{3} I_F e^{-j\varphi} e^{j120^\circ} = \sqrt{3} [I_F e^{j(150^\circ - \varphi)}] e^{-j30^\circ} = \sqrt{3} \underline{I}_3 e^{-j30^\circ} \end{aligned} \quad (3.38)$$

se observa en las ecuaciones (3.37) y (3.38) y de un modo más descriptivo en la Figura 3.19 que las tres corrientes de línea $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ e $\underline{I}_T$ forman un sistema trifásico simétrico que está **retrasado 30°** respecto a las corrientes de fase que forman los minuendos de (3.34). Es decir la corriente $\underline{I}_R$ se retrasa 30° de $\underline{I}_1$; $\underline{I}_S$ se retrasa 30° respecto $\underline{I}_2$, e $\underline{I}_T$ se retrasa 30° respecto de $\underline{I}_3$. El módulo de estas corrientes de línea I_L es según indican las ecuaciones (3.37) y (3.38), $\sqrt{3}$ veces el módulo I_F de las corrientes simples, es decir:

$$I_L = \sqrt{3} I_F \quad ; \quad I_L = |\underline{I}_R| = |\underline{I}_S| = |\underline{I}_T| \quad \text{y} \quad I_F = |\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| \quad (3.39)$$

Debido al hecho de que las tensiones compuestas se adelantan 30° respecto a las tensiones simples del generador y de que las corrientes compuestas o de línea se retrasan 30° respecto de las corrientes de fase del receptor, **el ángulo φ que forman las tensiones compuestas con las corrientes de fase, es el mismo que el que forman las tensiones simples con las corrientes de línea**. Estas conclusiones se aprecian fácilmente en el diagrama fasorial de la Figura 3.19. Así se observa que la tensión compuesta $\underline{U}_{RS}$ está desfasada φ grados (el argumento de la impedancia) con la corriente simple $\underline{I}_1$, y este mismo ángulo φ es el que forman la tensión simple $\underline{U}_{RN}$ del generador con la corriente de línea $\underline{I}_R$, y de un modo análogo se obtienen los mismos resultados para las otras dos fases. Es importante que el lector retenga estos resultados (que obviamente solamente son válidos en circuitos equili-

brados) ya que permiten representar directamente las **corrientes de línea respecto de las tensiones simples del generador** sin necesidad de dibujar las corrientes simples.

Otro procedimiento para determinar directamente las corrientes de línea $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ e $\underline{I}_T$ sin necesidad de calcular las corrientes de fase $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ e $\underline{I}_3$ es sustituir la carga en triángulo por una estrella equivalente. De acuerdo con el Epígrafe 1.11.3 si se denomina $\underline{Z}$ la impedancia compleja por fase de la carga en triángulo, la impedancia por fase equivalente en estrella $\underline{Z}_Y$ es igual a:

$$\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}}{3} = \frac{\underline{Z}e^{j\varphi}}{3} \quad (3.40)$$

de este modo el circuito trifásico de la Figura 3.18 se transforma en el de la Figura 3.20. Al ser la carga equilibrada el punto neutro N' coincide con el neutro del generador N . Trabajando con el circuito equivalente monofásico, se obtiene para la fase R:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RN}}{\frac{\underline{Z}}{3}} = \frac{\underline{U}_F e^{j0^\circ}}{\frac{\underline{Z}}{3} e^{j\varphi}} = 3 \frac{V_F}{\underline{Z}} e^{-j\varphi} \quad (3.41)$$

y denominando I_F al módulo de la corriente de fase del triángulo, como se hizo en (3.33) y cuyo valor es:

$$I_F = \sqrt{3} \frac{U_F}{Z} \quad (3.42)$$

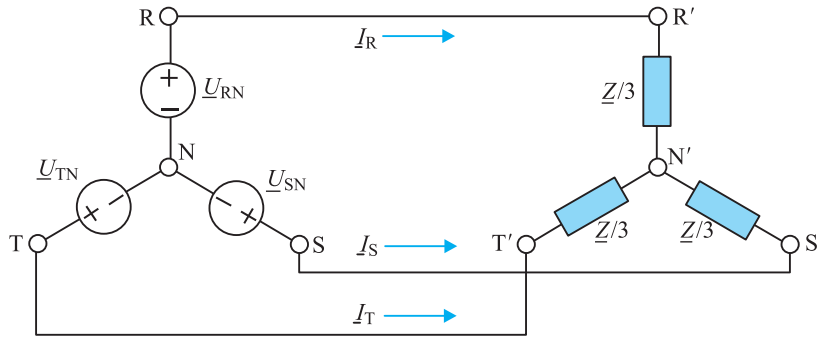


Figura 3.20 Reducción de una carga en triángulo a una red equivalente en estrella

La corriente de la fase R se puede escribir del siguiente modo:

$$\underline{I}_R = \sqrt{3} I_F e^{-j\varphi} \quad (3.43a)$$

y para las otras dos fases:

$$\underline{I}_S = \sqrt{3} I_F e^{-j\varphi} e^{-j120^\circ} \quad ; \quad \underline{I}_T = \sqrt{3} I_F e^{-j\varphi} e^{+j120^\circ} \quad (3.43b)$$

expresiones que coinciden con las (3.36) y (3.37) determinadas allí trabajando directamente con la carga en triángulo. Con la carga en estrella es más inmediato comprobar que las corrientes de línea $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ e $\underline{I}_T$, se desfasan el ángulo φ (el valor que indica la impedancia

de carga) respecto a las tensiones simples $\underline{U}_{RN}$, $\underline{U}_{SN}$ y $\underline{U}_{TN}$, del generador (se suponen despreciables las impedancias de la línea; si estas se consideran, el desfase de las corrientes se refieren a las tensiones simples de la carga $\underline{U}_{R'N'}$, $\underline{U}_{S'N'}$, $\underline{U}_{T'N'}$ en las que N' coincide con N). La posibilidad de que un receptor se pueda conectar en estrella o en triángulo, aumenta su adaptabilidad a diferentes condiciones de distribución de la energía eléctrica. Así, por ejemplo, si los arrollamientos de un motor están calculados para una tensión de fase de 230 V, entonces, utilizando la conexión en triángulo, este motor puede conectarse a una red cuya tensión de línea sea de 220 V; utilizando la conexión en estrella, el mismo motor puede conectarse a una red con una tensión compuesta o de línea de $230\sqrt{3} = 400$ V.



Comentarios prácticos

La conexión triángulo en un generador de c.a.

La conexión en triángulo puede aplicarse no solo a los receptores como aquí se ha señalado sino también a las fuentes de energía: generadores, transformadores, etc. En este caso cada fase de la fuente debe ser conectada directamente entre dos conductores de la línea de tres conductores. En la Figura 3.21 se muestra el esquema resultante, en el que $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$ y $\underline{U}_{TR}$ representan las tensiones de los generadores conectados en triángulo. Obsérvense con detalle las polaridades de los generadores que forman una malla o circuito cerrado en el que las fuentes aparecen conectadas en serie, de tal modo que el fin de la fase de uno (terminal de salida) se une con el principio de la fase siguiente (terminal de entrada). Puede parecer a primera vista que la conexión en serie de las tres fases del generador en triángulo cerrado es equivalente a un cortocircuito, como así sucedería, si las fuentes fueran de corriente continua. Pero como quiera que en el sistema trifásico se tiene en cualquier instante que $\underline{U}_{RS} + \underline{U}_{ST} + \underline{U}_{TR} = 0$, en el caso considerado no solo no hay corriente de cortocircuito sino que, en ausencia de carga, la corriente de circulación por la malla del triángulo es siempre cero. Sin embargo, esto es exacto únicamente cuando las tensiones de cada una de las fases del generador son rigurosamente sinusoidales, pues solo con esta condición es igual a cero la suma de las tensiones generadoras. Como quiera que en la práctica, las f.e.m.s. generadoras no son exactamente sinusoidales, no se satisface completamente la condición anterior ($\sum u_{\text{gen}} = 0$)⁴, por esta razón son raros los generadores conectados en triángulo. Por el contrario, en los transformadores se utiliza la conexión en triángulo con tanta frecuencia como la conexión en estrella. De todos modos si se plantea un problema con los generadores en triángulo, se pueden reducir a un grupo de generadores en estrella equivalente. Esta transformación se basa en un teorema publicado en 1933 por A. T. Starr (ver bibliografía al final del capítulo), que establece

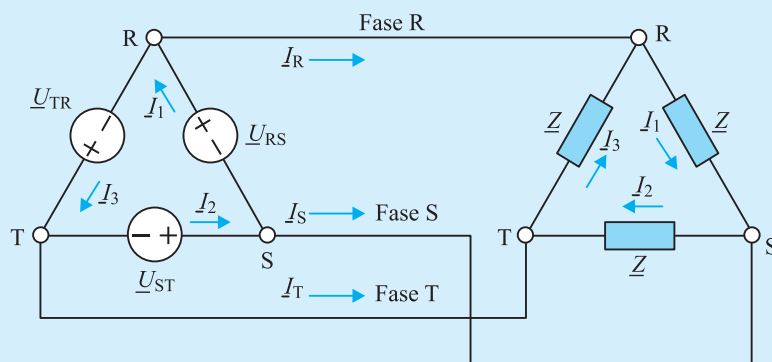


Figura 3.21 Conexión de generadores y cargas en triángulo

⁴ La onda periódica producida por cada fase del alternador se descompone en serie de Fourier. La suma de los armónicos fundamentales de las tres fases es igual a cero pero no así los del tercer armónico, que se suman en fase y por ello se puede producir una corriente de circulación del tercer armónico.

lo siguiente: Cualquier red activa con tres terminales accesibles se puede sustituir por tres generadores reales de tensión (es decir con impedancias internas en serie), conectados en estrella o triángulo, lo que representa una generalización tanto de los teoremas de Thévenin como de Kennelly.

Si en lo que concierne a la aplicación que aquí se comenta, si se tiene una red de generadores reales conectados en triángulo se pueden transformar a generadores reales conectados en estrella, y las relaciones de equivalencia se obtienen igualando las tensiones existentes entre los terminales R y S, S y T y T y R. Debe señalarse que existen infinitas soluciones para realizar esta transformación, ya que puede elegirse arbitrariamente la posición del centro de la estrella para determinar las f.e.m.s. de los generadores correspondientes. En el caso normal de que los generadores en triángulo formen un sistema simétrico (tres tensiones iguales desfasadas 120°), entonces las tensiones de los generadores en estrella son las tensiones simples o de fase que se mostraban en la Figura 3.8. En cuanto a las impedancias en serie, las equivalencias se realizan mediante la aplicación del teorema de Kennelly y en el caso particular de que estas sean iguales, se obtiene la ecuación de transformación clásica $\underline{Z}_Y = \underline{Z}_\Delta/3$.

Con carga equilibrada (ver Figura 3.21), cuando las corrientes de línea $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ y $\underline{I}_T$, son iguales en módulo y desfasadas entre sí 120° , la corriente de fase de la fuente es:

$$I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \quad (a)$$

donde $I_L = |I_R| = |I_S| = |I_T|$ e $I_F = |I_1| = |I_2| = |I_3|$. De aquí se deduce que, si tanto el generador como la carga están en triángulo, tal como se señala en la Figura 3.21 (y se trata de una carga equilibrada), las corrientes de las fases de las fuentes que están unidas a dos terminales de línea coinciden con las del receptor unido a esos mismos terminales. Así la corriente $\underline{I}_1$ que circula de S a R en la Figura 3.21 es la misma que la $\underline{I}_1$ que circula entre R y S en el receptor, y del mismo modo para $\underline{I}_2$ e $\underline{I}_3$.

En definitiva, en los circuitos trifásicos se pueden plantear cuatro tipos de problemas: 1) generadores conectados en estrella-receptores en estrella; 2) generadores en estrella y receptores en triángulo; 3) generadores en triángulo y receptores en estrella; 4) generadores en triángulo y receptores en triángulo. Como quiera que en la mayoría de los casos el interés reside en el estudio de la distribución de tensiones y corrientes en el **lado receptor**, será indiferente la conexión del generador, lo que sin embargo será preciso conocer es el sentido de sucesión de fases y las tensiones que impone el generador en la red.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.3

La Figura 3.22 muestra una carga equilibrada de Δ conectada en triángulo alimentada por una red simétrica de secuencia positiva a través de una línea de impedancia $1 + j2 \Omega$ por hilo. 1) Si la tensión compuesta en el receptor es de 380 V, calcular: a) magnitud de las corrientes de línea; b) módulo de la tensión compuesta a principio de línea. 2) Si la tensión compuesta a principio de línea es de 380 V, determinar: a) magnitud de las corrientes de línea; b) tensión compuesta en el receptor en triángulo. Sugerencia: Transformar la carga en triángulo en una estrella equivalente.

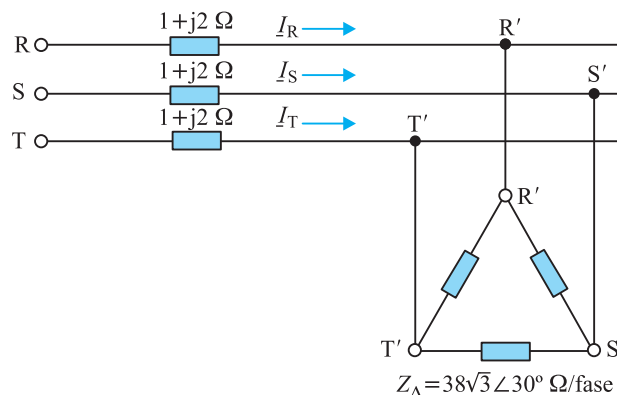


Figura 3.22 Carga trifásica equilibrada conectada en triángulo con impedancia de línea

Solución

1. a) La impedancia en estrella equivalente a la carga será:

$$\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3} = \frac{38\sqrt{3}\angle 30^\circ}{3} = \frac{38}{\sqrt{3}}\angle 30^\circ$$

de este modo el circuito equivalente monofásico de la Figura 3.22 es el indicado en la Figura 3.23. Obsérvese en esta figura, que se ha trazado un hilo neutro imaginario de impedancia nula entre el neutro N del generador y el neutro N' del receptor, cuando ni siquiera existe ninguno de ellos en la Figura 3.22. Es indiferente que se disponga o no de neutros reales en la instalación. **Siempre que la red esté equilibrada, será posible dibujar un circuito equivalente monofásico con el que realizar los cálculos.**

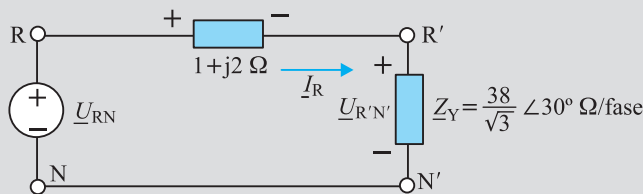


Figura 3.23 Circuito equivalente monofásico

Si en el circuito de la Figura 3.23 se toma la tensión $\underline{U}_{R'N'}$ en el receptor como origen de fases se puede escribir:

$$\underline{U}_{R'N'} = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ$$

de donde se deduce la corriente $\underline{I}_R$:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{R'N'}}{\underline{Z}} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ}{\frac{38}{\sqrt{3}}\angle 30^\circ} = 10\angle -30^\circ$$

que corresponde a una corriente de línea $I_L = 10$ amperios.

1. b) La tensión simple $\underline{U}_{RN}$ a principio de línea se obtiene aplicando el segundo lema de Kirchhoff al circuito de la Figura 3.23, resultando:

$$\underline{U}_{RN} = \underline{U}_{R'N'} + \underline{Z}_R \underline{I}_R = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ + (1 + j2)10\angle -30^\circ = 238,37\angle 2,96^\circ$$

por consiguiente, la tensión simple a principio de línea será igual a 238,37 V, lo que corresponde a una tensión compuesta $U_L = \sqrt{3} \cdot 238,37 = 412,87$ V.

2. a) Si lo que se conoce es la tensión compuesta a principio de línea, al elegir la tensión simple $\underline{U}_{RN}$ como referencia resulta:

$$\underline{U}_{RN} = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ$$

y en la malla de la Figura 3.23 se cumple:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{(1 + j2) + \frac{38}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ} = 9,2 \angle -32,96^\circ \text{ A}$$

de este modo la nueva magnitud de las corrientes de línea será de 9,2 A.

2. b) La tensión simple $\underline{U}_{R'N'}$ es igual a:

$$\underline{U}_{R'N'} = \underline{U}_{RN} - \underline{Z}_R \underline{I}_R = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ - (1 + j2) 9,2 \angle -32,96^\circ = 201,93 \angle -2,96^\circ$$

cuyo módulo es de 201,93 voltios y por consiguiente la tensión compuesta al final de línea será:

$$U_L = \sqrt{3} \cdot 201,93 = 349,75 \text{ V}$$



EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.4

Se dispone de la red trifásica de la Figura 3.24, alimentada por un sistema simétrico de secuencia directa. Se sabe que la tensión en bornes de la carga en estrella es 380 V (de línea). Tomando la tensión $\underline{U}_{R'N'}$ como referencia, calcular: a) magnitud de la tensión de la carga en triángulo; b) módulo de la tensión compuesta a principio de línea.

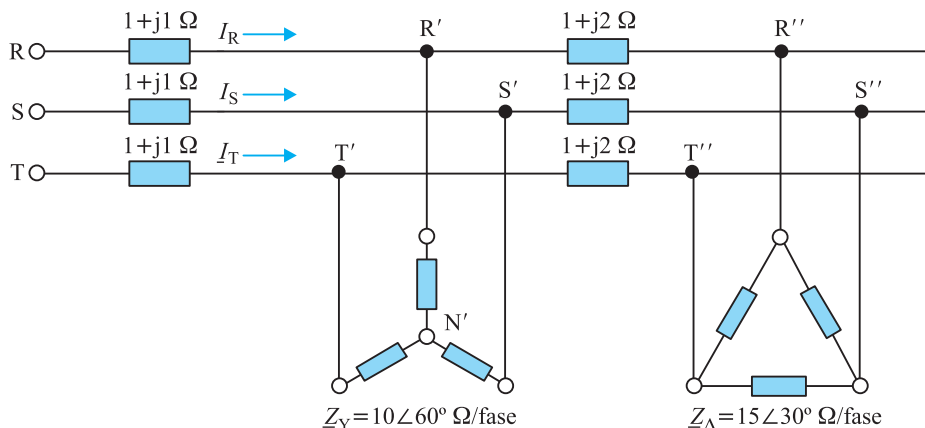


Figura 3.24 Cargas equilibradas en estrella y en triángulo con impedancias de línea

Solución

a) Si se transforma la carga en triángulo en estrella resulta:

$$\underline{Z}_{Y2} = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3} = \frac{15 \angle 30^\circ}{3} = 5 \angle 30^\circ$$

de esta forma, el circuito equivalente monofásico de la Figura 3.24 es el de la Figura 3.25.

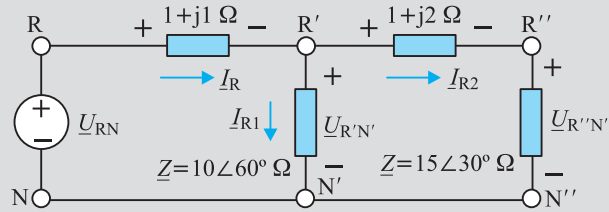


Figura 3.25 Circuito equivalente monofásico

En esta red si se elige la tensión simple en la carga central $10 \angle 60^\circ \Omega$ como referencia se tiene:

$$\underline{U}_{R'N'} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ$$

de este modo la corriente $\underline{I}_{R1}$ tiene un valor:

$$\underline{I}_{R1} = \frac{\underline{U}_{R'N'}}{\underline{Z}_1} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{10 \angle 60^\circ} = \frac{38}{\sqrt{3}} \angle -60^\circ = 21,94 \angle -60^\circ \text{ A}$$

y la corriente $\underline{I}_{R2}$:

$$\underline{I}_{R2} = \frac{\underline{U}_{R'N'}}{\underline{Z}_{T2}} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{(1 + j2) + 5 \angle 30^\circ} = 31,43 \angle -40,17^\circ \text{ A}$$

de este modo la tensión simple $\underline{U}_{R''N''}$ es igual a:

$$\underline{U}_{R''N''} = 5 \angle 30^\circ \cdot 31,43 \angle -40,17^\circ = 157,15 \angle -10,17^\circ \text{ V}$$

cuya magnitud es de 157,15 voltios, lo que corresponde a una tensión compuesta de valor:

$$U_L'' = \sqrt{3} 157,15 = 272,19 \text{ V}$$

b) Aplicando el primer lema de Kirchhoff en el nudo R' se puede obtener la corriente $\underline{I}_R$:

$$\underline{I}_R = 21,94 \angle -60^\circ + 31,43 \angle -40,17^\circ = 52,59 \angle -48,3^\circ \text{ A}$$

y la tensión $\underline{U}_{RN}$ a principio de línea es igual a:

$$\underline{U}_{RN} = \underline{U}_{R'N'} + \underline{Z}_L \underline{I}_R = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (1 + j1) 52,59 \angle -48,3^\circ \text{ V}$$

que corresponde a un valor:

$$\underline{U}_{RN} = 293,67 \angle -0,84^\circ \text{ V}$$

es decir es una tensión simple de 293,67 V, lo que corresponde a una tensión compuesta a principio de línea de $\sqrt{3} 293,67 = 508,65 \text{ V}$.

3.5. Cargas desequilibradas

Generalmente en la práctica, los sistemas trifásicos están sensiblemente equilibrados, bien porque muchas de las cargas son trifásicas en sí mismas (como los motores trifásicos), o bien porque cuando existen cargas monofásicas, estas se han repartido equitativamente entre las tres fases; de este modo, una gran parte de los problemas de circuitos trifásicos se pueden resolver por los procedimientos vistos hasta ahora. Cuando las cargas dejan de ser iguales para las tres fases, se obtiene un sistema desequilibrado que debe resolverse simultáneamente para las tres fases, sin que pueda considerarse un circuito equivalente monofásico, porque las ecuaciones correspondientes han perdido sus condiciones de simetría. En las redes desequilibradas es muy importante conocer la secuencia de fases, ya que un cambio en la secuencia puede dar lugar a un reparto de las corrientes de línea completamente distinto, aun cuando las tensiones de alimentación y las cargas se mantengan iguales. En lo que sigue se van a estudiar los circuitos trifásicos con cargas desequilibradas, suponiendo, como es habitual, que el sistema de alimentación es simétrico. En el Epígrafe 3.10 se analiza una técnica denominada de las **componentes simétricas** que permite hacer un estudio más general, convirtiendo un sistema no simétrico en simétrico, lo cual es muy útil para analizar faltas en sistemas de potencia.

3.5.1. Cargas desequilibradas conectadas en estrella

Pasando a estudiar los sistemas desequilibrados, vamos a considerar en primer lugar que la fuente de alimentación y las cargas se hallan conectadas en estrella y que los conductores de la línea, incluso el hilo neutro, tienen una impedancia finita, no insignificante tal como se muestra en la Figura 3.26.

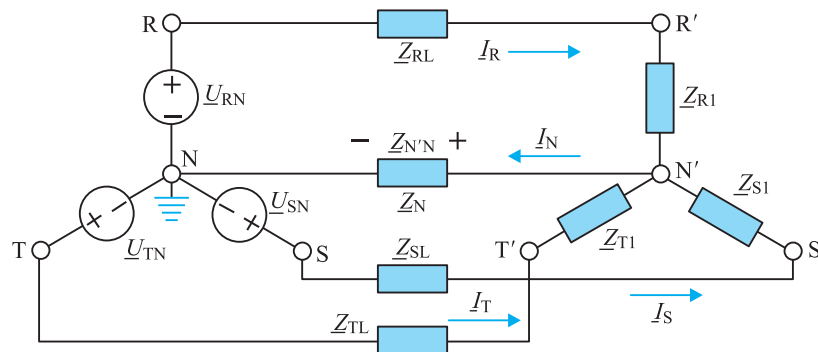


Figura 3.26 Cargas desequilibradas conectadas en estrella

Las impedancias de las fases de línea conectadas en serie con las fases de las cargas (receptor) pueden incluirse en las impedancias de estas fases y por consiguiente solamente será necesario tener en cuenta separadamente la impedancia del hilo neutro. En la Figura 3.27 se muestra esta idea donde Z_N representa la impedancia del hilo neutro y Z_R , Z_S y Z_T son las impedancias totales de cada fase (que son la suma de la propia de cada fase de la carga y de la línea correspondiente).

Para estudiar el circuito de la Figura 3.27, que tiene dos nudos, tomaremos el neutro de la alimentación como tensión de referencia, es decir $\underline{U}_N = 0$, lo cual es consistente con la realidad física, ya que generalmente el punto neutro de generadores y transformadores suele ir unido a tierra. De este modo se determinará primeramente la tensión $\underline{U}_{N'N}$ que define la tensión del neutro del receptor.

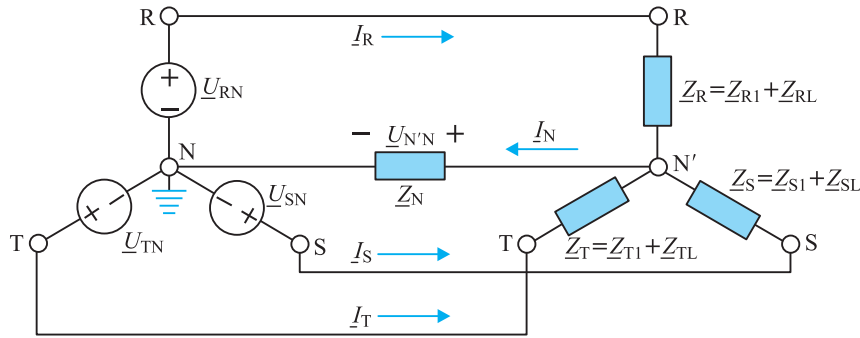


Figura 3.27 Esquema equivalente de las cargas en estrella desequilibrada de la Figura 3.26

Las tensiones en cada una de las cargas son iguales respectivamente a:

$$\underline{U}_{RN'} = \underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N} \quad ; \quad \underline{U}_{SN'} = \underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N} \quad ; \quad \underline{U}_{TN'} = \underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N} \quad (3.44)$$

de este modo las corrientes de línea son:

$$\begin{aligned} \underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_{RN'}}{\underline{Z}_R} = \frac{\underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_R} \quad ; \quad \underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{SN'}}{\underline{Z}_S} = \frac{\underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_S} \\ \underline{I}_T &= \frac{\underline{U}_{TN'}}{\underline{Z}_T} = \frac{\underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_T} \end{aligned} \quad (3.45)$$

y la del neutro:

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_N} \quad (3.46)$$

ahora bien en el nudo N' se cumple:

$$\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = \underline{I}_N \quad (3.47)$$

y al sustituir (3.45) y (3.46) en (3.47) resulta:

$$\frac{\underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_T} = \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_N} \quad (3.48)$$

como las tensiones $\underline{U}_{RN}$, $\underline{U}_{SN}$ y $\underline{U}_{TN}$ de la alimentación son conocidas, la ecuación anterior permite determinar la tensión $\underline{U}_{N'N}$:

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{TN}}{\underline{Z}_T}}{\frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_S} + \frac{1}{\underline{Z}_T} + \frac{1}{\underline{Z}_N}} = \frac{\underline{U}_{RN}\underline{Y}_R + \underline{U}_{SN}\underline{Y}_S + \underline{U}_{TN}\underline{Y}_T}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T + \underline{Y}_N} \quad (3.49)$$

donde $\underline{Y}_i = 1/\underline{Z}_i$ representan las admitancias correspondientes. El lector habrá observado que la ecuación (3.49) no es más que una aplicación del teorema de Millman a redes trifásicas. Conocida la tensión del neutro de las cargas $\underline{U}_{N'N}$ denominada **tensión de desplazamiento del neutro**, las ecuaciones (3.45) permiten calcular las corrientes de línea y las (3.44) determinan las tensiones totales de las cargas.

En la Figura 3.28 se da una interpretación geométrica de las ecuaciones anteriores para una red de secuencia positiva. Se dibujan primeramente las tensiones simples del generador, tomando $\underline{U}_{RN}$ como referencia, y se representan a continuación $\underline{U}_{SN}$ y $\underline{U}_{TN}$, de ahí se obtienen las tensiones compuestas o de línea: $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$ y $\underline{U}_{TR}$. A partir de (3.49) se representa la tensión $\underline{U}_{N'N}$, lo que fija la posición del punto neutro N' de las cargas. De este modo se determinan las tensiones simples de la carga $\underline{U}_{RN'}$, $\underline{U}_{SN'}$ y $\underline{U}_{TN'}$.

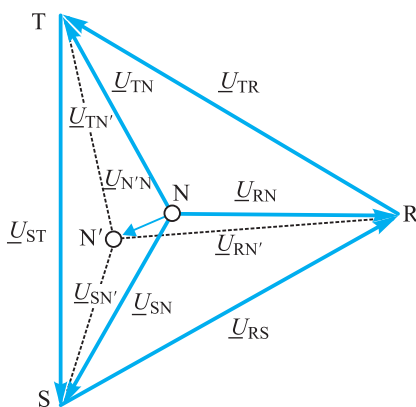


Figura 3.28 Diagrama fasorial de tensiones desequilibradas

Del estudio general anterior se deducen los siguientes casos particulares:

1) Carga en estrella equilibrada

Si las cargas están equilibradas se cumple:

$$\underline{Y}_R = \underline{Y}_S = \underline{Y}_T = \underline{Y} \quad (3.50)$$

de este modo la tensión del neutro de las cargas será según (3.49):

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{Y}(\underline{U}_{RN} + \underline{U}_{SN} + \underline{U}_{TN})}{3\underline{Y} + \underline{Y}_N} = 0 \quad (3.51)$$

puesto que al ser la alimentación simétrica se cumple que $\underline{U}_{RN} + \underline{U}_{SN} + \underline{U}_{TN} = 0$. La corriente de retorno por el neutro según (3.46) será igual a cero, las tensiones simples en las cargas de acuerdo con (3.44) coincidirán con las del generador y las ecuaciones (3.45) determinarán las corrientes de línea. Eran de esperar estos resultados, que coinciden lógicamente, con los que se calcularon en el Epígrafe 3.3. En el diagrama fasorial de la Figura 3.28 las soluciones anteriores implican la coincidencia de los puntos neutros N y N' .

2) Carga en estrella desequilibrada a 4 hilos

Los resultados son los expresados anteriormente en este epígrafe. El cálculo comienza determinando la tensión del neutro según (3.49); a partir de este valor, las ecuaciones (3.45) y (3.46) permiten determinar las corrientes de línea y de retorno por el neutro. En el caso particular en que se desprecie la impedancia del neutro es decir $\underline{Z}_N = 0$, entonces $\underline{U}_{N'N} = 0$, es decir los potenciales de los puntos neutros del generador y receptor resultan ser iguales (están unidos por un hilo de impedancia nula, $\underline{Z}_N = 0$).

3) Carga en estrella desequilibrada a 3 hilos

Este caso se cumple cuando no hay conductor neutro en la instalación, lo que equivale a decir en nuestro estudio general, que $\underline{Z}_N = \infty$, o de otro modo que $\underline{Y}_N = 0$. Se calcula la tensión del neutro de las cargas con ayuda de la ecuación (3.49), en la que el último sumando del denominador desaparece; calculada la tensión $\underline{U}_{N'N}$ de desplazamiento del neutro, las ecuaciones (3.44) dan los valores de las tensiones de carga y con (3.45) se determinan las corrientes de línea. Al no existir hilo neutro, no habrá corriente de retorno por este hilo, lo que se confirma con la ayuda de (3.46).



EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.5

La red de la Figura 3.29 muestra un sistema simétrico de secuencia positiva de 220 V de línea que alimenta tres cargas monofásicas conectadas entre cada fase y neutro de impedancias: $\underline{Z}_R = j10 \Omega$; $\underline{Z}_S = 10 \Omega$; $\underline{Z}_T = -j10 \Omega$. 1) Si el interruptor D está cerrado, calcular: a) corrientes: $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$ e $\underline{I}_N$. 2) Si el interruptor D está abierto, calcular: a) tensión del neutro N' respecto del neutro N de la alimentación; b) tensiones en cada una de las cargas; c) corrientes $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$ e $\underline{I}_N$. Nota: Tómese la tensión $\underline{U}_{RN}$ de la alimentación como referencia de fases.

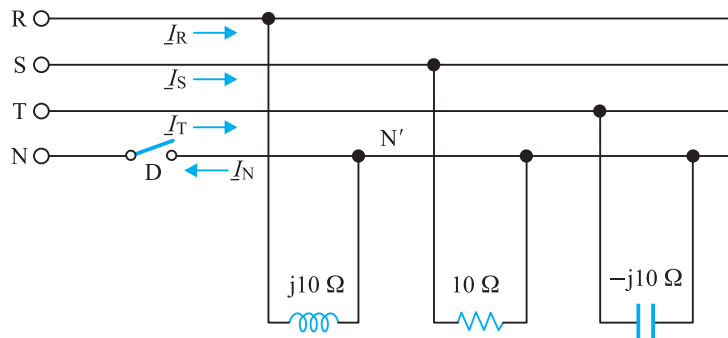


Figura 3.29 Cargas en estrella desequilibrada

Solución

1. a) En este caso se tienen tres cargas conectadas en estrella en las que el punto común N' está unido al neutro de la alimentación. Al ser el sistema de secuencia positiva y tomar $\underline{U}_{RN}$ como referencia, se tienen las siguientes expresiones fasoriales para las tensiones simples:

$$\underline{U}_{RN} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{SN} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{TN} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ$$

las corrientes de cada fase, al ser $\underline{U}_{N'N} = 0$, son de acuerdo con (3.45):

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_R} = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{j10} = 12,7 \angle -90^\circ \text{ A} \quad ; \quad \underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_S} = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ}{10} = 12,7 \angle -120^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{TN}}{\underline{Z}_T} = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ}{-j10} = 12,7 \angle 210^\circ \text{ A}$$

de este modo la corriente de retorno por el neutro es:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 12,7 \angle -90^\circ + 12,7 \angle -120^\circ + 12,7 \angle 210^\circ = 34,7 \angle -120^\circ \text{ A}$$

2. a) Si se abre el interruptor D, el centro N' de la estrella de cargas dejará de estar a cero voltios. Por medio de (3.49) se calcula $\underline{U}_{N'N}$, teniendo en cuenta que $\underline{Y}_N = 0$:

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{U}_{RN} \underline{Y}_R + \underline{U}_{SN} \underline{Y}_S + \underline{U}_{TN} \underline{Y}_T}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T + \underline{Y}_N + \underline{Y}_N} = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \frac{1}{j10} + \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \frac{1}{10} + \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \frac{1}{-j10}}{\frac{1}{j10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{-j10}}$$

que da como resultado:

$$\underline{U}_{N'N} = 347 \angle -120^\circ \text{ voltios}$$

2. b) La tensión de la carga conectada a la fase R vale:

$$\underline{U}_{RN'} = \underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ - 347 \angle -120^\circ \approx 425 \angle 45^\circ \text{ voltios}$$

y de un modo análogo para las otras dos fases:

$$\underline{U}_{SN'} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ - 347 \angle -120^\circ \approx 220 \angle 60^\circ \text{ voltios}$$

$$\underline{U}_{TN'} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ - 347 \angle -120^\circ \approx 425 \angle 75^\circ \text{ voltios}$$

2. c) De acuerdo con (3.45) las corrientes de las fases serán:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RN'}}{\underline{Z}_R} = \frac{425 \angle 45^\circ}{j10} = 42,5 \angle -45^\circ \text{ A} \quad ; \quad \underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{SN'}}{\underline{Z}_S} = \frac{220 \angle 60^\circ}{10} = 22 \angle 60^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{TN'}}{\underline{Z}_T} = \frac{425 \angle 75^\circ}{j10} = 42,5 \angle 165^\circ \text{ A}$$

la corriente de retorno por el neutro será igual a cero ya que el interruptor D está abierto. Como comprobación de ello, el lector puede proceder a realizar la suma $\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T$ y se observará que es nula, como era de esperar.



Comentarios prácticos

Consecuencias de las cargas desequilibradas

De los resultados de este problema se pueden deducir diversas conclusiones: Cuando se tiene una carga desequilibrada conectada en estrella con neutro, se consigue que las tensiones en las cargas estén fijadas prácticamente por la alimentación, pero se obtienen corrientes en las líneas desiguales que hacen que circule una fuerte corriente de retorno por el neutro (que como sabemos en el caso de carga equilibrada debería llevar una corriente nula). Cuando la carga desequilibrada en estrella no tiene unido su neutro al de la alimentación entonces $I_N = 0$, pero tanto las corrientes de línea como las tensiones en las cargas se hacen desiguales, pudiendo estas ser superiores a la de la alimentación. La tensión del centro de la estrella deja de ser prácticamente nula, pudiendo alcanzar valores elevados.

Aunque los valores presentados en este problema suponen un fuerte desequilibrio, que no es frecuente en la práctica, pueden servir de referencia para observar los efectos perjudiciales que originan las cargas desequilibradas. Siempre que sea posible, el proyectista de una instalación debe procurar distribuir las cargas monofásicas entre las tres fases de la red, intentando lograr un sistema lo más equilibrado posible. En la distribución de energía eléctrica a un edificio, la compañía suministradora reparte los consumos entre las diferentes fases, intentando que el inmueble en su conjunto quede equilibrado. Como esta acción se realiza en cada uno de los edificios de una calle, ciudad, etc. se logra, de acuerdo con la ley de los grandes números, que se obtenga prácticamente un sistema equilibrado. Afortunadamente, las industrias, que son grandes centros de consumo energético, tienen sus cargas relativamente equilibradas, merced a que en su proceso productivo se incluyen cargas trifásicas: motores eléctricos, resistencias de calefacción, etc. y por ello se comportan como receptores equilibrados.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.6: Indicador de la secuencia de fases de Varley

El circuito desequilibrado de la Figura 3.30 se denomina indicador de la secuencia de fases de Varley y está constituido por un condensador y dos lámparas que se conectan en estrella a una red trifásica a tres hilos. Si el sistema de alimentación tiene una sucesión de fases RST, determinar las tensiones a que se verán sometidas las lámparas de las fases S y T si la tensión compuesta de la red es de 380 V. Deducir conclusiones prácticas.

Nota: Tomar $\underline{U}_{RN}$ de la red como referencia de fases.

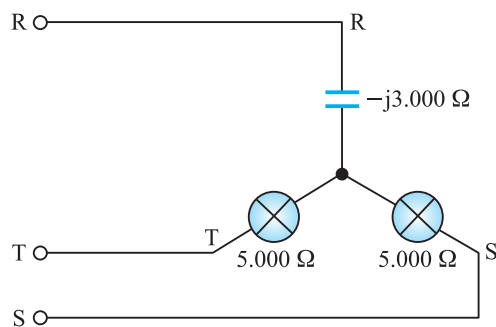


Figura 3.30 Indicador de secuencia de fases de Varley

Solución

De acuerdo con (3.49) la tensión del centro de la estrella N' respecto del neutro de alimentación N vale:

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{U}_{RN} \underline{Y}_R + \underline{U}_{SN} \underline{Y}_S + \underline{U}_{TN} \underline{Y}_T}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T + \underline{Y}_N}$$

si el sistema es de secuencia directa, se tiene:

$$\underline{U}_{RN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ ; \quad \underline{U}_{SN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ ; \quad \underline{U}_{TN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ$$

de donde se deduce:

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \frac{1}{-j3.000} + \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \frac{1}{5.000} + \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ \frac{1}{5.000}}{\frac{1}{-j3.000} + \frac{1}{5.000} + \frac{1}{5.000} + 0} = 163,82 \angle 81,24^\circ \text{ V}$$

de este modo, las tensiones resultantes en cada carga son:

$$\underline{U}_{RN'} = \underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ - 163,82 \angle 81,24^\circ = 253,02 \angle -39,78^\circ \text{ voltios}$$

$$\underline{U}_{SN'} = \underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ - 163,82 \angle 81,24^\circ = 376,78 \angle -110,94^\circ \text{ voltios}$$

$$\underline{U}_{TN'} = \underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ - 163,82 \angle 81,24^\circ = 137,40 \angle +168,2^\circ \text{ voltios}$$

En la Figura 3.31 se ha representado el diagrama fasorial correspondiente, en el que se aprecia el fuerte desplazamiento del neutro N' . Como quiera que la lámpara conectada a la fase S tiene una tensión de 376,78 V que es superior a la tensión de la lámpara colocada en la fase T (137,40 V), se apreciará una mayor luz en la lámpara de la fase S. El lector puede demostrar que si la sucesión de fases llega a ser RTS, entonces la lámpara más iluminada hubiera sido la colocada en la fase T.

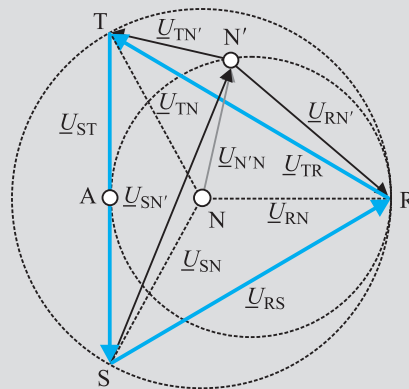


Figura 3.31 Diagrama fasorial de tensiones del indicador de secuencia de Varley

Con este simple circuito se puede detectar por consiguiente el sentido de sucesión de fases de una red trifásica, que corresponde en cada caso a la secuencia: **condensador-lámpara más brillante-lámpara menos brillante**. En el caso estudiado la sucesión es: fase R (condensador), fase S (lámpara más brillante), fase T (lámpara menos brillante). En la realización práctica de este circuito, al disponerse solamente en el

mercado de lámparas de 220 V, cada fase está formada realmente por dos «bombillas» de 20 W, 220 V, que corresponden a una resistencia unitaria de:

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{20} = 2.420 \, \Omega$$

que suponen un total de $4.840 \, \Omega \approx 5.000 \, \Omega$ para las fases S y T. El condensador elegido puede ser de $1 \, \mu\text{F}$, 400 V, que tiene una reactancia a 50 Hz de valor:

$$Z = X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{10^6}{1 \cdot 2\pi \cdot 50} = 3.183 \, \Omega \approx 3.000 \, \Omega$$



Comentarios prácticos



Una ampliación del indicador de secuencia de Varley

Si se considera que las lámparas del esquema de la Figura 3.30 tienen resistencia R (cada rama) y la impedancia del condensador es de la forma $\underline{Z} = -j\beta R$, es decir β veces la resistencia de las lámparas, el lector puede demostrar que para $\beta = \infty$ (impedancia del condensador infinita), el punto N' se situaría en A (Figura 3.31), y las lámparas estarían sometidas a la mitad de la tensión de línea. Si se considera el otro extremo de que $\beta = 0$ (la impedancia del condensador es cero), entonces N' coincidiría con R y las tensiones de las lámparas serían iguales a la tensión de línea. Conforme β varía entre estos valores extremos, el punto N' recorre la semicircunferencia superior de la Figura 3.31 que tiene un radio igual a $3/4$ de la tensión de fase de la red (si en vez de un condensador se utiliza una bobina, el lugar geométrico seguiría la parte inferior de la circunferencia). Un aspecto práctico es ¿cuál debe ser el valor de β para que se cumpla la máxima relación entre las tensiones de las lámparas ($U_{SN'}/U_{TN'}$)? El lector puede demostrar que esto ocurre cuando $\beta = 1$, es decir cuando coincide la impedancia del condensador con la impedancia de las lámparas, y el cociente entre las tensiones de las lámparas es entonces igual a $2 + \sqrt{3}$. De hecho si la tensión de línea de la red es de 380 V, la tensión de la lámpara de la fase S es de 328,21 V y la de la fase T de 87,98 V, mientras que el condensador queda sometido a una tensión de 294,43 V.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.7

La red de la Figura 3.32 muestra un sistema simétrico de secuencia directa de 380 V de línea, que alimenta tres cargas desequilibradas conectadas en estrella de impedancias: $\underline{Z}'_R = 10 \angle 0^\circ \, \Omega$; $\underline{Z}'_S = 20 \angle 0^\circ \, \Omega$; $\underline{Z}'_T = 15 \angle 0^\circ \, \Omega$. 1) Si el interruptor D está cerrado calcular: a) tensiones $\underline{U}_{N'N}$, $\underline{U}_{R'N'}$, $\underline{U}_{S'N'}$, $\underline{U}_{T'N'}$; b) corrientes $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$, $\underline{I}_{N'}$. 2) Contestar a las preguntas anteriores si el interruptor D está abierto. Nota: 1) Tómese la tensión $\underline{U}_{RN}$ de la alimentación como referencia de fases. 2) Las impedancias de línea son las indicadas en la figura.

Solución

1. a) Las tensiones simples de la alimentación son:

$$\underline{U}_{RN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{SN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{TN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ$$

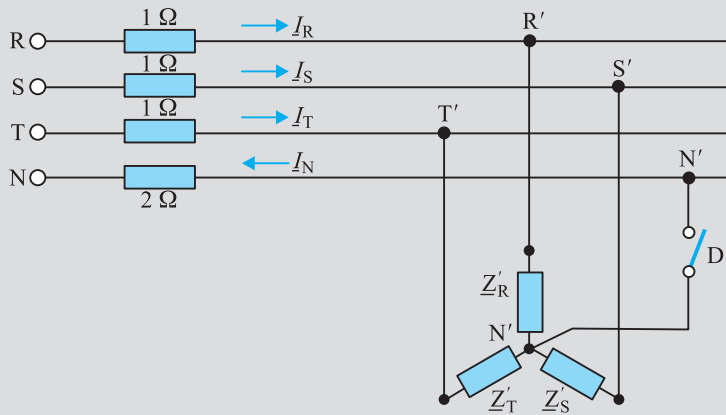


Figura 3.32 Problema de carga desequilibrada en estrella

las impedancias **totales** de cada fase son:

$$\underline{Z}_R = 1 + 10 = 11 \, \Omega \quad ; \quad \underline{Z}_S = 1 + 20 = 21 \, \Omega \quad ; \quad \underline{Z}_T = 1 + 15 = 16 \, \Omega$$

de este modo (3.49) nos da la tensión del centro de la estrella:

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \cdot \frac{1}{11} + \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \cdot \frac{1}{21} + \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ \cdot \frac{1}{16}}{\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = 11,9 \angle 19,76^\circ \text{ V}$$

las tensiones entre cada una de las fases de la red y el centro de la estrella serán:

$$\underline{U}_{RN'} = \underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ - 11,9 \angle 19,76^\circ = 208,23 \angle -1,11^\circ \text{ voltios}$$

$$\underline{U}_{SN'} = \underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ - 11,9 \angle 19,76^\circ = 228,63 \angle -121,94^\circ \text{ voltios}$$

$$\underline{U}_{TN'} = \underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ - 11,9 \angle 19,76^\circ = 221,86 \angle 123,03^\circ \text{ voltios}$$

como quiera que cada impedancia de carga está en serie con la correspondiente impedancia de línea, la tensión en cada carga se obtendrá aplicando la regla del divisor de tensión, dando lugar a:

$$\underline{U}_{R'N'} = \underline{U}_{RN'} = \frac{\underline{Z}'_R}{\underline{Z}'_R + \underline{Z}_{\text{línea}}} = 208,23 \angle -1,11^\circ \cdot \frac{10}{11} = 189,3 \angle -1,11^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{S'N'} = \underline{U}_{SN'} = \frac{\underline{Z}'_S}{\underline{Z}'_S + \underline{Z}_{\text{línea}}} = 228,63 \angle -121,94^\circ \cdot \frac{20}{21} = 217,74 \angle -121,94^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{T'N'} = \underline{U}_{TN'} = \frac{\underline{Z}'_T}{\underline{Z}'_T + \underline{Z}_{\text{línea}}} = 221,86 \angle 123,03^\circ \cdot \frac{15}{16} = 208,00 \angle 123,03^\circ \text{ V}$$

1. b) Las corrientes de línea serán:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{R'N'}}{\underline{Z}'_R} = \frac{189,3 \angle -1,11^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 18,93 \angle -1,11^\circ \text{ A}; \quad \underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{S'N'}}{\underline{Z}'_S} = \frac{217,74 \angle -121,94^\circ}{20 \angle 0^\circ} = 10,89 \angle -121,94^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{T'N'}}{\underline{Z}'_T} = \frac{208 \angle 123,03^\circ}{15 \angle 0^\circ} = 13,87 \angle 123,03^\circ \text{ A}$$

y la corriente del neutro será según (3.46):

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{N''N'}}{\underline{Z}_N} = \frac{11,9 \angle -19,76^\circ}{2} = 5,95 \angle 19,76^\circ \text{ A}$$

el lector puede comprobar que el valor anterior coincide con la suma de las corrientes de línea, como consecuencia de la aplicación del primer lema de Kirchhoff en el nudo N':

$$\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 18,93 \angle -1,11^\circ + 10,89 \angle -121,94^\circ + 13,87 \angle 123,03^\circ \approx 5,95 \angle 19,76^\circ \text{ A}$$

2. a) Al abrir el interruptor D, la nueva tensión del centro de la estrella será:

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \cdot \frac{1}{11} + \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \cdot \frac{1}{21} + \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ \cdot \frac{1}{16}}{\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{16} + \frac{1}{\infty}} = 41,49 \angle 19,76^\circ \text{ V}$$

de este modo, las tensiones entre cada fase de la alimentación y el centro de la estrella son:

$$\underline{U}_{RN'} = \underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ - 41,49 \angle 19,76^\circ = 180,9 \angle -4,45^\circ \text{ voltios}$$

$$\underline{U}_{SN'} = \underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ - 41,49 \angle 19,76^\circ = 252,49 \angle -126,1^\circ \text{ voltios}$$

$$\underline{U}_{TN'} = \underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ - 41,49 \angle 19,76^\circ = 230,43 \angle 130,2^\circ \text{ voltios}$$

y las tensiones de carga tienen un valor:

$$\underline{U}_{R'N'} = \underline{U}_{RN'} = \frac{\underline{Z}'_R}{\underline{Z}'_R + \underline{Z}_{\text{línea}}} = 180,9 \angle -4,45^\circ \cdot \frac{10}{11} = 164,45 \angle -4,45^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{S'N'} = \underline{U}_{SN'} = \frac{\underline{Z}'_S}{\underline{Z}'_S + \underline{Z}_{\text{línea}}} = 252,49 \angle -126,1^\circ \cdot \frac{20}{21} = 240,47 \angle -126,1^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{T'N'} = \underline{U}_{TN'} = \frac{\underline{Z}'_T}{\underline{Z}'_T + \underline{Z}_{\text{línea}}} = 230,43 \angle 130,2^\circ \cdot \frac{15}{16} = 216,03 \angle 130,2^\circ \text{ V}$$

2. b) Las corrientes de línea son:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{R''N'}}{\underline{Z}'_R} = \frac{164,45 \angle -4,45^\circ}{10 \angle 0^\circ} \approx 16,44 \angle -4,45^\circ \text{ A}; \quad \underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{S''N'}}{\underline{Z}'_S} = \frac{240,47 \angle -126,1^\circ}{20 \angle 0^\circ} = 12,02 \angle -126,01^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{T''N'}}{\underline{Z}'_T} = \frac{216,03 \angle 130,2^\circ}{15 \angle 0^\circ} = 14,40 \angle 130,2^\circ \text{ A}$$

y la corriente del neutro será igual a cero al estar abierto este circuito. El lector puede comprobar que se cumple:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 16,44 \angle -4,45^\circ + 12,02 \angle -126,01^\circ + 14,40 \angle 130,2^\circ = 0$$

■ 3.5.2. Cargas desequilibradas conectadas en triángulo

Consideremos ahora un receptor desequilibrado conectado en triángulo, alimentado por un generador simétrico a través de unas impedancias de línea $\underline{Z}_{RL}$, $\underline{Z}_{SL}$, $\underline{Z}_{TL}$ como se muestra en la Figura 3.33. Este problema se resuelve de un modo simple transformando las cargas en triángulo: $\underline{Z}_{RS}$, $\underline{Z}_{ST}$ y $\underline{Z}_{TR}$ en una estrella equivalente: $\underline{Z}'_R$, $\underline{Z}'_S$ y $\underline{Z}'_T$. De acuerdo con el Epígrafe 1.11.3 se tienen los valores:

$$\underline{Z}'_R = \frac{\underline{Z}_{RS} \underline{Z}_{TR}}{\underline{Z}_{RS} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{TR}}; \quad \underline{Z}'_S = \frac{\underline{Z}_{RS} \underline{Z}_{ST}}{\underline{Z}_{RS} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{TR}}; \quad \underline{Z}'_T = \frac{\underline{Z}_{ST} \underline{Z}_{TR}}{\underline{Z}_{RS} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{TR}} \quad (3.52)$$

lo que da lugar a unas admitancias totales por fase:

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{\underline{Z}'_R + \underline{Z}_{RL}}; \quad \underline{Y}_S = \frac{1}{\underline{Z}'_S + \underline{Z}_{SL}}; \quad \underline{Y}_T = \frac{1}{\underline{Z}'_T + \underline{Z}_{TL}} \quad (3.53)$$

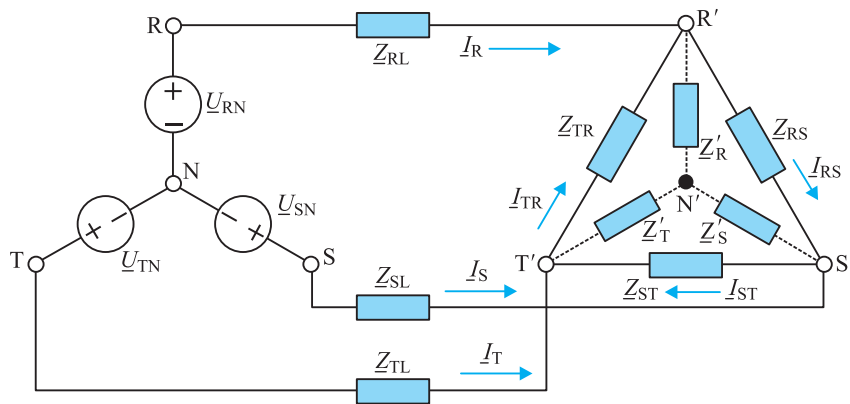


Figura 3.33 Carga desequilibrada en triángulo

El esquema resultante corresponde a una conexión en estrella desequilibrada sin neutro, que puede resolverse de acuerdo con el desarrollo seguido en 3.5.1. Así la tensión $\underline{U}_{N'N}$ se puede obtener aplicando (3.49), poniendo en ella $\underline{Y}_N = 0$, a partir de esta tensión se calculan las corrientes de línea mediante las ecuaciones:

$$\underline{I}_R = (\underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N}) \underline{Y}_R; \quad \underline{I}_S = (\underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N}) \underline{Y}_S; \quad \underline{I}_T = (\underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N}) \underline{Y}_T \quad (3.54)$$

de este modo las tensiones simples en la estrella equivalente son:

$$\underline{U}_{R'N'} = Z'_R \underline{I}_R \quad ; \quad \underline{U}_{S'N'} = Z'_S \underline{I}_S \quad ; \quad \underline{U}_{T'N'} = Z'_T \underline{I}_T \quad (3.55)$$

que corresponden a unas tensiones compuestas en el receptor en triángulo:

$$\underline{U}_{R'S'} = \underline{U}_{R'N'} - \underline{U}_{S'N'} \quad ; \quad \underline{U}_{S'T'} = \underline{U}_{S'N'} - \underline{U}_{T'N'} \quad ; \quad \underline{U}_{T'R'} = \underline{U}_{T'N'} - \underline{U}_{R'N'} \quad (3.56)$$

y finalmente las corrientes simples en la carga en triángulo son:

$$\underline{I}_{RS} = \frac{\underline{U}_{R'S'}}{\underline{Z}_{RS}} \quad ; \quad \underline{I}_{ST} = \frac{\underline{U}_{S'T'}}{\underline{Z}_{ST}} \quad ; \quad \underline{I}_{TR} = \frac{\underline{U}_{T'R'}}{\underline{Z}_{TR}} \quad (3.57)$$

en el caso particular en que se desprecien las impedancias de línea, el problema se simplifica enormemente ya que las tensiones compuestas en el receptor coinciden con las tensiones compuestas de la alimentación. De este modo el cálculo se puede iniciar en sentido contrario al expuesto aquí, calculando las corrientes simples en el receptor mediante (3.57) y calculando las corrientes de línea aplicando el primer lema de Kirchhoff en los nudos R', S' y T' (que coinciden con R, S y T respectivamente).

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.8

En la Figura 3.34 se muestra una carga desequilibrada conectada en triángulo de impedancias: $\underline{Z}_{RS} = 10 \angle 0^\circ \Omega$; $\underline{Z}_{ST} = 10 \angle 90^\circ \Omega$; $\underline{Z}_{TR} = 10 \angle -90^\circ \Omega$, alimentada por un sistema simétrico de secuencia positiva de 220 V de línea. Tomando la tensión $\underline{U}_{RN}$ de la alimentación como referencia de fases, calcular: a) corrientes simples $\underline{I}_{RS}$, $\underline{I}_{ST}$ e $\underline{I}_{TR}$; b) corrientes de línea: $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ e $\underline{I}_T$.

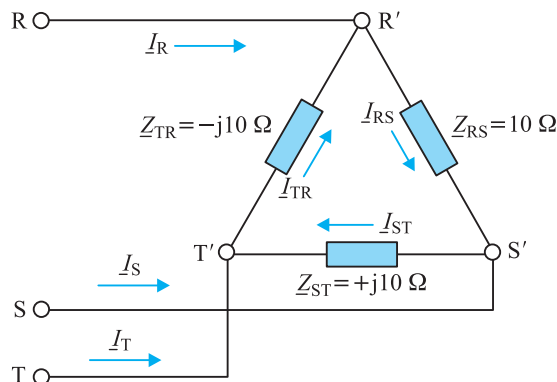


Figura 3.34 Problema de carga desequilibrada en triángulo

Solución

a) Las tensiones simples de la alimentación están expresadas por:

$$\underline{U}_{RN} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{SN} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{TN} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ$$

lo que da lugar a las siguientes tensiones compuestas:

$$\underline{U}_{RS} = 220 \angle 30^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{ST} = 220 \angle -90^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{TR} = 220 \angle 150^\circ$$

de este modo las corrientes de fase valen:

$$\underline{I}_{RS} = \frac{220 \angle 30^\circ}{10} = 22 \angle 30^\circ \quad ; \quad \underline{I}_{ST} = \frac{220 \angle -90^\circ}{10 \angle 90^\circ} = 22 \angle -180^\circ \quad ; \quad \underline{I}_{TR} = \frac{220 \angle 150^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 22 \angle 240^\circ$$

b) Las corrientes compuestas o de línea son:

$$\underline{I}_R = \underline{I}_{RS} - \underline{I}_{TR} = 22 \angle 30^\circ - 22 \angle 240^\circ = 42,5 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_S = \underline{I}_{ST} - \underline{I}_{RS} = 22 \angle -180^\circ - 22 \angle 30^\circ = 42,5 \angle -165^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_T = \underline{I}_{TR} - \underline{I}_{ST} = 22 \angle 240^\circ - 22 \angle -180^\circ = 22 \angle -60^\circ \text{ A}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.9

En la Figura 3.35 se muestra una carga desequilibrada conectada en triángulo de impedancias: $\underline{Z}_{RS} = 20 \angle 0^\circ \Omega$; $\underline{Z}_{ST} = 20 \angle 90^\circ \Omega$; $\underline{Z}_{TR} = 20 \angle -90^\circ \Omega$, alimentada por un sistema simétrico de secuencia positiva de 380 V de línea, a través de una línea de $0 + j2 \Omega$ por hilo. Tomando la tensión $\underline{U}_{RN}$ de la alimentación como referencia, calcular: a) corrientes $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ e $\underline{I}_T$ de línea; b) tensiones en la carga: $\underline{U}_{R'S'}$, $\underline{U}_{S'T'}$, $\underline{U}_{T'R'}$; c) corrientes de fase: $\underline{I}_{RS}$, $\underline{I}_{ST}$, $\underline{I}_{TR}$.

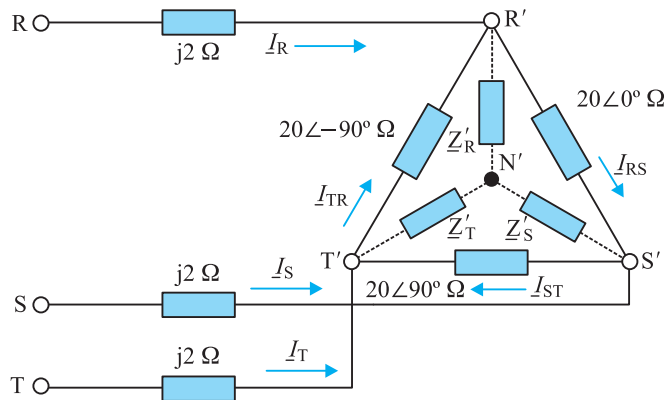


Figura 3.35 Problema de carga desequilibrada en triángulo

Solución

a) Al transformar la carga en triángulo en estrella se obtiene de acuerdo con (3.52):

$$\underline{Z}'_R = -j20 \Omega \quad ; \quad \underline{Z}'_S = j20 \Omega \quad ; \quad \underline{Z}'_T = 20 \Omega$$

que corresponden a unas impedancias totales:

$$\underline{Z}_R = \underline{Z}'_R + \underline{Z}_{RL} = -j20 + j2 = -j18 \Omega \quad ; \quad \underline{Z}_S = \underline{Z}'_S + j2 = +j22 \Omega \quad ; \quad \underline{Z}_T = 20 + j2 \Omega$$

o en forma de admitancias:

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{\underline{Z}_R} = \frac{1}{-j18} \quad ; \quad \underline{Y}_S = \frac{1}{\underline{Z}_S} = \frac{1}{j22} \quad ; \quad \underline{Y}_T = \frac{1}{\underline{Z}_T} = \frac{1}{20 + j2} \text{ siemens}$$

las tensiones simples de la alimentación son:

$$\underline{U}_{RN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{SN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{TN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ$$

por lo que según (3.49) la tensión entre el centro de la estrella equivalente N' y el neutro N del generador es:

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \cdot \frac{1}{-j18} + \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \cdot \frac{1}{j22} + \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ \cdot \frac{1}{20 + j2}}{\frac{1}{-j18} + \frac{1}{j22} + \frac{1}{20 + j2}} = 605,88 \angle 109,44^\circ \text{ V}$$

de donde se deducen según (3.54) las corrientes de línea:

$$\underline{I}_R = \left(\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ - 605,88 \angle 109,44^\circ \right) \cdot \frac{1}{-j18} = 39,51 \angle 36,8^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_S = \left(\frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ - 605,88 \angle 109,44^\circ \right) \cdot \frac{1}{j22} = 34,81 \angle -172,72^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_T = \left(\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ - 605,88 \angle 109,44^\circ \right) \cdot \frac{1}{20 + j2} = 19,49 \angle -81,38^\circ \text{ A}$$

el lector puede comprobar que la suma de las corrientes anteriores es igual a cero al no existir hilo de retorno.

b) Las tensiones simples en la carga vienen expresadas en (3.55) y los resultados son:

$$\underline{U}_{R'N'} = -j20 \cdot 39,51 \angle 36,8^\circ = 790,2 \angle -53,2^\circ \text{ V} \quad ; \quad \underline{U}_{S'N'} = j20 \cdot 34,81 \angle -172,72^\circ = 696,2 \angle -82,72^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{T'N'} = 20 \cdot 19,49 \angle -81,38^\circ = 389,8 \angle -81,38^\circ \text{ V}$$

que corresponden a las tensiones compuestas siguientes:

$$\underline{U}_{R'S'} = \underline{U}_{R'N'} - \underline{U}_{S'N'} = 389,45 \angle 8,54^\circ \text{ V} \quad ; \quad \underline{U}_{S'T'} = 306,64 \angle -84,42^\circ \text{ V} \quad ; \quad \underline{U}_{T'R'} = 483,06 \angle 149,2^\circ \text{ V}$$

c) Las corrientes simples en la carga triángulo vienen determinadas por (3.57):

$$\underline{I}_{RS} = \frac{389,45 \angle 8,54^\circ}{20 \angle 0^\circ} = 19,47 \angle 8,54^\circ \text{ A};$$

$$\underline{I}_{ST} = \frac{306,42 \angle -84,42^\circ}{20 \angle 90^\circ} = 15,33 \angle -174,42^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_{TR} = \frac{483,06 \angle 149,2^\circ}{20 \angle -90^\circ} = 24,15 \angle 239,2^\circ \text{ A}$$



Sistemas de distribución trifásica en España

Como se ha señalado en el Epígrafe 3.3, el conductor neutro de una red trifásica suele conectarse a tierra. Pero existen otros esquemas de distribución y otras puestas a tierra que se realizan en las partes metálicas de las instalaciones y que se establecen por motivos de seguridad, para limitar la tensión que con respecto a tierra pueden presentar las masas metálicas. A este respecto las normas españolas que rigen las tomas de tierra son: la instrucción técnica complementaria **ITC-BT-18** del Reglamento Electrotécnico de Baja Tensión, la instrucción técnica complementaria MIE RAT013 del Reglamento de Alta Tensión, la Norma **UNE 20-460**: *Instalaciones eléctricas en edificios parte 5-54 y parte 3* y la Norma **UNE 21621-2**: *Instalaciones eléctricas para obras al exterior sometidas a condiciones severas*. De acuerdo con la Instrucción ITC-BT-18, la puesta a tierra o conexión a tierra es la unión eléctrica directa, sin fusibles ni protección alguna, de una parte del circuito eléctrico o de una parte conductora no perteneciente al mismo mediante una toma de tierra con un electrodo o grupos de electrodos enterrados en el suelo. Mediante la instalación de puesta a tierra se debe conseguir que en el conjunto de instalaciones, edificios y superficie próxima del terreno no aparezcan diferencias de potencial peligrosas y que, al mismo tiempo, permita el paso a tierra de las corrientes de defecto o las de descarga de origen atmosférico. Atendiendo a las conexiones a tierra de la red de distribución o de la alimentación, por un lado y de las masas de la instalación receptora por otro, se establecen los siguientes sistemas de distribución, indicados en la *Instrucción ITC-BT-08 del Reglamento Electrotécnico de Baja Tensión y en las Normas UNE 20460-3 y 21621-2*.

La denominación se realiza con un código de letras con el significado siguiente:

Primera letra: Se refiere a la situación de la alimentación con respecto a tierra. **T** = Conexión directa de un punto de la alimentación a tierra. **I** = Aislamiento de todas las partes activas de la alimentación con respecto a tierra o conexión de un punto a tierra a través de una impedancia.

Segunda letra: Se refiere a la situación de las masas de la instalación receptora con respecto a tierra. **T** = Masas conectadas directamente a tierra, independientemente de la eventual puesta a tierra de la alimentación. **N** = Masas conectadas al punto de la alimentación puesto a tierra (en corriente alterna, ese punto es normalmente el punto neutro).

Otras letras (eventuales): Se refieren a la situación relativa del conductor neutro y del conductor de protección. **S** = Las funciones del neutro y de protección, aseguradas por conductores separados. **C** = Las funciones del neutro y de protección, combinadas en un solo conductor (conductor CPN).

• Esquema TN

Los esquemas TN tienen un punto de la alimentación, generalmente el neutro o compensador, conectado directamente a tierra y las masas de la instalación receptora conectadas a dicho punto mediante conductores de protección. Se distinguen tres tipos de esquemas TN según la disposición relativa del conductor neutro y del conductor de protección.

Esquema TN-S: En el que el conductor neutro y el de protección son distintos en todo el esquema (Figura 3.36a).

Esquema TN-C: En el que las funciones de neutro y protección están combinados en un solo conductor en todo el esquema (Figura 3.36b).

Esquema TN-C-S: En el que las funciones de neutro y protección están combinadas en un solo conductor en una parte del esquema (Figura 3.36c).

En los esquemas TN cualquier intensidad de defecto franco fase-masa es una intensidad de cortocircuito. El bucle de defecto está constituido exclusivamente por elementos conductores metálicos.

• Esquema TT

El esquema TT tiene un punto de alimentación, generalmente el neutro o compensador, conectado directamente a tierra. Las masas de la instalación receptora están conectadas a una toma de tierra separada de la toma de tierra de alimentación (Figura 3.37a).

En este esquema las intensidades de defecto fase-masa o fase-tierra tienen en general valores inferiores a los de cortocircuito, pero pueden ser suficientes para provocar la aparición de tensiones peligrosas. En general, el bucle de defecto incluye resistencia de paso a tierra en alguna parte del circuito de defecto, lo que no excluye la posibilidad de conexiones eléctricas, voluntarias o no, entre la zona de la toma de tierra de las masas de la instalación y la

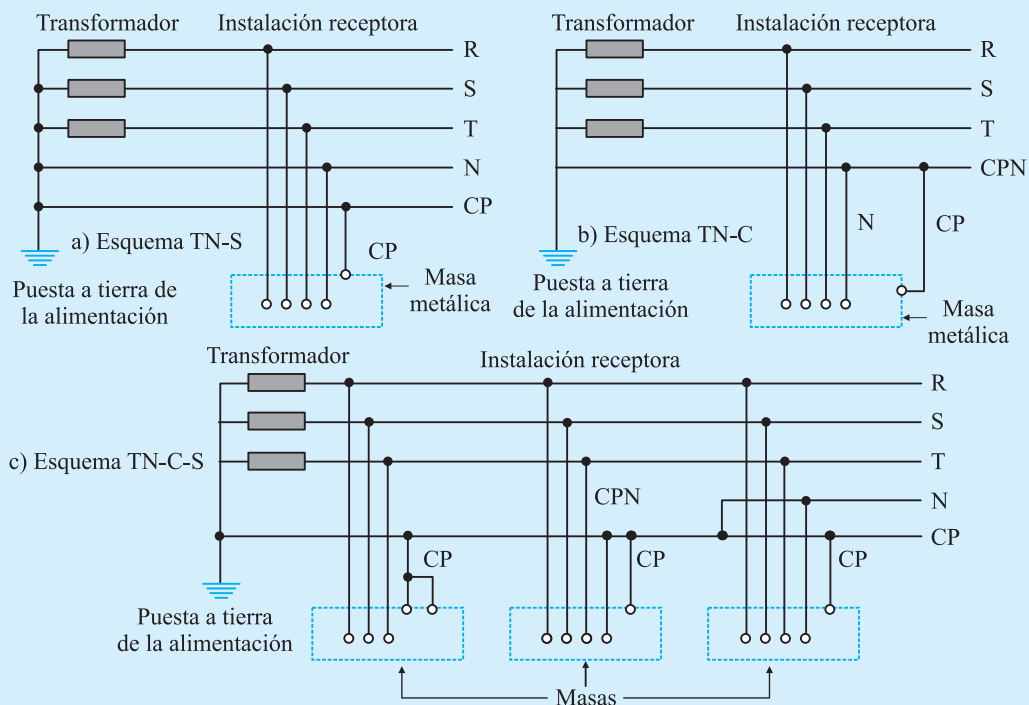


Figura 3.36 Esquemas de distribución TN

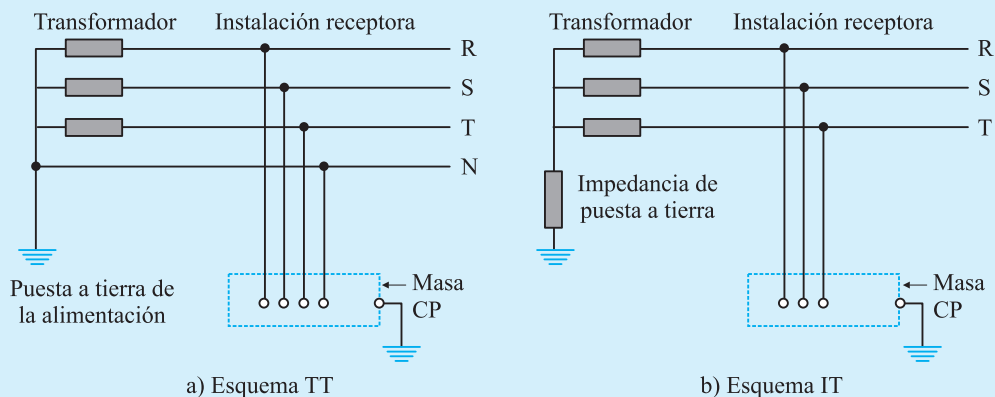


Figura 3.37 Esquemas de distribución TT e IT

de la alimentación. Aunque ambas tomas de tierra no sean independientes, el esquema sigue siendo un esquema TT si no se cumplen todas las condiciones de un esquema TN. Dicho de otra forma, no se tienen en cuenta las posibles conexiones entre ambas zonas de toma de tierra para la determinación de las condiciones de protección.

• Esquema IT

El esquema IT no tiene ningún punto de la alimentación conectado directamente a tierra. Las masas de la instalación receptora están puestas directamente a tierra (Figura 3.37b). En este esquema la intensidad resultante de un primer defecto fase-masa o fase-tierra, tiene un valor lo suficientemente reducido como para no provocar la aparición de tensiones de contacto peligrosas. La limitación del valor de la intensidad resultante de un primer defecto fase-masa o fase-tierra se obtiene, bien por la ausencia de conexión a tierra en la alimentación, o bien por la inser-

ción de una impedancia suficiente entre un punto de la alimentación (generalmente el neutro) y tierra. A este efecto puede resultar necesario limitar la extensión de la instalación para disminuir el efecto capacitivo de los cables con respecto a tierra. En este tipo de esquema se recomienda no distribuir el neutro.

Nota: La elección de uno de los tres tipos de esquemas debe hacerse en función de las características técnicas y económicas de cada instalación. Sin embargo, hay que tener en cuenta los siguientes principios: a) Las redes de distribución pública de baja tensión tienen un punto puesto directamente a tierra por prescripciones reglamentarias. Este punto es el punto neutro de la red. El esquema de distribución para instalaciones receptoras alimentadas directamente de una red de distribución pública de baja tensión es el esquema TT. b) En instalaciones alimentadas en baja tensión, a partir de un centro de transformación de abonado, se podrá elegir cualquiera de los tres esquemas citados. c) No obstante lo dicho en a), puede establecerse un esquema IT en parte o partes de una instalación alimentada directamente de una red de distribución pública mediante el uso de transformadores adecuados, en cuyo secundario y en la parte de la instalación afectada se establezcan las disposiciones que para tal esquema se citan en el apartado anterior.

■ 3.6. Potencia en sistemas trifásicos

■ 3.6.1. Generalidades

Los conceptos de potencia instantánea, activa, reactiva y aparente estudiados en el Epígrafe 2.9 del capítulo anterior, se pueden extender a los sistemas trifásicos de un modo simple. Así, si denominamos $u_1(t)$, $u_2(t)$ y $u_3(t)$, a las tensiones **simples** instantáneas de un sistema trifásico (equilibrado o no), e $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$ a las corrientes **simples**, la potencia instantánea total para una conexión en estrella o triángulo es igual a:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = \sum_{k=1}^3 u_k(t)i_k(t) \quad (3.58)$$

y de un modo análogo, la potencia activa o media total es:

$$P = \sum_{k=1}^3 U_k I_k \cos \varphi_k \quad [\text{W}] \quad (3.59)$$

donde U_k representa aquí el valor eficaz de la tensión simple de la fase k , I_k la corriente eficaz simple de la fase k , y $\cos \varphi_k$ el f.d.p. de la fase k . De forma similar, la potencia reactiva total es:

$$Q = \sum_{k=1}^3 U_k I_k \sin \varphi_k \quad [\text{VAr}] \quad (3.60)$$

y la potencia aparente vendrá expresada por:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [\text{VA}] \quad (3.61)$$

es un error que algunos estudiantes cometen, el considerar la potencia aparente así:

$$S = \sum_{k=1}^3 U_k I_k \quad [\text{VA}] \quad (3.62)$$

debe destacarse que la **expresión correcta** es la (3.61), lo que se comprende más fácilmente si se utilizan conceptos de potencia compleja. Supóngase que los fasores de tensión simple vienen expresados por:

$$\underline{U}_1 = U_1 \angle \alpha \quad ; \quad \underline{U}_2 = U_2 \angle \beta \quad ; \quad \underline{U}_3 = U_3 \angle \gamma \quad (3.63)$$

con los fasores de corrientes simples:

$$\underline{I}_1 = I_1 \angle (\alpha - \varphi_1) \quad ; \quad \underline{I}_2 = I_2 \angle (\beta - \varphi_2) \quad ; \quad \underline{I}_3 = I_3 \angle (\gamma - \varphi_3) \quad (3.64)$$

la potencia compleja de una fase viene expresada según (2.134) por $\underline{S}_F = \underline{U}_F \underline{I}_F^*$, lo que corresponde a una potencia compleja total:

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^3 \underline{U}_k \underline{I}_k^* \quad (3.65)$$

y si se tiene en cuenta (3.63) y (3.64) da lugar a:

$$\begin{aligned} \underline{S} = & (U_1 I_1 \cos \varphi_1 + j U_1 I_1 \sin \varphi_1) + (U_2 I_2 \cos \varphi_2 + j U_2 I_2 \sin \varphi_2) + \\ & + (U_3 I_3 \cos \varphi_3 + j U_3 I_3 \sin \varphi_3) \end{aligned} \quad (3.66)$$

o en forma más compacta:

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^3 U_k I_k \cos \varphi_k + j \sum_{k=1}^3 U_k I_k \sin \varphi_k \quad (3.67)$$

es decir, de acuerdo con (3.59) y (3.60):

$$\underline{S} = P + jQ \quad (3.68)$$

lo que indica que el módulo de la potencia aparente (3.68) viene definido por (3.61) y **no** por (3.62).

■ 3.6.2. Potencias en sistemas trifásicos equilibrados

Los conceptos analizados en el Epígrafe 3.6.1 sirven para circuitos trifásicos: equilibrados o no, en estrella o en triángulo; sin embargo es conveniente ver las expresiones que resultan cuando el sistema es simétrico y equilibrado. Consideremos las tensiones instantáneas **simples**:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \sqrt{2} U_F \cos \omega t \quad ; \quad u_2(t) = \sqrt{2} U_F \cos (\omega t - 120^\circ) \\ u_3(t) &= \sqrt{2} U_F \cos (\omega t + 120^\circ) \end{aligned} \quad (3.69)$$

que forman un conjunto simétrico de secuencia directa. Sean las corrientes **simples** de la forma:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \sqrt{2} I_F \cos (\omega t - \varphi) \quad ; \quad i_2(t) = \sqrt{2} I_F \cos (\omega t - 120^\circ - \varphi) \\ i_3(t) &= \sqrt{2} I_F \cos (\omega t + 120^\circ - \varphi) \end{aligned} \quad (3.70)$$

que corresponden a una carga equilibrada, en el que φ indica el argumento de la impedancia de cada fase. De acuerdo con (3.58) la potencia instantánea total vale:

$$p(t) = \sum_{k=1}^3 u_k(t) i_k(t) = 2U_F I_F [\cos \omega t \cos (\omega t - \varphi) + \cos (\omega t - 120^\circ) \cos (\omega t - 120^\circ - \varphi) + \cos (\omega t + 120^\circ) \cos (\omega t + 120^\circ - \varphi)] \quad (3.71)$$

y teniendo en cuenta la identidad trigonométrica:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos (x + y) + \cos (x - y)] \quad (3.72)$$

la ecuación (3.71) se convierte en:

$$p(t) = U_F I_F [3 \cos \varphi + \cos (2\omega t - \varphi) + \cos (2\omega t + 120^\circ - \varphi) + \cos (2\omega t - 120^\circ - \varphi)] \quad (3.73)$$

ahora bien, la suma del 2º, 3º y 4º sumando de la ecuación anterior, representa un sistema equilibrado o simétrico (que gira a la velocidad angular 2ω), por lo que su suma es cero. De este modo (3.73) se transforma en:

$$p(t) = 3U_F I_F \cos \varphi \quad (3.74)$$

que curiosamente no depende del tiempo. **¡Es un resultado sorprendente!** Recuérdese del Epígrafe 2.9, que en un circuito monofásico, la potencia instantánea era de *carácter pulsatorio, oscilando a una frecuencia doble que la red*, respecto de un valor medio P (potencia activa). En el caso trifásico *equilibrado*, los términos sinusoidales de pulsación 2ω se cancelan entre sí, y la *potencia instantánea es constante*. En la Figura 3.38 se aprecian claramente estos hechos, en donde se han dibujado las tensiones, corrientes y potencias de cada una de las fases y se observa el resultado de su suma.

La potencia media o activa es:

$$P = \frac{1}{2} \int_0^T p(t) dt = 3U_F I_F \cos \varphi \quad [\text{W}] \quad (3.75)$$

que coincide con la potencia instantánea como era de esperar al ser $p(t)$ constante. Si se compara (3.75) con (3.59) se observa que en un sistema trifásico equilibrado, la potencia activa total es tres veces la potencia activa de una fase. De un modo análogo la potencia reactiva total de un sistema equilibrado es:

$$Q = 3Q_{\text{fase}} = 3U_F I_F \sin \varphi \quad [\text{VAr}] \quad (3.76)$$

y la potencia aparente es igual a:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3U_F I_F \quad [\text{VA}] \quad (3.77)$$

en la Figura 3.39 se muestra el triángulo de potencias, que es análogo al de la Figura 2.50 del capítulo anterior, pero con un factor de escala tres veces mayor.

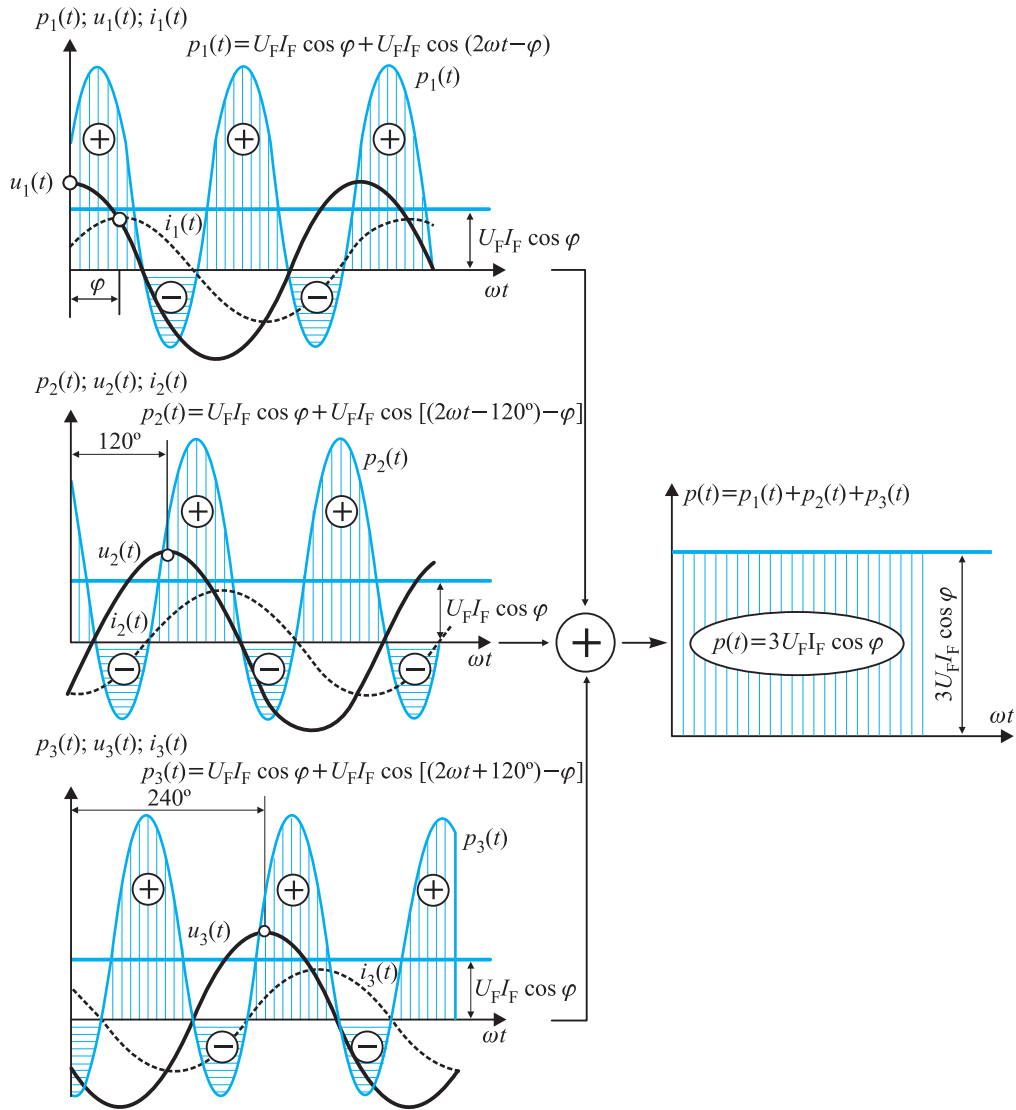


Figura 3.38 Potencias instantáneas de fase y total de un sistema trifásico equilibrado

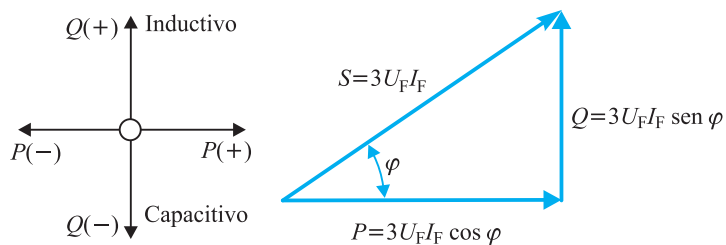


Figura 3.39 Triángulo de potencias en trifásica

Debe destacarse que en los cálculos anteriores se utilizan valores simples o de fase de tensiones y corrientes, y se aplican a sistemas conectados en estrella o en triángulo indistin-

tamente. En cualquier caso conocido el f.d.p. de la carga, será preciso medir la tensión de fase y la corriente de fase para poder determinar la potencia activa del sistema trifásico. En muchos casos, tales medidas de valores simples son difíciles de hacer, si no imposibles. Por ejemplo, un motor trifásico conectado en triángulo tiene tres terminales accesibles que se unen a la red de alimentación, o si está conectado en estrella, el neutro de la misma no es accesible desde el exterior. Por todo ello, es conveniente expresar las potencias anteriores en función de valores de línea. Veamos las expresiones que se obtienen para cargas conectadas en estrella o triángulo.

a) Carga equilibrada conectada en estrella

En la Figura 3.40a se muestra una carga conectada en estrella de impedancia $Z \angle \varphi \Omega/\text{fase}$ que representa por ejemplo el circuito equivalente de un motor trifásico. Se indican los valores modulares de las tensiones y corrientes simples y compuestas. La relación entre ellos es según (3.14) y (3.19):

$$U_F = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \quad ; \quad I_F = I_L \quad (3.78)$$

que al sustituir en (3.75), (3.76) y (3.77) resulta:

$$\begin{aligned} P &= 3U_F I_F \cos \varphi = 3 \frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi \quad [\text{W}] \\ Q &= 3U_F I_F \sin \varphi = 3 \frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \sin \varphi = \sqrt{3} U_L I_L \sin \varphi \quad [\text{VAr}] \\ S &= 3U_F I_F = 3 \frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L = \sqrt{3} U_L I_L \quad [\text{VA}] \end{aligned} \quad (3.79)$$

relaciones que expresan las potencias en función de valores de línea. (Conviene recalcar que φ es el ángulo que **forman la tensión y la corriente en cada fase y no la tensión de línea con la corriente de línea**).

b) Carga equilibrada conectada en triángulo

En la Figura 3.40b se muestra una carga conectada en triángulo de impedancia $Z \angle \varphi \Omega/\text{fase}$, en la que se indican los valores simples y compuestos de tensiones y corrientes. Las relaciones modulares entre ellos de acuerdo con (3.26) y (3.38) son:

$$U_{FA} = U_L \quad ; \quad I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \quad (3.80)$$

de este modo (3.75), (3.76) y (3.77) se transforman así:

$$\begin{aligned} P &= 3U_{FA} I_F \cos \varphi = 3U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi \quad [\text{W}] \\ Q &= 3U_{FA} I_F \sin \varphi = 3U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \sin \varphi = \sqrt{3} U_L I_L \sin \varphi \quad [\text{VAr}] \end{aligned}$$

$$S = 3U_{F\Delta} I_F = 3U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} U_L I_L \quad [\text{VA}] \quad (3.81)$$

expresiones que coinciden con las demostradas en el caso de conexión en estrella.

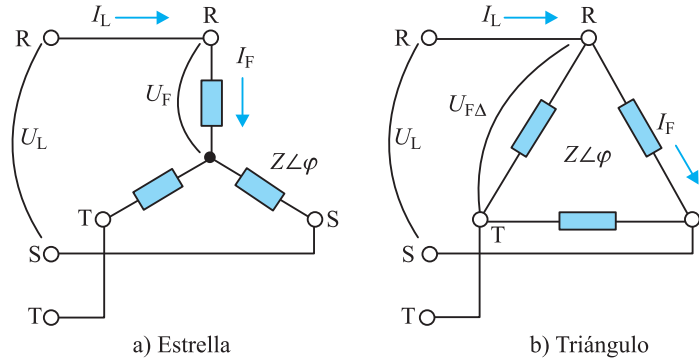


Figura 3.40 Cargas equilibradas trifásicas

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.10

Tres impedancias de $3 + j4 = 5 \angle 53,13^\circ \Omega$ están conectadas en estrella a una red trifásica de 220 V de línea. Calcular las potencias P , Q y S absorbidas por estas cargas.

Solución

Si se elige la tensión en la fase R como referencia se tiene:

$$\underline{U}_{RN} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \text{ V}$$

y por consiguiente la corriente de la fase R vale:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}} = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = \frac{44}{\sqrt{3}} \angle -53,13^\circ \text{ A}$$

con ello se tiene:

$$U_L = 220 \text{ V} \quad ; \quad I_L = I_F = \frac{44}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \varphi = 53,13^\circ \text{ (inductivo)}$$

y por ello resulta:

$$P = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot \frac{44}{\sqrt{3}} \cdot \cos 53,13^\circ = 5.808 \text{ W} \quad ; \quad Q = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot \frac{44}{\sqrt{3}} \cdot \sin 53,13^\circ = 7.744 \text{ W}$$

$$S = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot \frac{44}{\sqrt{3}} = 9.680 \text{ VA}$$

Comprobación:

La potencia activa es la potencia disipada en la parte resistiva de la impedancia:

$$P = 3RI_F^2 = 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{44}{\sqrt{3}}\right)^2 = 5.808 \text{ W}$$

y la potencia reactiva es la potencia en la reactancia:

$$Q = 3XI_F^2 = 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{44}{\sqrt{3}}\right)^2 = 7.744 \text{ VAr}$$

que coinciden con los valores calculados anteriormente.

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.11**

Calcular las potencias P , Q y S en el circuito del Ejemplo de Aplicación 3.8.

Solución

La tensión de línea que coincide con la de fase de las cargas es de 220 V. Los módulos de las corrientes en cada fase son:

$$\underline{I}_1 = |\underline{I}_{RS}| = 22 \text{ A} \quad ; \quad \underline{I}_2 = |\underline{I}_{ST}| = 22 \text{ A} \quad ; \quad \underline{I}_3 = |\underline{I}_{TR}| = 22 \text{ A}$$

y las fases de cada carga son:

$$\varphi_1 = 0^\circ \quad ; \quad \varphi_2 = 90^\circ \text{ (inductivo)} \quad ; \quad \varphi_3 = -90^\circ \text{ (capacitivo)}$$

de este modo la potencia activa total será:

$$P = \sum U_k I_k \cos \varphi_k = 220 \cdot 22 \cdot [\cos 0^\circ + \cos 90^\circ + \cos (-90^\circ)] = 4.840 \text{ W}$$

y la potencia reactiva:

$$Q = \sum U_k I_k \sin \varphi_k = 220 \cdot 22 \cdot [\sin 0^\circ + \sin 90^\circ + \sin (-90^\circ)] = 0 \text{ VAr}$$

de este modo se obtiene:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 4.840 \text{ VA}$$

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.12**

Una red trifásica de 20 kV de línea alimenta una instalación que dispone de dos cargas: a) una conectada en triángulo de 300 kVA con f.d.p. 0,85 inductivo; b) otra conectada en estrella de 100 kVA con f.d.p. 0,95 capacitivo. Calcular: 1) potencias P , Q y S equivalentes de la instalación; 2) módulo de la corriente de línea total absorbida; 3) f.d.p. del conjunto.

Solución

1) Las potencias para la carga a son:

$$P_a = S_a \cos \varphi_a = 300 \cdot 0,85 = 255 \text{ kW} \quad ; \quad Q_a = S_a \sin \varphi_a = 300 \cdot 0,527 = 158,03 \text{ kVAr}$$

y para la carga b:

$$P_b = S_b \cos \varphi_b = 100 \cdot 0,95 = 95 \text{ kW} \quad ; \quad Q_b = S_b \sin \varphi_b = 100 \cdot (-0,3122) = -31,22 \text{ kVAr}$$

de este modo resulta:

$$\underline{S} = (255 + j158,03) + (95 - j31,22) = 350 + j126,81$$

es decir:

$$P_T = 350 \text{ kW} \quad ; \quad Q_T = 126,81 \text{ kVAr} \quad ; \quad S_T = \sqrt{350^2 + 126,81^2} = 372,26 \text{ kVA}$$

2) Como quiera que:

$$S_T = \sqrt{3} U_L I_L = 372,26 \text{ kVA}$$

se tendrá:

$$I_L = \frac{S_T}{\sqrt{3} U_L} = \frac{372.260}{\sqrt{3} 20.000} = 10,75 \text{ A}$$

3) El f.d.p. del conjunto será:

$$\cos \varphi_T = \frac{P_T}{S_T} = \frac{350}{372,26} = 0,940 \text{ inductivo}$$

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.13**

Una carga trifásica equilibrada tiene una tensión de línea en sus bornes $U_L = 2.400 \text{ V}$ y consume 300 kW con f.d.p. $0,8$ inductivo. La carga está alimentada por medio de una línea de impedancia $\underline{Z}_L = 0,2 + j1,1 \Omega$ por hilo. Calcular la tensión compuesta a principio de línea en la red de entrada.

Solución

Aunque no es necesario conocer cómo está conectada la carga, podemos considerar que está en estrella. Se tendrá una corriente de línea:

$$I_L = \frac{P}{\sqrt{3} U_L \cos \varphi} = \frac{300.000}{\sqrt{3} \cdot 2.400 \cdot 0,8} = 90,21 \text{ A}$$

si se toma la tensión simple de la fase R' del receptor como referencia, se tendrá:

$$\underline{U}_{R'N} = \frac{2.400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 1.385,64 \angle 0^\circ \text{ voltios}$$

$$\underline{I}_R = 90,21 \angle -36,87^\circ \text{ amperios}$$

de este modo la tensión fase-neutro al principio de línea será:

$$\underline{U}_{RN} = \underline{U}_{R'N} + \underline{Z}_L \underline{I}_R = 1.385,64 \angle 0^\circ + (0,2 + j1,1) 90,21 \angle -36,87^\circ$$

es decir:

$$\underline{U}_{RN} = 1.461,22 \angle 2,69^\circ$$

lo que corresponde a un módulo de la tensión simple de:

$$U_F = 1.461,22 \text{ V}$$

y a un módulo de la tensión compuesta:

$$U_L = \sqrt{3} \cdot 1.461,22 = 2.530,9 \text{ V}$$

3.7. Corrección del factor de potencia en trifásica

Consideraremos únicamente la elevación del f.d.p. de los circuitos equilibrados. Ya se ha estudiado en el Capítulo 2 y con suficiente amplitud el por qué es necesario corregir el f.d.p. de las instalaciones. Cuando el sistema es trifásico el problema es idéntico al estudiado pero haciendo los cálculos **por fase**. Para mayor facilidad, consideremos que se tiene una carga inductiva equilibrada conectada en estrella y sea φ el ángulo que forma la U_F de fase con la I_F de fase, intentemos corregir el f.d.p. por medio de una estrella de condensadores, como indica la Figura 3.41.

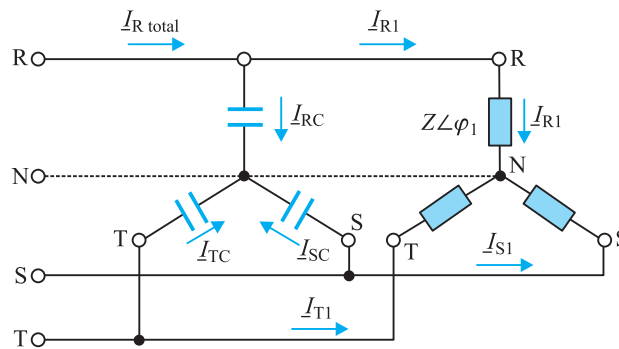


Figura 3.41 Carga trifásica en estrella y condensadores para corregir el f.d.p.

La corriente de carga I_{R1} se retrasa φ_1 grados de la tensión $\underline{U}_{RN}$ (haremos el cálculo únicamente para la fase R, en las otras se repite lo mismo). Como quiera que la estrella de condensadores está equilibrada, el centro de la estrella estará a 0 voltios (igual que el centro de la estrella de cargas), es como si un hilo conductor imaginario y sin impedancia uniera ambos neutros. La corriente I_{RC} en un condensador sabemos que se adelanta 90° a su tensión (en este caso $\underline{U}_{RN}$) por lo que la composición geométrica que da el primer lema de Kirchhoff en el nudo R, se expresa por el diagrama de la Figura 3.42, donde φ_2 es el ángulo de desfase final entre tensión y corriente.

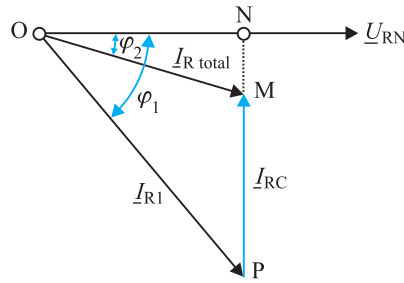


Figura 3.42 Composición fasorial de corrientes para corregir el f.d.p.

El problema es determinar I_{RC} y también la capacidad C cuando se conoce la potencia activa de la carga. Para ello si calculamos la corriente de línea I_{R1} :

$$|I_{R1}| = I_{R1} = \frac{P}{\sqrt{3} U_L \cos \varphi_1} \quad (3.82)$$

de la Figura 3.42 obtenemos:

$$|ON| = |OP| \cos \varphi_1 = I_{R1} \cos \varphi_1 \quad ; \quad |PN| = |OP| \sin \varphi_1 = I_{R1} \sin \varphi_1$$

$$|MN| = |ON| \tan \varphi_2 = I_{R1} \cos \varphi_1 \tan \varphi_2$$

por lo que:

$$|PM| = I_{RC} = |PN| - |MN| = I_{R1} \sin \varphi_1 - I_{R1} \cos \varphi_1 \tan \varphi_2$$

que es:

$$I_{RC} = I_{R1} \cos \varphi_1 (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) \quad (3.83)$$

conocido el valor de I_{RC} obtenemos la potencia reactiva de los condensadores:

$$Q_C = \sqrt{3} U_L I_{RC} \sin 90^\circ \quad [\text{VAr}]$$

que es:

$$Q_C = P(\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) \quad (3.84)$$

idéntica a la (2.152) lo que ocurre es que en la expresión (3.84) la potencia P es trifásica total, obteniendo para Q_C la potencia reactiva total del grupo de condensadores. Puesto que la expresión (3.84) es válida, vemos que entonces podremos emplear también la tabla del factor de corrección del Capítulo 4 para elevar el f.d.p. en trifásica. Para calcular la capacidad, al igual que en monofásica, se tendrá que la impedancia del condensador $1/C\omega$ se puede calcular mediante el cociente tensión del condensador, que es la **tensión simple de la red**, dividido por $|I_{RC}|$ es decir:

$$\frac{1}{C\omega} = \frac{U_F}{|I_{RC}|} \Rightarrow C = \frac{|I_{RC}|}{U_F \omega} \quad (3.85)$$

Vamos a ver seguidamente un resultado práctico interesante. La expresión (3.85) nos da la capacidad de cada uno de los condensadores conectados en estrella. ¿Cuál sería la

capacidad de unos condensadores conectados en triángulo que eleven el f.d.p. al mismo valor que la estrella? La pregunta es fácil de contestar recordando la equivalencia estrella-triángulo. Si llamamos C_Y la capacidad de los condensadores en estrella y C_Δ la capacidad equivalente de los condensadores en triángulo (Figura 3.43).

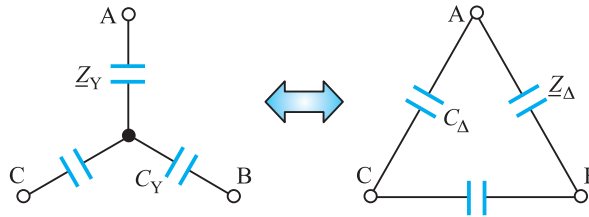


Figura 3.43 Equivalencia de condensadores en estrella y triángulo

La equivalencia entre las redes, de acuerdo con lo estudiado en el Epígrafe 1.11.3 será:

$$\underline{Z}_\Delta = 3 \underline{Z}_Y \quad (3.86a)$$

pero como se tiene:

$$|\underline{Z}_\Delta| = \frac{1}{C_\Delta \omega} \quad ; \quad |\underline{Z}_Y| = \frac{1}{C_Y \omega}$$

por lo que:

$$C_\Delta = \frac{C_Y}{3} \quad (3.86b)$$

Conclusión muy importante ya que nos dice que para corregir un f.d.p. la capacidad necesaria del triángulo es tres veces menor que la capacidad necesaria en estrella, esto hace que el fabricante de condensadores trifásicos diseñe los mismos directamente en triángulo, ya que obtiene el mismo efecto que la estrella con tres veces menos capacidad.

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.14

Cada fase de una carga trifásica conectada en estrella tiene 25 ohmios de resistencia y 0,1 H de inductancia, calcular: a) la corriente de línea, la potencia absorbida y el factor de potencia cuando esta carga se conecta a una red trifásica de 50 Hz, 415 V; b) la capacidad por fase de un grupo de condensadores conectados en triángulo que eleven el f.d.p. a la unidad, y la potencia reactiva correspondiente en los mismos.

Solución

a) La reactancia de cada fase es:

$$X_L = L\omega = 0,1 \cdot 2\pi \cdot 50 = 31,4 \, \Omega$$

La impedancia compleja será:

$$\underline{Z} = 25 + j31,4 = 40,13 \angle 51,47^\circ \text{ ohmios}$$

Luego el ángulo φ_1 que retrasa la corriente de la tensión es $51,47^\circ$. La tensión simple de la red es:

$$U_F = \frac{415}{\sqrt{3}} = 239,60 \text{ V}$$

por lo que el módulo de la corriente de línea es:

$$I_L = I_F = \frac{U_F}{Z} = \frac{239,60}{40,13} = 5,97 \text{ A}$$

la potencia absorbida por la carga es:

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi$$

de donde $\cos \varphi = \cos 51,47^\circ = 0,623$, por lo que:

$$P = \sqrt{3} \cdot 415 \cdot 5,97 \cdot 0,623 = 2.673 \text{ W}$$

b) El diagrama fasorial del sistema es el representado en la Figura 3.44, donde se ha elegido como referencia la tensión simple y donde se ha supuesto en principio que los condensadores están en estrella. Como quiera que hay que elevar el f.d.p. total de la instalación a la unidad, la corriente capacitiva necesaria, de acuerdo con la Figura 3.44 será:

$$I_{RC} = I_{R1} \sin \varphi_1 = 5,97 \cdot \sin 51,47^\circ = 4,67 \text{ A}$$

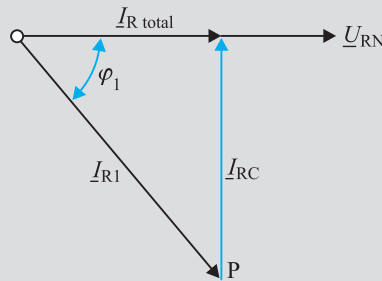


Figura 3.44 Diagrama fasorial de corrientes para corregir el f.d.p. a la unidad

Si los condensadores están en estrella, la tensión de cada condensador será:

$$U_C = U_F = 239,60 \text{ V}$$

y la impedancia capacitiva de cada fase será:

$$\frac{1}{C\omega} = \frac{U_C}{I_{RC}} = \frac{239,60}{4,67} = 51,3 \text{ ohmios}$$

de donde:

$$C = \frac{1}{51,3\omega} = \frac{1}{51,3 \cdot 2\pi \cdot 50} = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

que son 62 μF , por lo que la capacidad en triángulo será tres veces menor como se ha indicado antes, es decir:

$$C_{\Delta} = \frac{62}{3} = 20,66 \mu\text{F}$$

La potencia reactiva de los condensadores, la vamos a calcular si está el grupo conectado en estrella (da lo mismo en triángulo, a efectos de potencia).

$$Q = \sqrt{3} U_C I_{RC} \sin 90^\circ = \sqrt{3} \cdot 415 \cdot 4,67 = 3.350 \text{ VAR}$$

El lector puede comprobar estos resultados utilizando la tabla de factores de corrección (Tabla 2.3 del Capítulo 2).

3.8. Medida de la potencia en sistemas trifásicos

3.8.1. Generalidades

En el Epígrafe 2.13 se analizó la medida de la potencia en un circuito de c.a. monofásico. Recuerdese que la lectura de un vatímetro, que tiene conectada su bobina voltimétrica a una tensión U_x y por cuya bobina amperimétrica circula una corriente I_y , siendo α el ángulo entre los fasores de ambas señales es:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u_x(t) i_y(t) dt = U_x I_y \cos \alpha \quad (3.87)$$

Si se desea medir la potencia (activa) de un sistema trifásico a 4 hilos (equilibrado o no) necesitaremos tres vatímetros, uno por cada fase tal como se muestra en la Figura 3.45. La potencia total del conjunto será igual a la suma de las potencias parciales de cada fase, es decir:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad (3.88)$$

si se da el caso especial de que la carga está equilibrada, entonces será suficiente utilizar un único vatímetro conectado a una fase, de tal modo que la potencia total será tres veces la que marque este vatímetro.

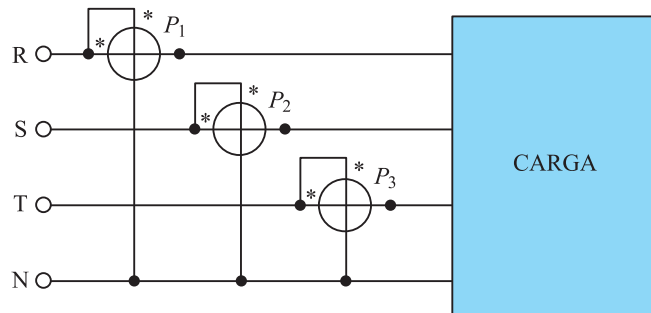


Figura 3.45 Medida de la potencia trifásica de un sistema a cuatro hilos

Cuando la red tiene solamente tres hilos (es decir no existe hilo neutro), estando la carga en estrella o triángulo, equilibrada o no, se puede efectuar la medida de la potencia trifásica utilizando solamente dos vatímetros. En general el mínimo número de vatímetros que se requiere para medir la potencia en un sistema polifásico es uno menos que el número de hilos o conductores del sistema (*Teorema de Blondel*). Veamos la demostración para un sistema trifásico a tres hilos. Sabemos que la potencia instantánea total de un sistema trifásico vale:

$$p(t) = u_{RN}(t)i_R(t) + u_{SN}(t)i_S(t) + u_{TN}(t)i_T(t) \quad (3.89)$$

si el sistema tiene tres hilos, entonces se cumple:

$$i_R(t) + i_S(t) + i_T(t) = 0 \quad (3.90)$$

en consecuencia se puede deducir una corriente de las otras dos; si por ejemplo se despeja $i_T(t)$, resulta:

$$i_T(t) = -i_R(t) - i_S(t) \quad (3.91)$$

que llevando a (3.89) da un valor para la potencia instantánea $p(t)$:

$$p(t) = u_{RN}(t)i_R(t) + u_{SN}(t)i_S(t) + u_{TN}(t)[-i_R(t) - i_S(t)] \quad (3.92)$$

es decir:

$$p(t) = [u_{RN}(t) - u_{TN}(t)]i_R(t) + [u_{SN}(t) - u_{TN}(t)]i_S(t) \quad (3.93)$$

pero como quiera que se cumple:

$$u_{RN}(t) - u_{TN}(t) = u_{RT}(t) \quad ; \quad u_{SN}(t) - u_{TN}(t) = u_{ST}(t) \quad (3.94)$$

resultará una expresión para la potencia instantánea:

$$p(t) = u_{RT}(t)i_R(t) + u_{ST}(t)i_S(t) = p_1(t) + p_2(t) \quad (3.95)$$

lo que demuestra que se puede medir la potencia total de un sistema trifásico a tres hilos (equilibrado o no) por medio de dos vatímetros. Las conexiones deben ser las siguientes:

VATÍMETRO 1: Bobina voltimétrica conectada entre las fases R y T. Bobina amperimétrica en serie con la fase R. La lectura correspondiente será:

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_0^T u_{RT}(t)i_R(t) dt = U_{RT} I_R \cos \alpha \quad (3.96)$$

siendo α el ángulo de desfase entre u_{RT} e i_R . Cuando se realizan problemas y se trabaja con valores fasoriales es a veces más práctico obtener la potencia anterior mediante la expresión:

$$P_1 = \operatorname{Re}[\underline{U}_{RT} \cdot \underline{I}_R^*] \quad (3.97)$$

VATÍMETRO 2: Bobina voltimétrica conectada entre las fases S y T. Bobina amperimétrica en serie con la fase S. La lectura correspondiente será:

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_{ST}(t)i_S(t) dt = U_{ST} I_S \cos \beta \quad (3.98)$$

en el que β indica el desfase entre u_{ST} e i_S . Al igual que en el caso anterior, cuando se realizan problemas y se trabaja con valores fasoriales es a veces más práctico obtener la potencia anterior mediante la expresión:

$$P_2 = \operatorname{Re}[\underline{U}_{ST} \cdot \underline{I}_S^*] \quad (3.99)$$

El esquema de montaje es el mostrado en la Figura 3.46. Debido a la naturaleza de las conexiones, ninguna de las lecturas (P_1 o P_2) tiene en sí misma un significado físico como potencia de alguna parte de la carga. Sin embargo su suma algebraica:

$$P = P_1 + P_2 \quad (3.100)$$

representa de acuerdo con (3.95), la potencia activa total absorbida por la carga trifásica de la Figura 3.46. Este procedimiento de medida se conoce en la práctica como **conexión Aron**.

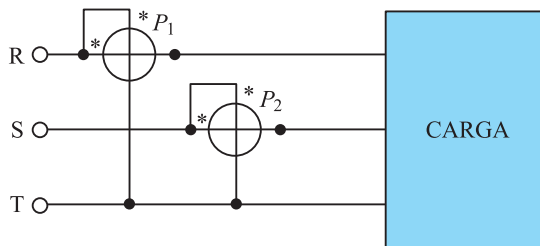


Figura 3.46 Medida de la potencia trifásica con dos vatímetros. Conexión Aron

Es importante para la realización de una medida correcta, respetar las polaridades tanto de las bobinas amperimétricas como voltimétricas de los vatímetros. Hay que hacer notar también que, bajo ciertas condiciones de servicio (por ejemplo en ensayos de vacío y cortocircuito de máquinas eléctricas), alguno de los dos vatímetros puede tender a dar lecturas negativas. En estos casos, para poder efectuar la medida correspondiente es preciso intercambiar los terminales de la bobina voltimétrica o de la amperimétrica. De este modo la potencia medida por este vatímetro deberá considerarse entonces con signo menos en la ecuación (3.100).

■ 3.8.2. Medida de la potencia en circuitos equilibrados

Supóngase que la carga de la Figura 3.46 está formada por tres impedancias iguales $Z \angle \varphi$ (carga equilibrada) en estrella o triángulo. En este caso se obtendrán unas corrientes de **línea** de igual módulo y desfasadas de las **tensiones simples** de la red el ángulo φ (argumento de las impedancias). En la Figura 3.47 se han representado en un diagrama fasorial las tensiones simples y compuestas, y también las corrientes de línea. De acuerdo con este diagrama fasorial el ángulo α que aparece en (3.96) y que representa el desfase entre $\underline{U}_{RT}$ e $\underline{I}_R$ es $\alpha = \varphi - 30^\circ$, mientras que el ángulo β que aparece en (3.97) es el desfase que existe entre $\underline{U}_{ST}$ e $\underline{I}_S$ y que vale: $\beta = \varphi + 30^\circ$.

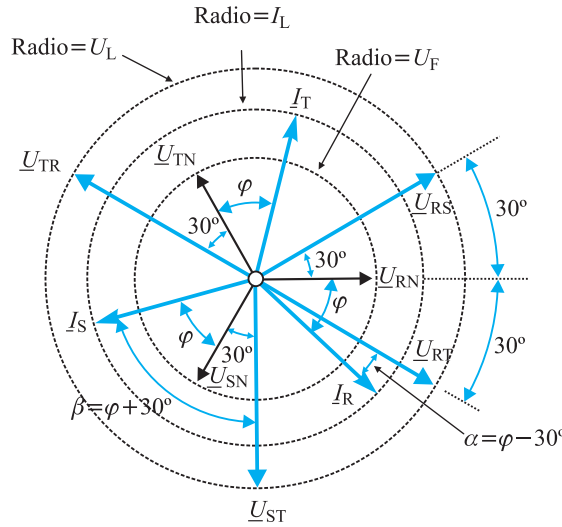


Figura 3.47 Fasores de tensiones y corrientes en un sistema trifásico equilibrado

El módulo de las tensiones de línea es U_L y el módulo de las corrientes de línea es I_L , de este modo las lecturas de los vatímetros de acuerdo con (3.96) y (3.97) serán:

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{Re}[\underline{U}_{RT} \cdot \underline{I}_R^*] = U_L I_L \cos(\varphi - 30^\circ) \\ P_2 &= \text{Re}[\underline{U}_{ST} \cdot \underline{I}_S^*] = U_L I_L \cos(\varphi + 30^\circ) \end{aligned} \quad (3.101)$$

de este modo la potencia total absorbida por la carga será:

$$P = P_1 + P_2 = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi \quad (3.102)$$

que representa la potencia activa de un sistema equilibrado.

Si se analizan las lecturas de los vatímetros (3.101), se pueden obtener los siguientes casos particulares:

1. Si la carga es resistiva pura, $\varphi = 0^\circ$, y ambas lecturas serán iguales: $P_1 = P_2$.
2. Si $\varphi < 60^\circ$, es decir si el f.d.p. es superior a 0,5, entonces se tendrá: $P_1 > 0$ y $P_2 > 0$.
3. Si $\varphi = 60^\circ$ (f.d.p. = 0,5), entonces el segundo vatímetro dará una lectura nula ($P_2 = 0$).
4. Si $\varphi > 60^\circ$, entonces $\cos(30^\circ + \varphi)$ es negativo y el vatímetro P_2 dará una lectura negativa. Para poder efectuar la medida deberá invertirse una de las bobinas del vatímetro 2. La potencia sigue siendo la suma de P_1 (positivo) y P_2 (negativo).

De las lecturas de los vatímetros se puede deducir también el f.d.p. de la carga. Restando los valores de P_1 y P_2 de (3.101) se obtiene:

$$P_1 - P_2 = U_L I_L \sin \varphi \quad (3.103)$$

y dividiendo (3.103) por (3.102) resulta:

$$\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi \quad (3.104)$$

es decir:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \quad (3.105)$$

por lo que el f.d.p. será:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \left(\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right)^2}} \quad (3.106)$$

de las lecturas de los vatímetros puede obtenerse también la potencia reactiva de la carga mediante la ecuación:

$$Q = \sqrt{3} U_L I_L \operatorname{sen} \varphi = \sqrt{3} (P_1 - P_2) \quad (3.107)$$

Otro método de obtener la potencia reactiva en sistemas trifásicos equilibrados es utilizar un vatímetro conectado tal como se señala en la Figura 3.48, es decir con la bobina amperimétrica en la fase R y la voltimétrica entre las fases S y T. Obsérvese de acuerdo con la construcción fasorial de la Figura 3.47, que la medida correspondiente es igual a:

$$P_3 = \operatorname{Re}[\underline{U}_{ST} I_R^*] = U_L I_L \cos(90^\circ - \varphi) = U_L I_L \operatorname{sen} \varphi \quad (3.108)$$

Teniendo en cuenta que la potencia reactiva total de un sistema trifásico equilibrado es $Q = \sqrt{3} U_L I_L \operatorname{sen} \varphi$, la lectura del vatímetro de la Figura 3.48 es $1/\sqrt{3}$ la potencia reactiva total del sistema trifásico equilibrado. Evidentemente si la carga es desequilibrada para medir la potencia reactiva se requieren tres varímetros (medidores de potencia reactiva) si el sistema tiene cuatro hilos y dos varímetros si la red tiene tres hilos, con esquemas similares a los señalados en las Figuras 3.43 y 3.44, pero empleando varímetros. Desde el punto de vista constructivo un varímetro es similar a un vatímetro, es decir tiene una bobina amperimétrica y otra voltimétrica pero esta tiene mucha inductancia para obtener un desfase adicional de 90° y conseguir de este modo que la lectura sea el producto de la tensión por la corriente por el seno del ángulo que forman ambas magnitudes.

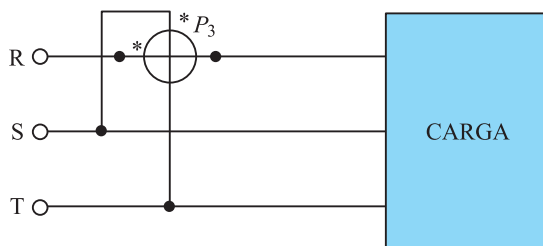


Figura 3.48 Conexión de un vatímetro para medir la potencia reactiva de una carga equilibrada

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.15**

Una instalación alimentada por una red trifásica simétrica de 380 V de tensión compuesta y 50 Hz, consta de las siguientes cargas: a) un motor trifásico de 10 kW, rendimiento del 86 % y f.d.p. $\sqrt{3}/2$ inductivo; b) un conjunto trifásico de resistencias de calefacción, con una potencia total de 5 kW; c) un motor trifásico de 7 kW, $\eta = 80\%$, $\cos \varphi = 1/\sqrt{2}$ inductivo. Calcular: a) módulo de las corrientes parciales absorbidas por cada carga y total de la instalación con su f.d.p.; b) lecturas de dos vatímetros colocados correctamente y que midan la potencia (activa) absorbida por la instalación; c) potencia reactiva y capacidad por fase de una batería de condensadores conectados en triángulo, que eleven el f.d.p. del conjunto a la unidad; d) contestar el apartado 2 cuando la instalación lleva incorporados los condensadores calculados en el apartado 3.

Solución

a) Los módulos de las corrientes de línea son:

$$I_a = \frac{P}{\sqrt{3} U \eta \cos \varphi} = \frac{10.000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,86 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 20,4 \text{ A} \quad ; \quad I_b = \frac{5.000}{\sqrt{3} \cdot 380} = 7,6 \text{ A}$$

$$I_c = \frac{7.000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = 18,8 \text{ A}$$

Para calcular la corriente total, deberán sumarse *geométricamente* (fasorial) las corrientes anteriores de una determinada fase (R, S, o T). Si se elige la tensión $\underline{U}_{RN}$ como referencia de fase, resulta:

$$\underline{U}_{RN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ$$

y las expresiones fasoriales de las corrientes en la fase R, correspondientes a las cargas anteriores, teniendo en cuenta que las cargas son inductivas (es decir las corrientes se retrasan respecto a la tensión), son:

$$\underline{I}_{Ra} = 20,4 \angle - \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 20,4 \angle -30^\circ \text{ A} \quad ; \quad \underline{I}_{Rb} = 7,6 \angle \arccos 1 = 7,6 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_{Rc} = 18,8 \angle - \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 18,8 \angle -45^\circ$$

de este modo la corriente total de la instalación en la fase R es:

$$\underline{I}_{Rtotal} = \underline{I}_{Ra} + \underline{I}_{Rb} + \underline{I}_{Rc} = 45,17 \angle -31,35^\circ \text{ A} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_{Stotal} = 45,17 \angle -151,35^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_{Ttotal} = 45,17 \angle +88,65^\circ \text{ A}$$

es decir la magnitud de la corriente total es de 45,17 A y el f.d.p. será: $\cos 31,35^\circ = 0,854$.

b) Si se colocan los vatímetros como se indica en la Figura 3.46, al ser el sistema equilibrado, las lecturas vendrán expresadas por (3.101), en las que $\varphi = 31,35^\circ$ (los desfases se consideran positivos para cargas inductivas), resultando:

$$P_1 = U_L I_L \cos(\varphi - 30^\circ) = 380 \cdot 45,17 \cdot \cos(31,5^\circ - 30^\circ) = 17.160 \text{ W}$$

$$P_2 = U_L I_L \cos(\varphi + 30^\circ) = 380 \cdot 45,17 \cdot \cos(31,5^\circ + 30^\circ) \approx 8.230 \text{ W}$$

por lo que la potencia total absorbida por la instalación es:

$$P = P_1 + P_2 = 17.260 + 8.230 = 25.390 \text{ W}$$

que se puede comprobar que coincide con:

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi = \sqrt{3} 380 \cdot 45,17 \cdot \cos 31,5^\circ \approx 25.390 \text{ W}$$

o también con:

$$P = \frac{P_a}{\eta_a} + \frac{P_b}{\eta_b} + \frac{P_c}{\eta_c} = \frac{10.000}{0,86} + \frac{5.000}{1} + \frac{7.000}{0,8} = 25.378 \text{ W} \approx 25.390 \text{ W}$$

que prácticamente coincide con los valores anteriores, teniendo en cuenta los errores de redondeo.

Las potencias P_1 y P_2 se pueden determinar también de acuerdo con (3.96b):

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{Re}[\underline{U}_{RT} \underline{I}_R^*] = \text{Re}[380 \angle -30^\circ \cdot 45,17 \angle 31,35^\circ] = 380 \cdot 45,17 \cdot \cos(31,35^\circ - 30^\circ) = \\ &= 380 \cdot 45,17 \cdot \cos 1,35^\circ = 17.160 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \text{Re}[\underline{U}_{ST} \underline{I}_S^*] = \text{Re}[380 \angle -90^\circ \cdot 45,17 \angle +151,35^\circ] = 380 \cdot 45,17 \cdot \cos(151,35^\circ - 90^\circ) = \\ &= 380 \cdot 45,17 \cdot \cos 61,35^\circ = 8.230 \text{ W} \end{aligned}$$

esta forma de calcular las potencias que señalan los vatímetros se prefiere cuando todos los cálculos se realizan utilizando magnitudes fasoriales.

c) La potencia reactiva necesaria en condensadores es:

$$Q_C = P(\text{tg } \varphi_i - \text{tg } \varphi_f) = 25.390 \cdot \text{tg } 31,35^\circ = 15.467 \text{ VAr}$$

ya que $\varphi_i = 31,35$ y $\varphi_f = 0^\circ$ (porque el $\cos \varphi_f = 1$).

Si se denomina I_C al módulo de la corriente de fase de los condensadores se cumple:

$$Q_C = 3 U_F I_C = 3 U_L I_C$$

es decir:

$$I_C = \frac{15.467}{3 \cdot 380} = 13,57 \text{ A}$$

y aplicando la ley de Ohm en alterna (en forma modular) a los condensadores, resulta:

$$I_C = \frac{U_L}{\frac{1}{C_\Delta \omega}} = U_L C_\Delta \omega \Rightarrow C_\Delta = \frac{I_C}{U_L \omega} = \frac{13,57}{380 \cdot 2\pi \cdot 50} = 113,65 \text{ } \mu\text{F}$$

d) La nueva corriente de línea será:

$$I_L = \frac{P}{\sqrt{3} U_L \cos \varphi} = \frac{25.390}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 1} = 38,58 \text{ A}$$

ya que el f.d.p. total es igual a la unidad. Las lecturas de los vatímetros serán:

$$P_1 = U_L I_L \cos(\varphi - 30^\circ) = 380 \cdot 38,58 \cdot \cos(0^\circ - 30^\circ) \approx 12.696 \text{ W}$$

$$P_2 = U_L I_L \cos(\varphi + 30^\circ) = 380 \cdot 38,58 \cdot \cos(0^\circ + 30^\circ) \approx 12.696 \text{ W}$$

es decir resulta una potencia total:

$$P = P_1 + P_2 = 12.696 + 12.696 = 25.392 \text{ W} \approx 25.390 \text{ W}$$

que coincide con la potencia activa total de la instalación. Téngase en cuenta que los condensadores modifican la potencia reactiva del sistema pero **no** la potencia activa.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.16

La instalación trifásica a tres hilos de la Figura 3.49 tiene una tensión simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz (referencia de fases $\underline{U}_{RN}$). La carga 1 es un sistema equilibrado conectado en triángulo de $36 + j27$ ohmios/fase que se une a la red a través de una línea trifásica de reactancia $j7$ ohmios por hilo. La carga 2 es una batería de condensadores puestos en triángulo de 5.000 VAR. La carga 3 es una carga monofásica de impedancia $\underline{Z}_3 = 50 \angle 36,87^\circ \Omega$ conectada entre las fases R y S. La carga 4 es desequilibrada y está conectada en triángulo, formada por tres impedancias $\underline{Z}_a$ y $\underline{Z}_b$ inductivas puras y $\underline{Z}_c$ capacitiva pura.

a) Inicialmente se cierra el interruptor D_1 . Calcular la lectura de los voltímetros V_1 y V_2 . b) Estando cerrado D_1 se cierra a continuación D_2 , calcular la lectura del amperímetro A_R y el factor de potencia con el que trabaja el conjunto de las cargas 1 y 2. c) En la situación anterior se desconectan los condensadores y se cierra el interruptor D_3 (es decir solamente están cerrados D_1 y D_3), calcular las lecturas de los vatímetros P_1 y P_2 . d) Se abren los interruptores D_1 y D_3 y se cierra solamente el interruptor D_4 de la carga 4. Se sabe que esta carga no consume potencia activa ni potencia reactiva y además que el amperímetro de la

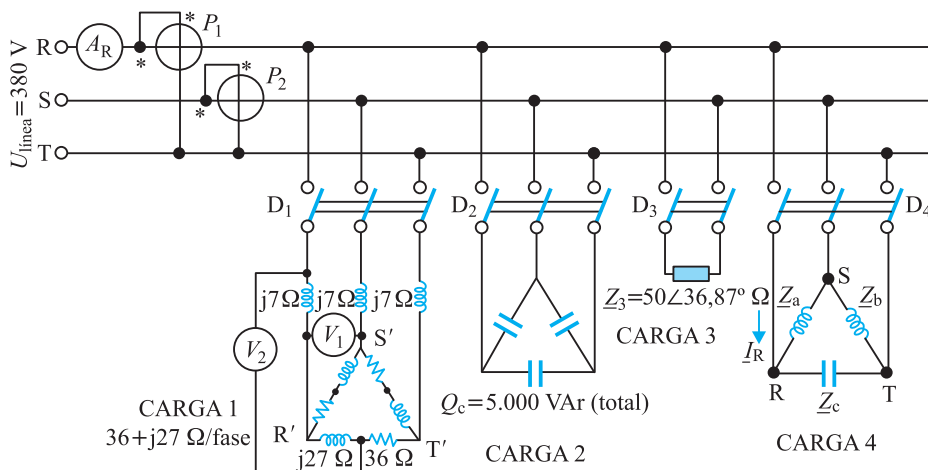


Figura 3.49 Ejemplo de aplicación 3.16

fase R señala una lectura de $38\sqrt{3}$ y que esta corriente está en fase con la tensión compuesta $\underline{U}_{RS}$ de la red. Calcular los valores de las impedancias $\underline{Z}_a$, $\underline{Z}_b$ y $\underline{Z}_c$.

Solución

a) Transformando la carga 1 de triángulo a estrella se obtiene la Figura 3.50, en la que se cumple:

$$\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3} = \frac{36 + j27}{3} = 12 + j9 \Omega$$

cada una de las impedancias en estrella está en serie con la impedancia por fase de la línea $j7 \Omega$, lo que da lugar a una impedancia resultante por fase:

$$\underline{Z}_{\text{fase}} = (12 + j9) + j7 = 12 + j16 = 20 \angle 53,13^\circ \Omega$$

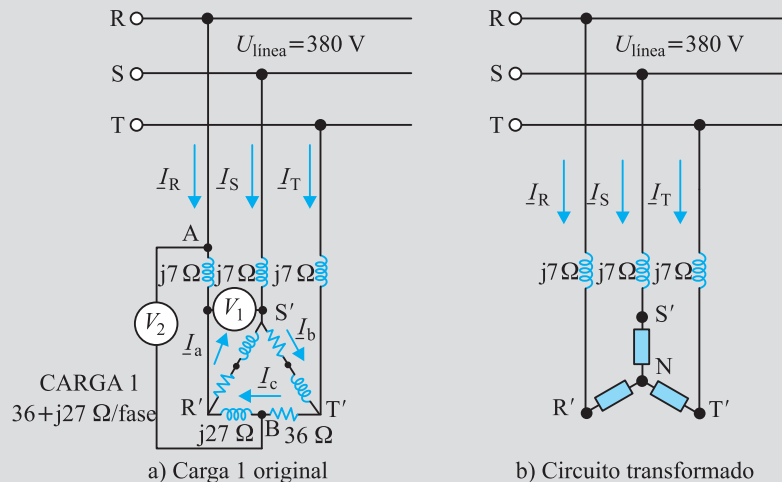


Figura 3.50 Carga 1 y su circuito transformado

Por lo tanto la corriente de línea de la fase R, tomando la tensión $\underline{U}_{RN}$ como referencia de fases en la Figura 3.50b, es:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_{\text{fase}}} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{20 \angle 53,13^\circ} = 10,97 \angle -53,13^\circ \text{ A}$$

por consiguiente la tensión $\underline{U}_{R'N}$ en la carga en estrella tiene un valor:

$$\underline{U}_{R'N} = (12 + j9) \cdot 10,97 \angle -53,13^\circ = 15 \angle 36,87^\circ \cdot 10,97 \angle -53,13^\circ = 164,55 \angle -16,26^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una tensión compuesta o de línea de valor $U_L = \sqrt{3} \cdot 164,55 = 285 \text{ V}$, que es la tensión que marcará el voltímetro V_1 de la Figura 3.50a. Las tensiones complejas en los terminales de la carga 1 son de este modo:

$$\underline{U}_{R'S} = 285 \angle (-16,26^\circ + 30^\circ) = 285 \angle 13,74^\circ ; \quad \underline{U}_{S'T'} = 285 \angle -106,26^\circ ; \quad \underline{U}_{T'R'} = 285 \angle 133,74^\circ$$

Es por ello que las corrientes internas de la carga en triángulo de la Figura 3.50a son:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_{R'S'}}{\underline{Z}_\Delta} = \frac{285 \angle 13,74^\circ}{36 + j27} = \frac{285 \angle 13,74^\circ}{45 \angle 36,87^\circ} = 6,33 \angle -23,13^\circ \text{ A} \quad ; \quad \underline{I}_b = 6,33 \angle -143,13^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_c = 6,33 \angle 96,87^\circ \text{ A}$$

valores que se hubieran podido obtener directamente a partir de la corriente de línea de la fase R, ya que las corrientes simples de un triángulo tienen un módulo $1/\sqrt{3}$ veces la corriente de línea, de tal modo que además la corriente $\underline{I}_a$ se adelanta 30° respecto de $\underline{I}_R$, por lo que el valor correspondiente sería:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{I}_R e^{+j30^\circ}}{\sqrt{3}} = \frac{10,97 \angle -53,13^\circ \cdot 1 \angle 30^\circ}{\sqrt{3}} = 6,33 \angle -23,13^\circ \text{ A}$$

que coincide con el valor calculado anteriormente a partir de la tensión en la carga. La lectura del voltímetro V_2 es la d.d.p. entre los nudos A y B de la Figura 3.50a lo que da lugar a la siguiente ecuación:

$$\underline{U}_{AB} = j7 \cdot \underline{I}_R - j27 \cdot \underline{I}_c = j7 \cdot 10,97 \angle -53,13^\circ - j27 \cdot 6,33 \angle 96,87^\circ = 240,49 \angle 16,06^\circ \text{ V}$$

por consiguiente el voltímetro V_1 señala el módulo de la tensión anterior, es decir $V_1 = 240,49$ voltios.

b1) Primer procedimiento (cálculo por potencias):

De acuerdo con el apartado anterior, las potencias activa y reactiva absorbidas por la carga 1, incluyendo la línea de alimentación son respectivamente:

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 10,97 \cdot \cos 53,13^\circ = 4.332 \text{ W}$$

$$Q = \sqrt{3} U_L I_L \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 10,97 \cdot \sin 53,13^\circ = 5.776,2 \text{ VAr}$$

y como la potencia reactiva de los condensadores es de -5.000 VAr, la potencia compleja del conjunto es igual a:

$$\underline{S} = 4.332 + j(5.776,2 - 5.000) = 4.332 - j776,2 = 4.401 \angle -10,16^\circ \text{ VA}$$

por lo tanto el conjunto trabaja con un f.d.p. inductivo de valor:

$$\cos \varphi_{\text{total}} = \cos 10,16^\circ = 0,984$$

y el módulo de la corriente de línea se obtiene de la ecuación:

$$I_L = \frac{S}{\sqrt{3} U_L} = \frac{4.401}{\sqrt{3} \cdot 380} \approx 6,69 \text{ A}$$

que será la corriente que señalará el amperímetro A_R .

b2) Segundo procedimiento (cálculo por corrientes):

El módulo de la corriente de línea absorbida por la batería de condensadores vale:

$$I_C = \frac{Q}{\sqrt{3} U_L} = \frac{5.000}{\sqrt{3} \cdot 380} \approx 7,6 \text{ A}$$

que corresponde a un valor complejo para la corriente capacitiva de la fase R:

$$\underline{I}_{RC} = 7,6 \angle +90^\circ \text{ A}$$

por lo tanto la corriente total en la fase R es igual a:

$$\underline{I}_{R\text{total}} = \underline{I}_{R1} + \underline{I}_{R3} = 10,97 \angle -53,13^\circ + 7,6 \angle +90^\circ \approx 6,69 \angle -10,13^\circ \text{ A}$$

en la ecuación anterior se ha llamado $\underline{I}_{R1}$ a la corriente en la fase R absorbida por la carga 1 (más la línea correspondiente). En consecuencia la corriente total en la fase R y que señalará el amperímetro A_R es de 6,69 A y el f.d.p. del conjunto es el $\cos 10,13^\circ = 0,984$ inductivo.

c) En esta situación el esquema de cargas correspondiente es el mostrado en la Figura 3.51. Las corrientes de las fases R y S de la carga 1 se han calculado en el apartado a) y son:

$$\underline{I}_{R1} = 10,97 \angle -53,13^\circ \text{ A} \quad ; \quad \underline{I}_{S1} = 10,97 \angle -173,13^\circ \text{ A}$$

la carga 3 es monofásica y está conectada entre las fases R y S, la corriente correspondiente que va desde R hasta S es:

$$\underline{I}_{R3} = \frac{\underline{U}_{RS}}{\underline{Z}_3} = \frac{380 \angle 30^\circ}{50 \angle 36,87^\circ} \approx 7,6 \angle -6,9^\circ \text{ A}$$

en la Figura 3.51 se muestra el sentido vectorial de la corriente anterior y que va del terminal R al terminal S. Obsérvese que se ha tomado también como corriente entrante a la carga la corriente en la fase S (lo cual no es lógico considerar para una carga monofásica, ya que debe ser una corriente de vuelta); la asignación de este sentido de las corrientes absorbidas por las cargas monofásicas en trifásica, sirve para tener en cuenta que las corrientes totales en la línea de alimentación son la **suma compleja** de las corrientes parciales de todas las cargas (sean estas monofásicas o trifásicas). De acuerdo con lo anterior, la expresión fasorial de la corriente en la fase S absorbida por la carga 3 es:

$$\underline{I}_{S3} = -\underline{I}_{R3} = -7,6 \angle -6,9^\circ = 7,6 \angle 173,1^\circ \text{ A}$$

En consecuencia las corrientes totales en las fases R y S de la red de alimentación, de acuerdo con la Figura 3.51, son respectivamente:

$$\underline{I}_R = \underline{I}_{R1} + \underline{I}_{R3} = 10,97 \angle -53,13^\circ + 7,6 \angle -6,9^\circ \approx 17,13 \angle -34,4^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_S = \underline{I}_{S1} + \underline{I}_{S3} = 10,97 \angle -173,13^\circ + 7,6 \angle 173,1^\circ \approx 18,44 \angle -178,9^\circ \text{ A}$$

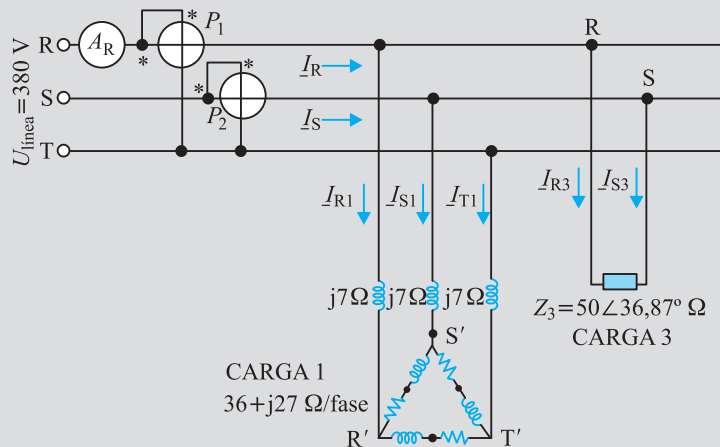


Figura 3.51 Conexión de las cargas 1 y 3

y las lecturas de los vatímetros para este conjunto desequilibrado trifásico son:

$$P_1 = \operatorname{Re}[\underline{U}_{RT} \underline{I}_R^*] = \operatorname{Re}[380 \angle -30^\circ \cdot 17,13 \angle 13,4^\circ] \approx 6.490 \text{ W}$$

$$P_2 = \operatorname{Re}[\underline{U}_{ST} \underline{I}_S^*] = \operatorname{Re}[380 \angle -90^\circ \cdot 18,44 \angle 178,9^\circ] \approx 146,7 \text{ W}$$

d) Si se conecta únicamente la carga 4, el esquema eléctrico es el que se señala en la Figura 3.52, donde se ha incluido el diagrama fasorial de las tensiones de la red. De acuerdo con el enunciado, la corriente en la fase R es $38\sqrt{3}$ amperios y está en fase con la tensión $\underline{U}_{RS}$, por lo tanto su expresión fasorial es:

$$\underline{I}_R = 38\sqrt{3} \angle +30^\circ \text{ A}$$

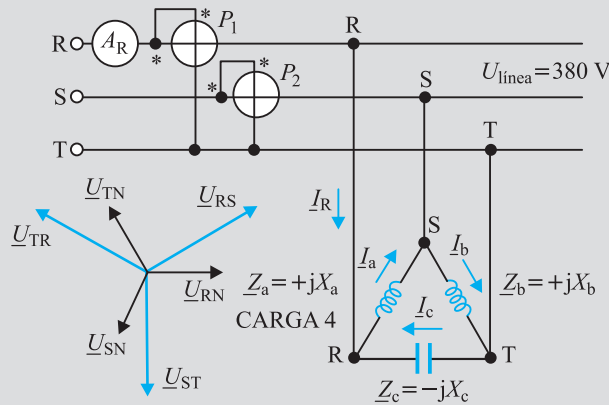


Figura 3.52 Corrientes en la carga desequilibrada 4

Las corrientes de fase de las cargas de la Figura 3.52 vienen expresadas por las ecuaciones siguientes:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_{RS}}{\underline{Z}_a} = \frac{380 \angle 30^\circ}{jX_a} = \frac{380}{X_a} \angle -60^\circ \text{ A} ; \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_{ST}}{\underline{Z}_b} = \frac{380 \angle -90^\circ}{jX_b} = \frac{380}{X_a} \angle -180^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{U}_{TR}}{\underline{Z}_c} = \frac{380 \angle 150^\circ}{-jX_c} = \frac{380}{X_a} \angle 240^\circ \text{ A}$$

y al aplicar el primer lema de Kirchhoff en el nudo R de la Figura 3.52, la corriente en la fase R cumple la ecuación:

$$\underline{I}_R = \underline{I}_a - \underline{I}_c = 38\sqrt{3} \angle 30^\circ = \frac{380}{X_a} \angle -60^\circ - \frac{380}{X_c} \angle 240^\circ \quad (a)$$

como además esta carga trifásica no absorbe potencia reactiva (obviamente no consume potencia activa al tratarse de tres cargas reactivas), se cumple:

$$Q = 0 \Rightarrow X_a \left(\frac{380}{X_a} \right)^2 + X_b \left(\frac{380}{X_b} \right)^2 - X_c \left(\frac{380}{X_c} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{X_a} + \frac{1}{X_b} = \frac{1}{X_c} \quad (b)$$

De la ecuación (a), al poner los valores complejos en forma binómica, resulta:

$$57 + j32,91 = \frac{380}{X_a} (0,5 - j0,866) - \frac{380}{X_a} (-0,5 - j0,866)$$

que al igualar partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí se obtiene:

$$57 = \frac{190}{X_a} + \frac{190}{X_c} \quad ; \quad 32,91 = \frac{329,08}{X_c} - \frac{329,08}{X_a} \quad (c)$$

Las ecuaciones (c) junto con la (b) dan lugar a las siguientes soluciones:

$$X_a = 10 \, \Omega \quad ; \quad X_b = 10 \, \Omega \quad ; \quad X_c = 5 \, \Omega$$

por lo que las expresiones complejas de las cargas son finalmente:

$$\underline{Z}_a = +j10 \, \Omega \quad ; \quad \underline{Z}_b = +j10 \, \Omega \quad ; \quad \underline{Z}_c = -j5 \, \Omega$$

■ 3.9. Transporte de energía eléctrica: ventaja de los sistemas trifásicos frente a los monofásicos

Una de las grandes ventajas de los sistemas trifásicos es que desarrollan una potencia instantánea libre de fluctuaciones y que por lo tanto no depende del tiempo, este hecho se demostró en el Epígrafe 3.6. Otra de las grandes ventajas se refiere al ahorro que se obtiene en el peso de cobre, en las líneas de transporte de energía eléctrica trifásicas frente a las monofásicas, que se va a demostrar aquí. Para realizar este análisis comparativo se van a considerar dos sistemas: uno trifásico a tres hilos y otro monofásico y por ello a dos hilos. Se considera que ambos sistemas transmiten la misma potencia (activa), a la misma distancia con las mismas pérdidas en las líneas y la misma tensión entre conductores. En el sistema monofásico se tiene:

$$P = UI_1 \cos \varphi \quad ; \quad P_p = 2R_1 I_1^2 \quad (3.109)$$

donde P representa la potencia que se transmite, P_p la potencia perdida, I_1 es la magnitud de la corriente de la línea, $\cos \varphi$ es el f.d.p. y R_1 la resistencia de un hilo.

Para un sistema trifásico se cumple:

$$P = \sqrt{3} UI_3 \cos \varphi \quad ; \quad P_p = 3R_3 I_3^2 \quad (3.110)$$

De (3.109) y (3.110) se obtiene:

$$R_1 = \frac{P_p}{2} \cdot \frac{U^2 \cos^2 \varphi}{P^2} \quad ; \quad R_3 = \frac{P_p}{3} \cdot \frac{3U^2 \cos^2 \varphi}{P^2} \quad (3.111)$$

como quiera que las resistencias de los hilos de la línea son inversamente proporcionales a las secciones y estas lo son directamente a los pesos del conductor, resultará:

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{R_1}{R_3} = \frac{1}{2} \quad (3.112)$$

es decir la sección de los hilos en trifásica es la mitad que en monofásica. Si se tiene en cuenta además que el número de conductores de línea trifásica es $N_3 = 3$ y el de conductores en monofásica es $N_1 = 2$, se obtiene una relación de pesos en cobre:

$$\frac{\text{Peso cobre trifásica}}{\text{Peso cobre monofásica}} = \frac{N_3}{N_1} \cdot \frac{S_3}{S_1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad (3.113)$$

de donde se deduce que el transporte de energía eléctrica en trifásica requiere un 25 % menos de cobre que en monofásica, lo que supone un ahorro económico importante, justificando una vez más la ventaja de los sistemas trifásicos frente a los monofásicos.

■ 3.10. Componentes simétricas

■ 3.10.1. Generalidades

Las componentes simétricas constituyen un procedimiento analítico de gran valor para determinar el rendimiento de ciertos tipos de circuitos trifásicos (o polifásicos en general) desequilibrados que contienen máquinas eléctricas rotativas. Aunque se pueden utilizar para resolver redes estáticas desequilibradas como los analizados en el Epígrafe 3.5, esta aplicación sería en general más molesta y laboriosa que con los métodos allí considerados. En cambio para circuitos desequilibrados que contienen máquinas eléctricas rotativas, el método de las componentes simétricas constituye el único procedimiento práctico para determinar los efectos de los desequilibrios en estas máquinas y por ello es ampliamente utilizado. También resulta imprescindible su aplicación en el estudio de faltas en la red: cortocircuitos asimétricos, desconexión de alguna fase, etc. El método de las componentes simétricas se basa en el Teorema de C. L. Fortescue que este autor desarrolló en un artículo titulado *Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks*. Transactions A.I.E.E. vol 37, pag. 1027-1140, Año 1918. El teorema de Fortescue, aplicado a una red trifásica, establece que un sistema trifásico desequilibrado se puede descomponer en tres sistemas equilibrados o simétricos de las siguientes características:

1. Un sistema equilibrado de fasores trifásicos que tienen la misma secuencia de fase que el sistema original desequilibrado y que se denomina de **secuencia directa o positiva**.
2. Un sistema equilibrado de fasores trifásicos que tienen una secuencia de fases opuesta a la del sistema desequilibrado original y que se denomina de **secuencia inversa o negativa**.
3. Un sistema de tres fasores monofásicos iguales en módulo y fase que se denomina: sistema de **secuencia cero u homopolar**.

En la Figura 3.53 se muestra esta idea para fasores de tensión. El sistema desequilibrado de tensiones: $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$, y $\underline{U}_T$ se descompone en: 1) sistema directo: $\underline{U}_{R1}$, $\underline{U}_{S1}$, y $\underline{U}_{T1}$ cuya secuencia coincide con la de los fasores originales; 2) sistema inverso: $\underline{U}_{R2}$, $\underline{U}_{S2}$, y $\underline{U}_{T2}$ cuya secuencia es contraria; 3) sistema homopolar: $\underline{U}_{R0}$, $\underline{U}_{S0}$, y $\underline{U}_{T0}$.

En la parte derecha de la Figura 3.53 se muestran los tres sistemas: directo, inverso y homopolar. En la parte izquierda se representa la composición (descomposición) fasorial. El subíndice 1 indica sistema directo, el subíndice 2 significa sistema inverso y el subíndice 0 representa el sistema homopolar. Las fases se han denominado: R, S y T.

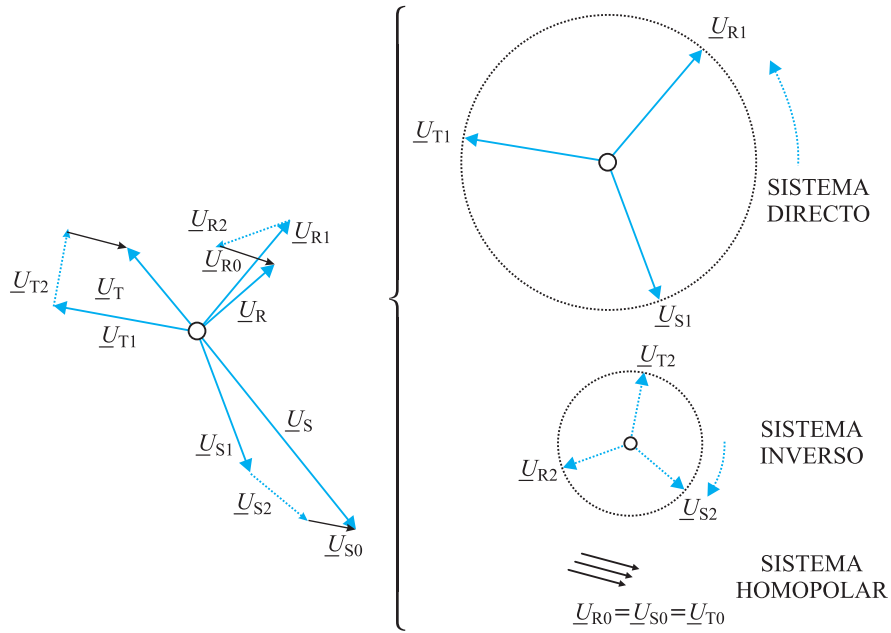


Figura 3.53 Sistema trifásico desequilibrado y sus componentes simétricas

■ 3.10.2. El operador trifásico «a»

Sabemos de álgebra compleja que si se multiplica un vector por $e^{j\alpha}$, el efecto que se obtiene es girar el vector en sentido antihorario un ángulo α . Por ejemplo $e^{j\pi/2} = +j$ corresponde a una rotación antihoraria de $\pi/2$ radianes. Para conseguir un giro de $120^\circ = 2\pi/3$ radianes, que es necesario en el estudio de las componentes simétricas, es frecuente utilizar el operador «a» que se define así:

$$a = e^{j2\pi/3} = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.114)$$

multiplicando a por sí mismo dos veces se obtiene a^2 que expresa una rotación antihoraria de 240° , y así sucesivamente. De este modo se cumple:

$$a = e^{j120^\circ} ; \quad a^2 = a \cdot a = e^{j240^\circ} ; \quad a^3 = a \cdot a \cdot a = e^{j360^\circ} = 1 \quad (3.115)$$

En la Figura 3.54 se muestra un juego de composiciones vectoriales que utilizan el operador o factor vectorial trifásico a . El uso de este operador simplifica enormemente el cálculo de sistemas trifásicos simétricos.

De la Figura 3.54 se obtiene una serie de relaciones útiles:

$$\begin{aligned} \text{a) } 1 + a + a^2 &= 0; & \text{b) } -a &= 1 + a^2 = 1 \angle -60^\circ; & \text{c) } -a^2 &= 1 + a = 1 \angle 60^\circ; \\ \text{d) } -1 &= a + a^2; & \text{e) } 1 - a &= \sqrt{3} \angle -30^\circ; & \text{f) } 1 - a^2 &= \frac{1}{2} \angle 30^\circ; \\ \text{g) } (1 + a)(1 - a) &= 1 - a^2 = \sqrt{3} \angle 30^\circ; & \text{h) } (1 + a)^2 &= 1 \angle 120^\circ; \\ \text{i) } (1 - a)^2 &= 3 \angle -60^\circ; & \text{j) } a - a^2 &= \sqrt{3} \angle 90^\circ \end{aligned} \quad (3.116)$$

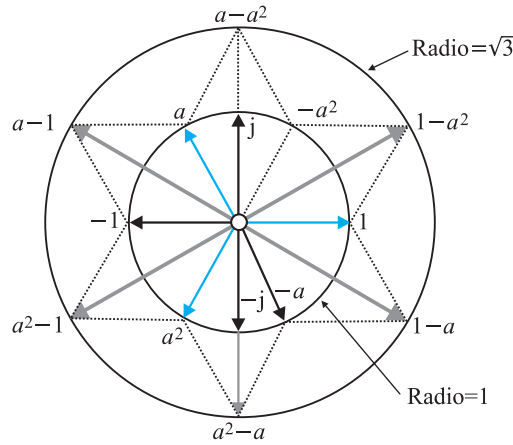


Figura 3.54 Diversas composiciones fasoriales del operador a

Las identidades anteriores son de gran importancia en el estudio de las componentes simétricas.

■ 3.10.3. Componentes simétricas de fasores desequilibrados

Supóngase que partimos de tres fasores de tensión desequilibrada: $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$ y $\underline{U}_T$. De acuerdo con las reglas del álgebra (espacios vectoriales), las tres tensiones anteriores se podrán expresar en función de tres tensiones arbitrarias: $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ y $\underline{U}_0$ por medio de una transformación lineal:

$$\begin{aligned}\underline{U}_R &= a_1 \underline{U}_{R1} + a_2 \underline{U}_{R2} + a_0 \underline{U}_{R0} \\ \underline{U}_S &= b_1 \underline{U}_{R1} + b_2 \underline{U}_{R2} + b_0 \underline{U}_{R0} \\ \underline{U}_T &= c_1 \underline{U}_{R1} + c_2 \underline{U}_{R2} + c_0 \underline{U}_{R0}\end{aligned}\tag{3.117}$$

supuesto que el determinante de los coeficientes sea diferente a cero. De acuerdo con lo anterior las tensiones originales se pueden sustituir por la suma de tres juegos de tensiones derivadas, a saber:

$$(a_1 \underline{U}_1, b_1 \underline{U}_1, c_1 \underline{U}_1) \quad ; \quad (a_2 \underline{U}_2, b_2 \underline{U}_2, c_2 \underline{U}_2) \quad ; \quad (a_0 \underline{U}_0, b_0 \underline{U}_0, c_0 \underline{U}_0)\tag{3.118}$$

es evidente que si los coeficientes son arbitrarios, cada juego de las tensiones anteriores estará desequilibrado como el sistema original, por lo que no se ha obtenido ninguna ventaja con la transformación (3.117). Fue Fortescue y casi simultáneamente Stokvis, quienes apuntaron que si se hacía una elección apropiada de los coeficientes de (3.117), cada uno de los sistemas de tensiones derivados podían estar equilibrados, con lo que se lograba una gran simplificación en los cálculos. Como se ha indicado en el Epígrafe 3.10.1, estos tres sistemas son:

- 1. Directo:** Formado por las tensiones: $\underline{U}_{R1}$, $\underline{U}_{S1}$ y $\underline{U}_{T1}$ y que teniendo en cuenta el esquema de la Figura 3.53 y utilizando el operador a se pueden expresar mejor así:

$$\underline{U}_{R1} \quad ; \quad \underline{U}_{S1} = a^2 \underline{U}_{R1} \quad ; \quad \underline{U}_{T1} = a \underline{U}_{R1}\tag{3.119}$$

2. **Inverso:** Formado por las tensiones: $\underline{U}_{R2}$, $\underline{U}_{S2}$ y $\underline{U}_{T2}$ y que de acuerdo con la Figura 3.53 se pueden expresar:

$$\underline{U}_{R2} \quad ; \quad \underline{U}_{S2} = a\underline{U}_{R2} \quad ; \quad \underline{U}_{T2} = a^2\underline{U}_{R2} \quad (3.120)$$

3. **Homopolar:** Formado por las tensiones: $\underline{U}_{R0}$, $\underline{U}_{S0}$ y $\underline{U}_{T0}$ que tienen el mismo módulo y fase, es decir:

$$\underline{U}_{R0} \quad ; \quad \underline{U}_{S0} = \underline{U}_{R0} \quad ; \quad \underline{U}_{T0} = \underline{U}_{R0} \quad (3.121)$$

De este modo el sistema original desequilibrado se puede descomponer en una suma de tres sistemas equilibrados que se denominan **componentes simétricas** del conjunto inicial, de acuerdo con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{R2} + \underline{U}_{R0} \\ \underline{U}_S &= \underline{U}_{S1} + \underline{U}_{S2} + \underline{U}_{S0} = a^2\underline{U}_{R1} + a\underline{U}_{R2} + \underline{U}_{R0} \\ \underline{U}_T &= \underline{U}_{T1} + \underline{U}_{T2} + \underline{U}_{T0} = a\underline{U}_{R1} + a^2\underline{U}_{R2} + \underline{U}_{R0} \end{aligned} \quad (3.122)$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{R0} \\ \underline{U}_{R1} \\ \underline{U}_{R2} \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

El problema en la práctica es determinar las componentes simétricas (en definitiva $\underline{U}_{R1}$, $\underline{U}_{R2}$, $\underline{U}_{R0}$) conociendo las tensiones (o corrientes) desequilibradas $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$ y $\underline{U}_T$ lo que plantea el problema inverso al mostrado en (3.122).

Se puede calcular la componente homopolar $\underline{U}_{R0}$ sumando las ecuaciones (3.122) y teniendo en cuenta las propiedades del operador a y así resulta:

$$\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T = \underline{U}_{R1}(1 + a^2 + a) + \underline{U}_{R2}(1 + a + a^2) + 3\underline{U}_{R0} \quad (3.124)$$

pero como quiera que $1 + a + a^2 = 0$, se deduce:

$$\underline{U}_{R0} = \frac{1}{3} (\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T) \quad (3.125)$$

Para calcular $\underline{U}_{R1}$, se multiplica la 2.^a ecuación (3.122) por a , la 3.^a por a^2 y los resultados se suman con la 1.^a, resultando:

$$\begin{aligned} \underline{U}_R + a\underline{U}_S + a^2\underline{U}_T &= (\underline{U}_{R1} + \underline{U}_{R2} + \underline{U}_{R0}) + (a^3\underline{U}_{R1} + a^2\underline{U}_{R2} + a\underline{U}_{R0}) + \\ &+ (a^3\underline{U}_{R1} + a^4\underline{U}_{R2} + a^2\underline{U}_{R0}) \end{aligned} \quad (3.126)$$

es decir:

$$\underline{U}_R + a\underline{U}_S + a^2\underline{U}_T = \underline{U}_{R1}(1 + a^3 + a^3) + \underline{U}_{R2}(1 + a^2 + a^4) + \underline{U}_{R0}(1 + a + a^2) \quad (3.127)$$

y que teniendo en cuenta que $a^3 = 1$, $a^4 = a$, los sumandos segundo y tercero del segundo miembro se anulan, dando lugar a:

$$\underline{U}_{R1} = \frac{1}{3} (\underline{U}_R + a\underline{U}_S + a^2\underline{U}_T) \quad (3.128)$$

De un modo análogo se puede calcular $\underline{U}_{R2}$, para ello se debe multiplicar la 2.^a ecuación (3.122) por a^2 , la 3.^a por a y los resultados se suman con la 1.^a, obteniendo:

$$\begin{aligned} \underline{U}_R + a^2\underline{U}_S + a\underline{U}_T &= (\underline{U}_{R1} + \underline{U}_{R2} + \underline{U}_{R0}) + (a^4\underline{U}_{R1} + a^3\underline{U}_{R2} + a^2\underline{U}_{R0}) + \\ &+ (a^2\underline{U}_{R1} + a^3\underline{U}_{R1} + a\underline{U}_{R0}) \end{aligned} \quad (3.129)$$

es decir:

$$\underline{U}_R + a^2\underline{U}_S + a\underline{U}_T = \underline{U}_{R1}(1 + a^4 + a^2) + \underline{U}_{R2}(1 + a^3 + a^3) + \underline{U}_{R0}(1 + a^2 + a) \quad (3.130)$$

de donde se deduce:

$$\underline{U}_{R2} = \frac{1}{3} (\underline{U}_R + a^2\underline{U}_S + a\underline{U}_T) \quad (3.131)$$

Las ecuaciones (3.125), (3.128) y (3.131) admiten la siguiente formulación matricial:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{R0} \\ \underline{U}_{R1} \\ \underline{U}_{R2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

cuando se trata de corrientes desequilibradas $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ e $\underline{I}_T$, las ecuaciones (3.123) y (3.132) se transforman en:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{R0} \\ \underline{I}_{S1} \\ \underline{I}_{R2} \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{R0} \\ \underline{I}_{R1} \\ \underline{I}_{R2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

En un sistema trifásico, la suma de las corrientes de línea es igual a la corriente $\underline{I}_N$ de retorno por el hilo neutro. Es decir:

$$\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = \underline{I}_N \quad (3.135)$$

Ahora bien de (3.134) se deduce:

$$\underline{I}_{R0} = \frac{1}{3} (\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T) = \frac{1}{3} \underline{I}_N \quad (3.136)$$

lo que indica que la corriente de retorno por el neutro vale:

$$\underline{I}_N = 3\underline{I}_{R0} \quad (3.137)$$

Cuando el sistema trifásico tiene solamente tres hilos, es decir no hay neutro, entonces $\underline{I}_N$ es cero y en consecuencia de acuerdo con (3.137) las corrientes en las fases de línea no contienen componentes de secuencia cero u homopolar.

De un modo análogo en un sistema trifásico a tres hilos las tensiones de línea cumplen la condición:

$$\underline{U}_{RS} + \underline{U}_{ST} + \underline{U}_{TR} = 0 \quad (3.138)$$

y por ello de acuerdo con (3.132), las componentes de secuencia homopolar de las tensiones de línea serán:

$$\underline{U}_{RS0} = \underline{U}_{ST0} = \underline{U}_{TR0} = \frac{1}{3} (\underline{U}_{RS} + \underline{U}_{ST} + \underline{U}_{TR}) \quad (3.139)$$

que teniendo en cuenta (3.138), nos indica que las tensiones de línea no tienen componentes homopolares o de secuencia cero.

Si se considera una carga en estrella desequilibrada como la considerada en el Epígrafe 3.5.1, se tendrán tres tensiones simples desiguales: $\underline{U}_{RN'}$, $\underline{U}_{SN'}$, $\underline{U}_{TN'}$, las componentes homopolares de estas tres tensiones será igual de acuerdo con (3.132):

$$\underline{U}_{RN0} = \underline{U}_{SN0} = \underline{U}_{TN0} = \frac{1}{3} (\underline{U}_{RN'} + \underline{U}_{SN'} + \underline{U}_{TN'}) \quad (3.140)$$

ahora bien teniendo en cuenta (3.44) resulta que:

$$\underline{U}_{RN'} + \underline{U}_{SN'} + \underline{U}_{TN'} = (\underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N}) + (\underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N}) + (\underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N}) \quad (3.141)$$

y como quiera que $\underline{U}_{RN} + \underline{U}_{SN} + \underline{U}_{TN} = 0$, se obtiene:

$$\underline{U}_{RN'} + \underline{U}_{SN'} + \underline{U}_{TN'} = -3\underline{U}_{N'N} \quad (3.142)$$

y por consiguiente las componentes homopolares de las tres tensiones simples, teniendo en cuenta (3.140) y (3.142) serán:

$$\underline{U}_{RN'0} = \underline{U}_{SN'0} = \underline{U}_{TN'0} = -\underline{U}_{N'N} \quad (3.143)$$

que indica que las tensiones simples de una estrella desequilibrada tienen componentes de secuencia cero y que representan con signo menos la tensión de desplazamiento del neutro.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.17

En el Ejemplo de Aplicación 3.5, las tensiones simples de la carga son:

$$\underline{U}_{RN'} = 425 \angle 45^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{SN'} = 220 \angle 60^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{TN'} = 425 \angle 75^\circ$$

Calcular: a) componentes simétricas de las tensiones simples anteriores; b) componentes simétricas de las tensiones de línea.

Solución

a) De acuerdo con (3.132) resultarán unas componentes homopolares:

$$\underline{U}_{N'0} = \frac{1}{3} (\underline{U}_{RN} + \underline{U}_{RN} + \underline{U}_{TN}) = 347 \angle 60^\circ = \underline{U}_{SN'0} = \underline{U}_{TN'0}$$

y que teniendo en cuenta (3.143), se tendrá una tensión de desplazamiento del neutro:

$$\underline{U}_{N'N} = -347 \angle 60^\circ = 347 \angle -120^\circ$$

que coincide con el resultado calculado en el Ejemplo de Aplicación 3.5.

Las componentes de secuencia positiva serán:

$$\underline{U}_{RN'1} = \frac{1}{3} (\underline{U}_{RN} + a \underline{U}_{SN} + a^2 \underline{U}_{TN})$$

es decir:

$$\underline{U}_{RN'1} = \frac{1}{3} (425 \angle 45^\circ + 1 \angle 120^\circ \cdot 220 \angle 60^\circ + 1 \angle -120^\circ \cdot 425 \angle 75^\circ) = \frac{380}{3} \approx 127 \angle 0^\circ$$

y las otras componentes serán:

$$\underline{U}_{SN'1} = 127 \angle -120^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{TN'1} = 127 \angle 120^\circ$$

De un modo análogo, las componentes de secuencia negativa serán:

$$\underline{U}_{RN'2} = \frac{1}{3} (\underline{U}_{RN'} + a^2 \underline{U}_{SN'} + a \underline{U}_{TN'})$$

que al sustituir valores nos dan:

$$\underline{U}_{RN'2} = \frac{1}{3} (425 \angle 45^\circ + 1 \angle -120^\circ \cdot 220 \angle 60^\circ + 1 \angle 120^\circ \cdot 425 \angle 75^\circ) = 0 = \underline{U}_{SN'2} = \underline{U}_{TN'2}$$

b) Las tensiones compuestas o de línea son:

$$\underline{U}_{RS} = \underline{U}_{RN'} - \underline{U}_{SN'} = 425 \angle 45^\circ - 220 \angle 60^\circ = 220 \angle 30^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{ST} = \underline{U}_{SN'} - \underline{U}_{TN'} = 220 \angle -90^\circ$$

$$\underline{U}_{TR} = \underline{U}_{TN'} - \underline{U}_{RN'} = 220 \angle 150^\circ$$

Las componentes homopolares son:

$$\underline{U}_{RS0} = \underline{U}_{ST0} = \underline{U}_{TR0} = 0$$

Como era de esperar, las tensiones de línea no tienen componentes de secuencia cero.

Las componentes de secuencia directa son:

$$\underline{U}_{RS1} = \frac{1}{3} (\underline{U}_{RS} + a \underline{U}_{ST} + a^2 \underline{U}_{TR}) = 220 \angle 30^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{ST1} = 220 \angle -90^\circ \quad ; \quad \underline{U}_{TR1} = 220 \angle 150^\circ$$

y las de secuencia negativa:

$$\underline{U}_{RS2} = \frac{1}{3} (\underline{U}_{RS} + a^2 \underline{U}_{ST} + a \underline{U}_{TR}) = 0 = \underline{U}_{ST2} = \underline{U}_{TR2}$$

resultados lógicos ya que el lector puede comprobar que las tres tensiones $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$ y $\underline{U}_{TR}$ constituyen un sistema equilibrado directo.

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.18**

Las corrientes que circulan por las líneas de una red desequilibrada a 4 hilos (ver Ejemplo de Aplicación 3.5) son:

$$\underline{I}_R = 12,7 \angle -90^\circ \quad ; \quad \underline{I}_S = 12,7 \angle -120^\circ \quad ; \quad \underline{I}_T = 12,7 \angle 210^\circ$$

Calcular las componentes simétricas de estas tres corrientes.

Solución

De acuerdo con (3.134) resulta:

$$\underline{I}_{R0} = \frac{1}{3} (\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T) = \frac{1}{3} (12,7 \angle -90^\circ + 12,7 \angle -120^\circ + 12,7 \angle 210^\circ) = 34,7 \angle -120^\circ$$

es decir:

$$\underline{I}_{R0} = \underline{I}_{S0} = \underline{I}_{T0} = 34,7 \angle -120^\circ$$

el lector puede comprobar que las corrientes homopolares anteriores coinciden con la corriente de retorno por el neutro en el Ejemplo de Aplicación 3.5.

Las componentes de secuencia positiva son:

$$\underline{I}_{R1} = \frac{1}{3} (\underline{I}_R + a \underline{I}_S + a^2 \underline{I}_T)$$

es decir:

$$\underline{I}_{R1} = \frac{1}{3} (12,7 \angle -90^\circ + 1 \angle 120^\circ \cdot 12,7 \angle -120^\circ + 1 \angle -120^\circ \cdot 12,7 \angle 210^\circ) = 4,23 \angle 0^\circ = 4,23 \angle 0^\circ$$

y por consiguiente:

$$\underline{I}_{S1} = 4,23 \angle -120^\circ \quad ; \quad \underline{I}_{T1} = 4,23 \angle 120^\circ$$

Las componentes de secuencia negativa son:

$$\underline{I}_{R2} = \frac{1}{3} (\underline{I}_R + a \underline{I}_S + a^2 \underline{I}_T)$$

es decir:

$$\underline{I}_{R2} = \frac{1}{3} (12,7 \angle -90^\circ + 1 \angle -120^\circ \cdot 12,7 \angle -120^\circ + 1 \angle 120^\circ \cdot 12,7 \angle 210^\circ) = 9,3 \angle -60^\circ$$

y por consiguiente:

$$\underline{I}_{S2} = 9,3 \angle +60^\circ \quad ; \quad \underline{I}_{T2} = 9,3 \angle -180^\circ$$

**EJEMPLO DE APLICACIÓN 3.19**

En el circuito trifásico de la Figura 3.55, las impedancias de carga están equilibradas y tienen un valor de $16,5 \angle 30^\circ \Omega$. La tensión de línea es de 220 V con una secuencia RST. Si la fase T está abierta y se toma la tensión $\underline{U}_{RN}$ de la red como referencia, calcular: a) corrientes $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$; b) componentes simétricas de estas corrientes.

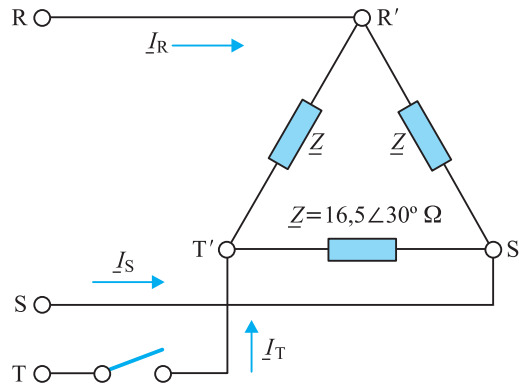


Figura 3.55 Componentes simétricas de una carga equilibrada al abrir una fase

Solución

a) Al estar abierta la fase T, la impedancia de carga entre las fases R y S vale:

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z} \parallel (\underline{Z} + \underline{Z}) = \frac{2}{3} \underline{Z} = 11 \angle 30^\circ$$

Al tomar $\underline{U}_{RN}$ como referencia de fases, la tensión $\underline{U}_{RS}$ es:

$$\underline{U}_{RS} = 220 \angle 30^\circ$$

y por consiguiente la corriente $\underline{I}_R$ será:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RS}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{220 \angle 30^\circ}{11 \angle 30^\circ} = 20 \angle 0^\circ$$

la corriente $\underline{I}_S$ será igual y contraria a la anterior, es decir:

$$\underline{I}_S = -\underline{I}_R = 20 \angle 180^\circ$$

En resumen se tiene:

$$\underline{I}_R = 20 \angle 0^\circ \quad ; \quad \underline{I}_S = 20 \angle 180^\circ \quad ; \quad \underline{I}_T = 0$$

b) De acuerdo con (3.134) resulta para las componentes homopolares:

$$\underline{I}_{R0} = \frac{1}{3} (\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T) = \frac{1}{3} (20 \angle 0^\circ + 20 \angle 180^\circ + 0^\circ) = 0 = \underline{I}_{S0} = \underline{I}_{T0}$$

Para las componentes de secuencia directa se tiene:

$$\underline{I}_{R1} = \frac{1}{3} (\underline{I}_R + a \underline{I}_S + a^2 \underline{I}_T) = \frac{1}{3} (20 \angle 0^\circ + 1 \angle 120^\circ \cdot 20 \angle 180^\circ + 0) = 11,54 \angle -30^\circ$$

y por consiguiente:

$$\underline{I}_{S1} = 11,54 \angle -150^\circ \quad ; \quad \underline{I}_{T1} = 11,54 \angle 90^\circ$$

De un modo análogo, las componentes de secuencia negativa son:

$$\underline{I}_{R2} = \frac{1}{3} (\underline{I}_R + a^2 \underline{I}_S + a \underline{I}_T) = \frac{1}{3} (20 \angle 0^\circ + 1 \angle 120^\circ \cdot 20 \angle 180^\circ + 0) = 11,54 \angle +30^\circ$$

y por consiguiente:

$$\underline{I}_{S2} = 11,54 \angle 150^\circ \quad ; \quad \underline{I}_{T2} = 11,54 \angle -90^\circ$$

■ 3.10.4. Impedancias debidas a las corrientes de diferente secuencia

La caída de tensión que se origina en una parte cualquiera de un circuito por la corriente de una secuencia determinada, depende de la impedancia de tal parte del circuito para la corriente de dicha secuencia. La impedancia que ofrece un circuito cuando por él circulan solamente corrientes de secuencia positiva o directa se denomina **impedancia a la corriente de secuencia positiva**:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_{R1}}{\underline{I}_{R1}} = \frac{\underline{U}_{S1}}{\underline{I}_{S1}} = \frac{\underline{U}_{T1}}{\underline{I}_{T1}} \quad (3.144)$$

De un modo análogo, si solo existen corrientes de secuencia negativa, la impedancia se denomina **impedancia a la corriente de secuencia negativa**:

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_{R2}}{\underline{I}_{R2}} = \frac{\underline{U}_{S2}}{\underline{I}_{S2}} = \frac{\underline{U}_{T2}}{\underline{I}_{T2}} \quad (3.145)$$

Cuando existen únicamente corrientes de secuencia cero, la impedancia se denomina **impedancia a la corriente de secuencia cero**:

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_{R0}}{\underline{I}_{R0}} = \frac{\underline{U}_{S0}}{\underline{I}_{S0}} = \frac{\underline{U}_{T0}}{\underline{I}_{T0}} \quad (3.146)$$

Los valores de $\underline{Z}_1$ y $\underline{Z}_2$ para aparatos estáticos, tales como resistencias, condensadores, transformadores, líneas de transporte, etc. Son los mismos, ya que la impedancia no depende del sentido de sucesión de fases. En los casos en los que produce una interacción de los campos magnéticos o eléctricos de las tres fases, la impedancia de secuencia cero $\underline{Z}_0$ será diferente de $\underline{Z}_1$ y $\underline{Z}_2$ ya que las corrientes de secuencia homopolar producen un tipo de campo totalmente diferente al de las otras corrientes (en un caso es rotativo y en el otro pulsatorio). En general en las máquinas eléctricas rotativas las impedancias $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ y $\underline{Z}_0$ serán diferentes. En la Tabla 3.1 se da una relación de valores típicos de estas impedancias para diferentes máquinas y líneas eléctricas.

El análisis de una falta asimétrica en un sistema simétrico consiste en la determinación de las componentes simétricas desequilibradas que circulan. Como quiera que las corrientes componentes de la secuencia de una fase dan lugar a caídas de tensión solamente de la misma secuencia y son independientes de las corrientes de las otras secuencias, en un siste-

Tabla 3.1. Impedancias por unidad de máquinas eléctricas y líneas

Máquina o línea	Valores típicos de impedancia por unidad ⁵		
	$\underline{Z}_1$	$\underline{Z}_2$	$\underline{Z}_0$
Transformadores			
132 kV	j0,10	j0,10	—
275 kV	j0,14	j0,14	—
400 kV	j0,16	j0,16	—
Alternadores (centrales térmicas)			
3.000 rpm	j2	j0,15	j0,10
1.500 rpm	j1,2	j0,25	j0,25
Alternadores (centrales hidráulicas)			
Con devanados amortiguadores	j2	j2	j2
Sin devanados amortiguadores	j1,2	j1,2	j1,2
Motores de inducción	3,4 + j0,8	0,15 + j0,80	
Líneas de transporte			
132 kV	$(8 + j17) \cdot 10^{-4}$	$(8 + j17) \cdot 10^{-4}$	
275 kV	$(4 + j17) \cdot 10^{-4}$	$(4 + j17) \cdot 10^{-4}$	
400 kV	$(2 + j17) \cdot 10^{-4}$	$(2 + j17) \cdot 10^{-4}$	

ma equilibrado⁶ las corrientes de cualquier secuencia pueden considerarse como circulando en una red independiente formada solamente por las impedancias a la corriente de tal secuencia. El circuito equivalente monofásico formado por las impedancias a la corriente de cualquier secuencia exclusivamente se denomina **red de secuencia** para tal secuencia particular. La red de secuencia incluye las f.e.m.s. o tensiones generadas de secuencia igual. Las redes de secuencia que transportan las corrientes $\underline{I}_{R1}$, $\underline{I}_{R2}$ e $\underline{I}_{R0}$ se interconexionan para representar diversas condiciones de faltas desequilibradas.

■ 3.10.5. Redes de secuencia

En la Figura 3.56 se representa un generador trifásico en vacío, cuyo neutro N está a tierra a través de una impedancia $\underline{Z}_N$. Si aparece una falta en la red, circularán unas corrientes $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ e $\underline{I}_T$, algunas de las cuales pueden ser nulas. Para dibujar las redes monofásicas de secuencia, hay que tener en cuenta que las tensiones generadas son solo de secuencia positiva, ya que el generador está proyectado para suministrar tensiones trifásicas equilibradas.

⁵ Los valores por unidad (p.u.) se emplean con asiduidad en el estudio de los sistemas eléctricos de potencia ya que permite trabajar con cantidades normalizadas respecto a unos valores base, haciendo más simples los cálculos y la comparación entre diversas máquinas. La impedancia base Z_b es igual a U_L^2/S , donde U_L es la tensión de línea y S la potencia aparente. La impedancia p.u. es el cociente $Z_{pu} = Z_{real}/Z_b$.

⁶ En el caso de desequilibrio en las impedancias de la red, existe interacción entre las impedancias y corrientes de las diferentes secuencias.

Por ello, como se indica en la parte derecha de la Figura 3.56, la red de secuencia positiva está formada por la tensión del generador (solo se indica la fase R) en serie con la impedancia $\underline{Z}_1$ de impedancia positiva del generador. Las redes de secuencia negativa y cero no contienen ningún generador ($\underline{U}_{gR2} = \underline{U}_{gR0} = 0$) pero incluyen las impedancias de este a las corrientes de secuencia negativa ($\underline{Z}_2$) y cero ($\underline{Z}_{g0}$) respectivamente. Hay que tener en cuenta también que en lo que respecta a las componentes de secuencia positiva y negativa, el neutro del generador está al potencial de tierra ($\underline{U}_N = 0$) ya que solamente circula corriente homopolar entre el neutro y tierra. La corriente que pasa por $\underline{Z}_N$ hemos visto en (3.137) que es igual a $3\underline{I}_{R0}$ y por ello en la red de secuencia cero contiene una impedancia $3\underline{Z}_N$ entre el nudo N y el nudo 0 (tierra), de este modo la impedancia total homopolar es $\underline{Z}_b = \underline{Z}_{g0} + 3\underline{Z}_N$.

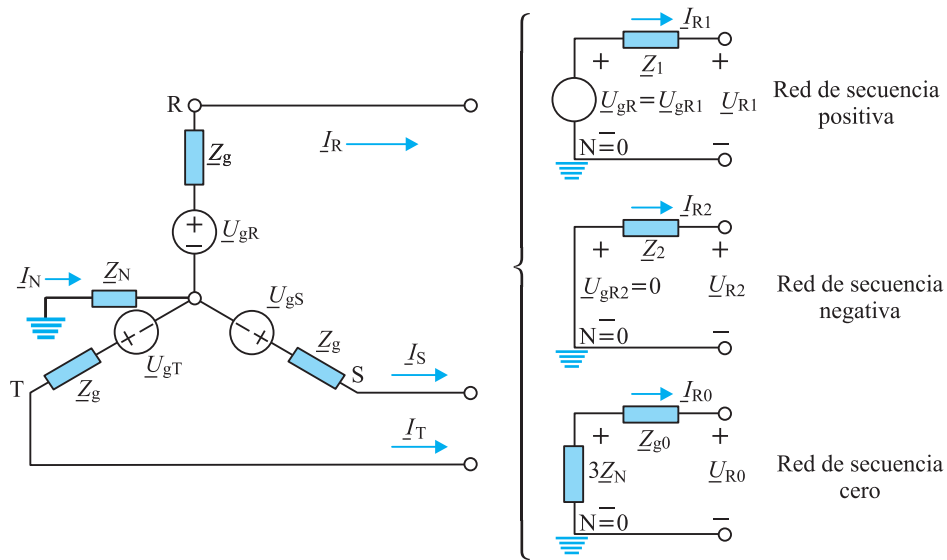


Figura 3.56 Redes de secuencia

Las ecuaciones de las tensiones para la fase R se obtienen de los circuitos de la Figura 3.55, resultando:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{R1} &= \underline{U}_{gR} - \underline{Z}_1 \underline{I}_{R1} \\ \underline{U}_{R2} &= -\underline{Z}_2 \underline{I}_{R2} \\ \underline{U}_{R0} &= -\underline{Z}_0 \underline{I}_{R0}\end{aligned}\tag{3.147}$$

donde $\underline{U}_{gR}$ representa la tensión generadora simple de la fase R que es en definitiva la tensión generadora de secuencia positiva de esta fase.

■ 3.10.6. Cálculo de faltas en sistemas de potencia

Para ver una aplicación de las componentes simétricas en el análisis de faltas en sistemas de potencia, se va a considerar el caso de un cortocircuito entre una fase y tierra. Con objeto de evitar interacciones entre tensiones y corrientes de diferentes secuencias, se suponen

drá: a) las tensiones generadoras son únicamente de secuencia positiva; b) solamente circulan por la red las corrientes debidas a la falta; c) las impedancias de la red en cada fase están equilibradas. En la Figura 3.57 se ha mostrado una falta simple entre la fase R y tierra. Las condiciones de la falta, al no existir más corrientes en la línea que las de la falta, serán:

$$\underline{I}_S = 0 \quad ; \quad \underline{I}_T = 0 \quad ; \quad \underline{U}_R = 0 \quad (3.148)$$

de este modo las corrientes de línea serán: $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S = \underline{I}_T = 0$ cuyas componentes simétricas teniendo en cuenta (3.134) son para la fase R:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{R0} \\ \underline{I}_{R1} \\ \underline{I}_{R2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

de donde se deduce:

$$\underline{I}_{R0} = \underline{I}_{R1} = \underline{I}_{R2} = \frac{\underline{I}_R}{3} \quad (3.150)$$

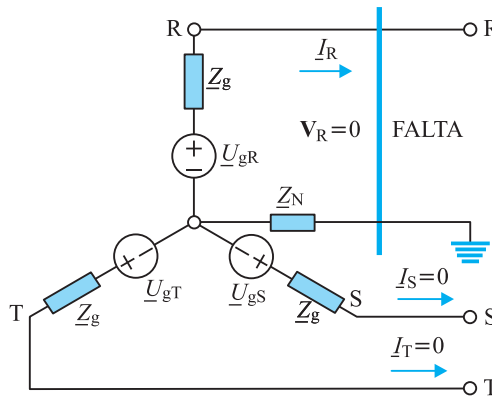


Figura 3.57 Falta fase-tierra

Al llevar (3.150) a (3.147) se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{R0} &= -\underline{Z}_0 \underline{I}_{R0} = -\underline{Z}_0 \frac{\underline{I}_R}{3} \\ \underline{U}_{R1} &= \underline{U}_{gR} - \underline{Z}_1 \frac{\underline{I}_R}{3} \\ \underline{U}_{R2} &= -\underline{Z}_2 \frac{\underline{I}_R}{3} \end{aligned} \quad (3.151)$$

Ahora bien, de acuerdo con la primera ecuación de (3.122), se puede escribir:

$$\underline{U}_R = \underline{U}_{R0} + \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{R2} = \underline{U}_{gR} - (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0) \frac{\underline{I}_R}{3} \quad (3.152)$$

y que según (3.148) es igual a cero, y por consiguiente la corriente de la falta $\underline{I}_R$ será:

$$\underline{I}_R = \frac{3\underline{U}_{gR}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \quad (3.153)$$

donde $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_{g0} + 3\underline{Z}_N$. En el caso de que el neutro del generador esté íntimamente unido a tierra entonces $\underline{Z}_N = 0$ y por consiguiente $\underline{Z}_0$ coincide con la impedancia de secuencia cero del generador $\underline{Z}_{g0}$. De un modo análogo se pueden analizar las faltas de cortocircuito entre dos líneas, dos líneas a tierra, etc.



Amplíe sus conocimientos

Sistemas polifásicos

En este capítulo se han estudiado únicamente los sistemas trifásicos, ya que son la base de los sistemas de generación, transporte y distribución de energía eléctrica en el mundo. También se ha comentado que al comienzo de la era de la industrialización eléctrica se utilizaron sistemas bifásicos y que también en algunas aplicaciones se emplean sistemas hexafásicos y dodecafásicos.

Vamos a considerar aquí una extensión de la teoría para analizar las relaciones existentes entre las tensiones, corrientes y potencias en el caso general de que se consideren generadores eléctricos con m fases. En este caso se trataría de un sistema polifásico de m fases, en el que las bobinas del generador (alternador) estarían desfasadas en el espacio $2\pi/m$ radianes, por lo que se generarían m tensiones desfasadas en el tiempo $2\pi/m$ radianes. De un modo similar a los sistemas trifásicos, las bobinas del generador se pueden conectar en *estrella*, con un neutro común, o en *polígono*, como una extensión en este caso de la conexión triángulo. Por ejemplo en la Figura 3.58 se muestra un sistema pentafásico constituido por las bobinas 1-1', 2-2', 3-3', 4-4' y 5-5', aunque en general supondremos que existen m bobinas desfasadas $2\pi/m$ radianes eléctricos entre sí. Los terminales con prima (') son los terminales negativos de cada bobina y los terminales sin prima son los terminales positivos de cada bobina. Es por ello que teniendo en cuenta que las bobinas son generadores de f.e.m., las tensiones tienen las polaridades señaladas, así como las corrientes siguen los sentidos mostrados que se dirigen del generador (bobinas) a la carga (no dibujada en la Figura 3.58).

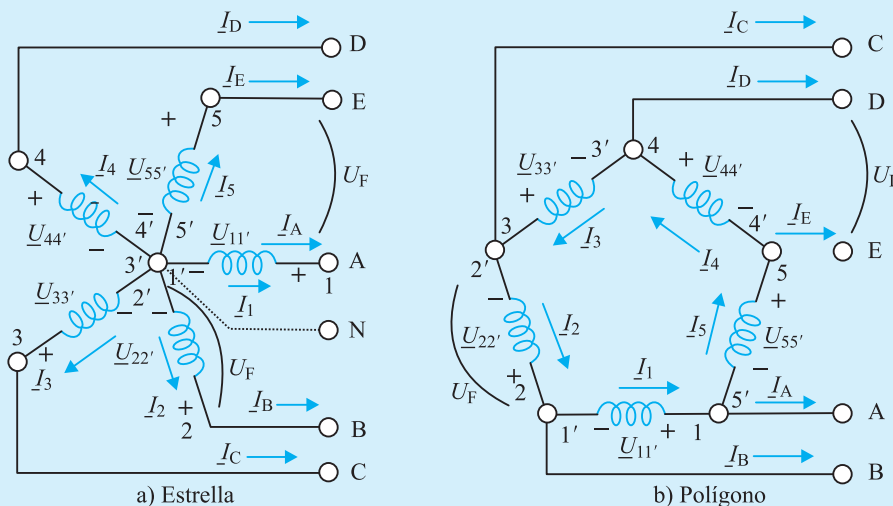


Figura 3.58 Conexiones de un sistema de bobinas polifásico

En la Figura 3.59 se muestran los fasores de tensiones correspondientes a la conexión estrella supuesta una sucesión de fases positiva o directa. Si el sistema es simétrico las tensiones $\underline{U}_{11'}$, $\underline{U}_{22'}$, $\underline{U}_{33'}$, $\underline{U}_{44'}$, $\underline{U}_{55'}$, etc. son todas del mismo módulo U_F (que es la tensión simple o de fase), y están desfasadas entre sí $2\pi/m$ radianes. Las tensiones entre los terminales externos de la estrella son las tensiones $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{34}$, $\underline{U}_{45}$, $\underline{U}_{51}$, cuyas magnitudes tienen el mismo módulo y que se denominan tensiones de línea U_L .

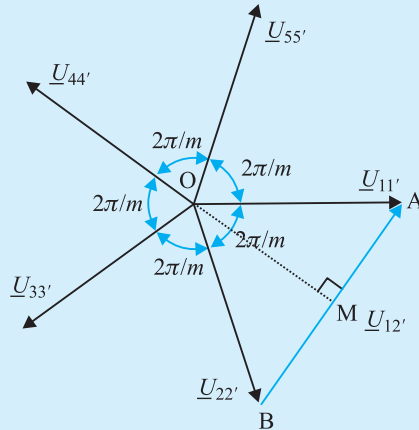


Figura 3.59 Relaciones entre las tensiones simples y compuestas en la conexión estrella

Para ver la relación entre las tensiones simples y compuestas se observa en la construcción mostrada en la Figura 3.59 que en el triángulo OAB se cumple:

$$|AB| = |\underline{U}_{12}| = U_L = 2|AM| = 2U_F \sin \frac{\pi}{m} \quad (a)$$

La expresión anterior indica la relación entre las magnitudes de las tensiones de línea y de fase. Se observa también que la tensión U_{12} se adelanta $\pi/2m$ de la tensión simple $U_{11'}$. Si estas bobinas generadoras alimentan una carga polifásica equilibrada darán lugar a unas corrientes internas (o de fase) $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$, $\underline{I}_4$, $\underline{I}_5$, todas ellas iguales en magnitud I_F y denominadas corrientes de fase. Las corrientes externas se han denominado en la Figura 3.58, $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$, $\underline{I}_D$, $\underline{I}_E$, que serán todas iguales en magnitud I_L que son las corrientes de línea de la conexión en estrella. Evidentemente en la conexión en estrella ambas corrientes coinciden, ya que $\underline{I}_1 = \underline{I}_A$; $\underline{I}_2 = \underline{I}_B$; $\underline{I}_3 = \underline{I}_C$, etc.

Es decir en la conexión en estrella de un sistema polifásico se cumplen las relaciones siguientes:

$$U_L = 2U_F \sin \frac{\pi}{m} \quad ; \quad I_L = I_F \quad (b)$$

De una forma análoga el lector puede comprobar que para un sistema polifásico conectado en polígono se cumplen las relaciones duales siguientes:

$$I_L = 2I_F \sin \frac{\pi}{m} \quad ; \quad U_L = U_F \quad (c)$$

Es por ello que teniendo en cuenta las fórmulas anteriores, las expresiones de las potencias aparente, activa y reactiva de un sistema polifásico, para un f.d.p. $\cos \varphi$ son respectivamente:

$$\begin{aligned}
 S &= m U_F I_F = \frac{m}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}} U_L I_L \\
 P &= m U_F I_F \cos \varphi = \frac{m}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}} U_L I_L \cos \varphi \\
 Q &= m U_F I_F \operatorname{sen} \varphi = \frac{m}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}} U_L I_L \operatorname{sen} \varphi
 \end{aligned} \tag{d}$$

El lector puede comprobar en todas las relaciones anteriores que para $m=3$, las expresiones resultantes coinciden con las calculadas en este capítulo. Debe aclararse, sin embargo, que cuando estas ecuaciones se aplican a un sistema bifásico se debe tomar $m=4$ para las relaciones angulares y $m=2$ para el número de fases. Lo cual se debe a que un sistema bifásico está formado por dos tensiones desfasadas 90° en el espacio y no 180° que le correspondería por la relación general, lo cual es lógico porque dos tensiones a 180° no tendrían ningún sentido práctico. Es decir para el caso bifásico en estrella se cumple:

$$\begin{aligned}
 U_L &= 2 U_F \operatorname{sen} 45^\circ = \sqrt{2} U_F \quad ; \quad I_L = I_F \\
 S &= 2 U_F I_F = \sqrt{2} U_L I_L \quad ; \quad P = \sqrt{2} U_L I_L \cos \varphi_L \quad ; \quad Q = \sqrt{2} U_L I_L \operatorname{sen} \varphi
 \end{aligned} \tag{e}$$

Esta teoría constituye una ampliación al estudio de los sistemas trifásicos y complementa de este modo los desarrollos teóricos señalados en este capítulo.



Problemas

- 3.1.** Tres impedancias iguales de valor $\underline{Z} = 8 + j6 \, \Omega$ se conectan en estrella y se alimentan por medio de una red trifásica simétrica a tres hilos de 380 V de tensión compuesta. Calcular las expresiones complejas de las corrientes de línea si la sucesión de fases es RST y se toma $\underline{U}_{RN}$ como referencia.

$$[\text{Res. } \underline{I}_R = 38/\sqrt{3} \angle -36,87^\circ \text{ A}; \underline{I}_S = 38/\sqrt{3} \angle -156,87^\circ \text{ A}; \underline{I}_T = 38/\sqrt{3} \angle 83,13^\circ \text{ A}]$$

- 3.2.** Tres impedancias iguales de valor $\underline{Z} = 6 + j8 \, \Omega$ se conectan en triángulo y se alimentan por medio de una red trifásica simétrica a tres hilos de 380 V de tensión compuesta. Calcular las expresiones complejas de las corrientes de fase y de línea si la sucesión de fases es positiva y se toma la tensión simple del generador $\underline{U}_{RN}$ como referencia de fases.

$$[\text{Res. } \underline{I}_{RS} = 38 \angle -23,13^\circ; \underline{I}_{ST} = 38 \angle -143,13^\circ; \underline{I}_{TR} = 38 \angle 96,87^\circ; \underline{I}_R = 38\sqrt{3} \angle -53,13^\circ \text{ A}; \underline{I}_S = 38\sqrt{3} \angle -173,13^\circ \text{ A}; \underline{I}_T = 38\sqrt{3} \angle 66,87^\circ \text{ A}]$$

- 3.3.** Una red trifásica simétrica a tres hilos de secuencia positiva de 220 V de línea alimenta dos cargas equilibradas, la primera de ellas está conectada en triángulo y tiene una impedancia por fase de $20\sqrt{3} \angle 30^\circ \, \Omega$, la otra está conectada en estrella y tiene impedancia de $50/\sqrt{3} \angle 0^\circ \, \Omega/\text{fase}$. Calcular las corrientes complejas $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$, absorbidas por cada carga y total de la instalación si se toma la tensión $\underline{U}_{RN}$ como referencia.

$$[\text{Res. } \underline{I}_{R1} = 11 \angle -30^\circ; \underline{I}_{S1} = 11 \angle -150^\circ; \underline{I}_{T1} = 11 \angle 90^\circ; \underline{I}_{R2} = 4,4 \angle 0^\circ; \underline{I}_{S2} = 4,4 \angle -120^\circ; \underline{I}_{R2} = 4,4 \angle 120^\circ; \underline{I}_R = 14,97 \angle -21,55^\circ; \underline{I}_S = 14,97 \angle -141,55^\circ; \underline{I}_T = 14,97 \angle 98,45^\circ]$$

- 3.4.** Se dispone de una red trifásica simétrica de secuencia positiva a 4 hilos de 380 V de tensión compuesta. Entre la fase R y el neutro se conecta una impedancia $\underline{Z}_R = 4 + j3 \, \Omega$; entre la fase S y el neutro se coloca una impedancia $\underline{Z}_S = 3 - j4 \, \Omega$ y entre la fase T y el neutro se conecta una resistencia pura $\underline{Z}_T = 5 \, \Omega$. Tomando la tensión $\underline{U}_{RN}$ como referencia, calcular: a) expresiones complejas de las corrientes de línea; b) corriente de retorno por el neutro.

$$[\text{Res. a) } \underline{I}_R = 43,88 \angle -36,87^\circ; \underline{I}_S = 43,88 \angle -66,87^\circ; \underline{I}_T = 43,88 \angle 120^\circ; \text{ b) } \underline{I}_N = 41,79 \angle -43,33^\circ]$$

- 3.5.** Una red trifásica simétrica de secuencia positiva a tres hilos, de 380 V de tensión compuesta alimenta una carga desequilibrada conectada en estrella cuyas impedancias son: $\underline{Z}_R = 4 + j3 \, \Omega$; $\underline{Z}_S = 3 - j4 \, \Omega$; $\underline{Z}_T = 5 \, \Omega$. Tomando la tensión $\underline{U}_{RN}$ del generador como referencia, calcular: a) expresiones complejas de las corrientes de línea; b) tensión del neutro de las cargas (punto común de la estrella de cargas) respecto del neutro del generador; c) tensiones en cada una de las cargas.

$$[\text{Res. a) } \underline{I}_R = 34,78 \angle -15,07^\circ; \underline{I}_S = 41,88 \angle -90,07^\circ; \underline{I}_T = 60,96 \angle 123,37^\circ; \text{ b) } \underline{U}_{N'N} = 86,76 \angle -48,09^\circ; \text{ c) } \underline{U}_{RN'} = 173,88 \angle 21,8^\circ; \underline{U}_{SN'} = 209,38 \angle -143,2^\circ; \underline{U}_{TN'} = 304,82 \angle 123,37^\circ]$$

- 3.6.** Una red trifásica simétrica de secuencia positiva a tres hilos, de 380 V de tensión compuesta alimenta una carga desequilibrada conectada en triángulo cuyas impedancias son: $\underline{Z}_{RS} = 4 + j3 \, \Omega$; $\underline{Z}_{ST} = 3 - j4 \, \Omega$;

$\underline{Z}_{TR} = 5 \Omega$. Tomando la tensión $\underline{U}_{RN}$ del generador como referencia, calcular: a) expresiones complejas de las corrientes de fase; b) expresiones complejas de las corrientes de línea.

[Res. a) $\underline{I}_{RS} = 76 \angle -6,87^\circ$; $\underline{I}_{ST} = 76 \angle -36,87^\circ$; $\underline{I}_{TR} = 76 \angle 150^\circ$; b) $\underline{I}_R = 148,9 \angle -18,43^\circ$; $\underline{I}_S = 39,34 \angle -111,86^\circ$; $\underline{I}_T = 151,73 \angle 146,56^\circ$]

- 3.7.** Una red trifásica simétrica a tres hilos de secuencia positiva, alimenta a través de una línea de impedancia $2 + j5 \Omega$ por hilo, dos cargas equilibradas: 1) carga en triángulo de $30 \angle 0^\circ \Omega/\text{fase}$; 2) carga en estrella de $10 \angle -90^\circ \Omega/\text{fase}$. La tensión de línea en las cargas es de 380 V. Calcular: a) magnitud de las corrientes absorbidas por cada carga y por el conjunto de ambas; b) tensión compuesta al principio de la línea.

[Res. a) 21,94 A; 21,94 A; 31,03 A; b) 376,18 V]

- 3.8.** La red trifásica del problema anterior tiene una tensión compuesta a principio de línea de 380 V, las impedancias de las cargas y de las líneas son las mismas que antes. Calcular: a) magnitud de las corrientes absorbidas por cada carga y por el conjunto de ambas; b) tensión compuesta al final de línea, es decir en la zona donde se conectan las cargas.

[Res. a) 22,16 A; 22,16 A; 31,34 A; b) 383,85 V]

- 3.9.** Un motor conectado en estrella de 50 CV de potencia mecánica ($1 \text{ CV} = 736 \text{ W}$), rendimiento del 80 % y f.d.p. 0,7 inductivo, está alimentado por una red trifásica de 380 V. Calcular: a) magnitud de la corriente absorbida por el motor; b) impedancia por fase equivalente del motor.

[Res. a) 99,84 A; b) $2,2 \angle 45,57^\circ \Omega$]

- 3.10.** Se dispone de una red trifásica simétrica de secuencia positiva a tres hilos de 220 V de tensión compuesta, a la cual se conectan dos cargas trifásicas equilibradas: 1) carga conectada en estrella de $10 \angle 0^\circ \Omega/\text{fase}$; 2) carga conectada en triángulo de $10 \angle 30^\circ \Omega/\text{fase}$. Tomando como referencia de la tensión $\underline{U}_{RN}$, calcular: a) intensidades complejas $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$ en la carga en estrella, en la carga en triángulo y totales de línea; b) potencias complejas absorbidas por cada carga y total de la instalación.

[Res. a) $\underline{I}_{R1} = 22/\sqrt{3} \angle 0^\circ \text{ A}$; $\underline{I}_{S1} = 22/\sqrt{3} \angle -120^\circ \text{ A}$; $\underline{I}_{T1} = 22/\sqrt{3} \angle +120^\circ \text{ A}$; $\underline{I}_{R2} = 22\sqrt{3} \angle -30^\circ \text{ A}$; $\underline{I}_{S2} = 22\sqrt{3} \angle -150^\circ \text{ A}$; $\underline{I}_{T2} = 22\sqrt{3} \angle 90^\circ \text{ A}$; $\underline{I}_R = 49,51 \angle -22,63^\circ$; $\underline{I}_S = 49,51 \angle -142,63^\circ$; $\underline{I}_T = 49,51 \angle 97,37^\circ$; b) $\underline{S}_1 = 4.840 + j0 \Omega$; $\underline{S}_2 = 12.574 + j7.260$; $\underline{S}_2 = 17.414 + j7.260$]

- 3.11.** Una red trifásica simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta y 50 Hz tiene conectadas dos cargas equilibradas: 1) carga en triángulo de $25 \angle 30^\circ \Omega/\text{fase}$; 2) carga en estrella de $100 \angle 0^\circ \Omega/\text{fase}$. Calcular: a) magnitudes de las corrientes absorbidas por cada carga y total de la instalación; b) factor de potencia total de la instalación; c) capacidad por fase de un banco de condensadores conectados en triángulo para elevar el f.d.p. del conjunto a la unidad; d) potencia reactiva total de los condensadores calculados en el epígrafe anterior; e) módulo de las nuevas corrientes de línea cuando se han conectado los condensadores.

[Res. a) 26,33 A; 2,19 A; 28,25 A; b) 0,885; c) 63,69 μF ; d) 8.668 VAr; e) 25 A]

- 3.12.** Un taller está alimentado por una red trifásica a 4 hilos de 380 V de tensión compuesta y 50 Hz y tiene conectadas las siguientes cargas: 1) 60 lámparas de 60 W, conectadas entre fase y neutro de tal manera que el conjunto del alumbrado quede equilibrado (20 lámparas/fase); 2) 5 tornos automáticos equipados con motores de 5 CV cada uno, $\eta = 80\%$ y f.d.p. 0,72 inductivo; 3) 3 fresadoras con motores individuales de 7 CV, $\eta = 82\%$ y f.d.p. 0,8 inductivo; 4) 1 prensa con un motor de 20 kW, rendimiento 83 % y f.d.p. 0,85 inductivo. Calcular: a) módulo de las corrientes absorbidas por las cargas 1, 2, 3 y 4, y total de la instalación; b) potencia reactiva necesaria de una batería de condensadores que eleven el f.d.p. del taller a 0,95 inductivo. Si los condensadores están en triángulo: ¿cuál será la capacidad necesaria por fase correspondiente? c) si el taller está alimentado por una línea de $0,1 + j0,2 \Omega$ por hilo: ¿qué tensión compuesta será necesaria al principio de la línea en el supuesto de que la tensión en la carga sea constante e igual a 380 V, en los casos siguientes: 1) sin conectar los condensadores, 2) conectando los condensadores?

[Res. 1) $I_1 = 5,47 \text{ A}$; $I_2 = 48,53 \text{ A}$; $I_3 = 35,81 \text{ A}$; $I_4 = 43,07 \text{ A}$; $I_{\text{total}} = 131,24 \text{ A}$; 2) $Q_C = 28,93 \text{ kVAr}$; $C = 212,6 \mu\text{F}$; 3) 425,87 V; 411,5 V]

- 3.13.** Un motor trifásico conectado a una red de 380 V está funcionando a plena carga. Midiendo la potencia por el procedimiento de los dos vatímetros se han obtenido los siguientes resultados:

Vatímetro 1: Bobina amperimétrica en la fase R, bobina voltimétrica entre R y T. Lectura $P_1 = 10 \text{ kW}$.

Vatímetro 2: Bobina amperimétrica en la fase S, bobina voltimétrica entre S y T. Lectura $P_2 = 5 \text{ kW}$.

Calcular: a) potencia activa absorbida por el motor de la red; b) f.d.p. del motor; c) potencia reactiva de una batería de condensadores que eleven el f.d.p. de la instalación a la unidad.

[Res. a) 15 kW; b) 0,866; c) 8,67 kVAr]

- 3.14.** Tres inductancias de reactancia X y resistencia despreciable están conectadas en triángulo y se alimentan por medio de una red de 1.000 V. Se dispone de un vatímetro cuya bobina amperimétrica se coloca en serie con la fase R y con la bobina voltimétrica entre R y T, dando una lectura de 1.000 W. Calcular la intensidad de línea (módulo) y la reactancia de cada bobina.

[Res. 2 A; 866 Ω]

- 3.15.** Una red trifásica simétrica de secuencia positiva de 220 V de tensión compuesta alimenta dos cargas equilibradas: 1) un motor trifásico conectado en triángulo que tiene una impedancia equivalente por fase de $20\sqrt{3} \angle 30^\circ \Omega$; 2) una resistencia eléctrica de calefacción conectada en estrella de $50/\sqrt{3}$ ohmios por fase. Tomando la tensión $\underline{U}_{RN}$ del generador como referencia, calcular: a) módulos de las corrientes absorbidas por cada carga y total de la instalación; b) potencia activa total absorbida por las cargas; c) lecturas P_1 y P_2 de dos vatímetros conectados correctamente para que su suma represente la potencia activa total consumida por los receptores; d) si se funde una sola de las resistencias que componen el grupo de calefacción ¿cuál será la suma de las lecturas P_1 y P_2 de los vatímetros?

[Res. a) $\underline{I}_{R1} = 11 \text{ A}$; $\underline{I}_{R2} = 4,4 \text{ A}$; $\underline{I}_{\text{Total}} = 14,97 \text{ A}$; b) $P = 5.306 \text{ W}$; c) $P_1 = 3.258 \text{ W}$; $P_2 = 2.048 \text{ W}$; d) $P_1 + P_2 = 4.468 \text{ W}$]

- 3.16.** En el circuito de la Figura P.3.1, la carga 1 representa un conjunto de alumbrado de 6.000 W de lámparas incandescentes, conectadas en estrella, de forma que el conjunto es equilibrado; la carga 2 repre-

senta un motor trifásico conectado en triángulo de 20 CV, $\eta = 85\%$, $\cos \varphi = 0,8$ inductivo. La tensión compuesta en el conjunto de las cargas es de 380 V y vienen alimentadas por un Centro Generador mediante una línea de impedancia $0,1 + j0,2 \Omega/\text{hilo}$. Si la secuencia de fases es RST y se toma la tensión $\underline{U}_{RN}$ en las cargas como referencia de fases, calcular: a) corrientes $\underline{I}_{R1}$, $\underline{I}_{R2}$, $\underline{I}_R$; b) tensión compuesta al principio de línea; c) lecturas P_1 y P_2 de los vatímetros colocados en el origen de la línea. Compruébese que la suma $P_1 + P_2$ coincide con la suma de las potencias absorbidas por las cargas más las disipadas en la línea.

[Res. a) $\underline{I}_{R1} = 9,12 \angle 0^\circ$; $\underline{I}_{R2} = 32,89 \angle -36,87^\circ$; $\underline{I}_R = 40,55 \angle -29,11^\circ$; b) 393,07 V; c) $P_1 = 15.939$ W; $P_2 = 7.872$ W; $P = 23.811$ W]

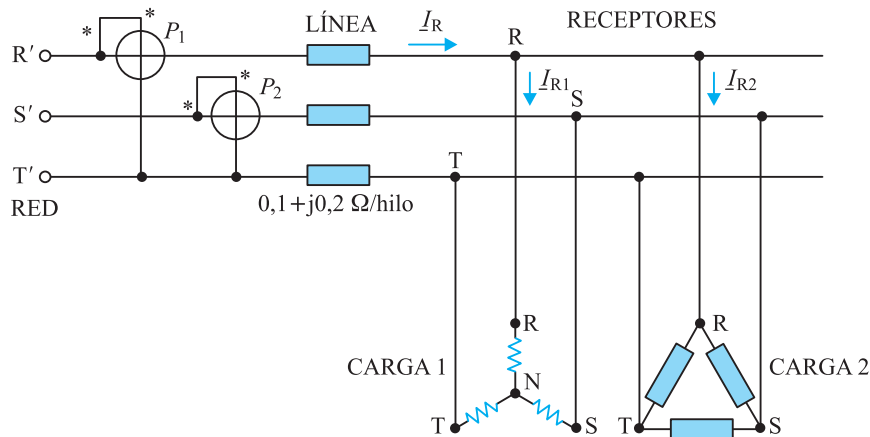


Figura P.3.1

3.17.

La Figura P.3.2 muestra una línea trifásica de impedancia $1 + j2$ ohmios/hilo y que alimenta a 380 V, 50 Hz un conjunto receptor constituido por dos cargas trifásicas equilibradas, una en triángulo de impedancia $19\sqrt{3} \angle +60^\circ \Omega/\text{fase}$ y otra en estrella de $38/\sqrt{3} \angle +60^\circ \Omega/\text{fase}$. La sucesión de fases es RST y se toma la tensión $\underline{U}_{RN}$ en las cargas como referencia de fases. Calcular: a) corrientes en la fase R, de las cargas 1, 2 y total absorbida por el conjunto con su f.d.p.; b) tensión compuesta al principio de la

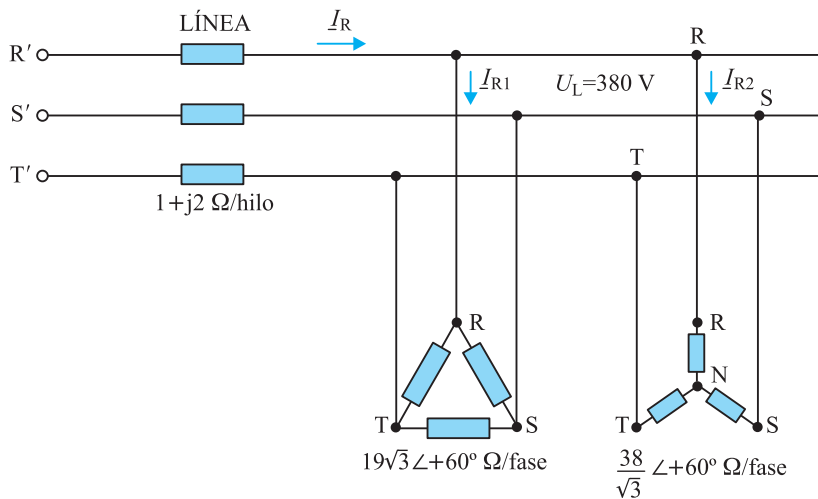


Figura P.3.2

línea, teniendo en cuenta que la tensión compuesta en las cargas receptoras es de 380 V; c) capacidad por fase de unos condensadores conectados en estrella en el extremo receptor que eleven el f.d.p. en ese punto a la unidad. Determinar en este caso, el nuevo valor de la corriente de línea (módulo) absorbida por la instalación; d) determinar la nueva tensión al principio de la línea estando conectados los condensadores; e) si los condensadores calculados en el apartado c se conectan en triángulo ¿cuál será la tensión necesaria al principio de línea?

[Res. a) $\underline{I}_{R1} = 20 \angle -60^\circ$; $\underline{I}_{R2} = 10 \angle -60^\circ$; $\underline{I}_R = 30 \angle -60^\circ$; $\cos \varphi = 0,5$; b) 496,02 V; c) 377 μF ; 15 A; d) 409,29 V; e) 266,84 V]

3.18.

Una línea trifásica tiene una impedancia de $0,1 + j0,5$ ohmios por hilo y alimenta las siguientes cargas: a) grúa de potencia mecánica 10 CV, $\eta = 80 \%$ y f.d.p. 0,6 inductivo; b) central de hormigonado con una potencia total de 20 kW, $\eta = 85 \%$ y f.d.p. 0,707 inductivo; c) iluminación equilibrada de 9 kW con lámparas incandescentes. Si la tensión compuesta en las cargas es de 380 V, 50 Hz, calcular: 1) magnitudes de las corrientes parciales absorbidas por cada carga, corriente total de la instalación y su f.d.p.; 2) tensión compuesta que debe aplicarse al principio de la línea, para que la tensión en la carga sea de 380 V; 3) si se conecta a la red, en la zona de las cargas, una batería de condensadores en estrella de 500 μF por fase ¿cuál será el valor de la nueva corriente de línea y su f.d.p. y la tensión compuesta necesaria al principio de la red? 4) contestar al apartado anterior, si los condensadores se conectan en triángulo.

[Res. a) 23,3 A; 50,6 A; 13,7 A; 83,6 A; $\cos \varphi_T = 0,76$; b) 440,47 V; c) 66,46 A; 0,954; 411,47 V; d) 80,12 A; 0,791 capacitivo; 354,26 V]

3.19.

El circuito trifásico de la Figura P.3.3, está alimentado por una red simétrica de secuencia positiva con 220 V de línea. La tensión $\underline{U}_{RN}$ se toma como referencia de fases. Se han conectado dos vatímetros para medir la potencia absorbida por la instalación. Calcular las indicaciones de los vatímetros en los casos siguientes: a) con el interruptor K abierto; b) con el interruptor K cerrado; c) con K abierto y circuito cortado (abierto) en A; d) con K abierto y circuito cortado en B.

[Res. a) $P_1 = 15.418,5 \text{ W}$; $P_2 = 2.005,5 \text{ W}$; b) $P_1 = 11.925 \text{ W}$; $P_2 = 5.499 \text{ W}$; c) 9.610,5 W; 2.005,5 W; d) 14.415,75 W; -5.703,75 W]

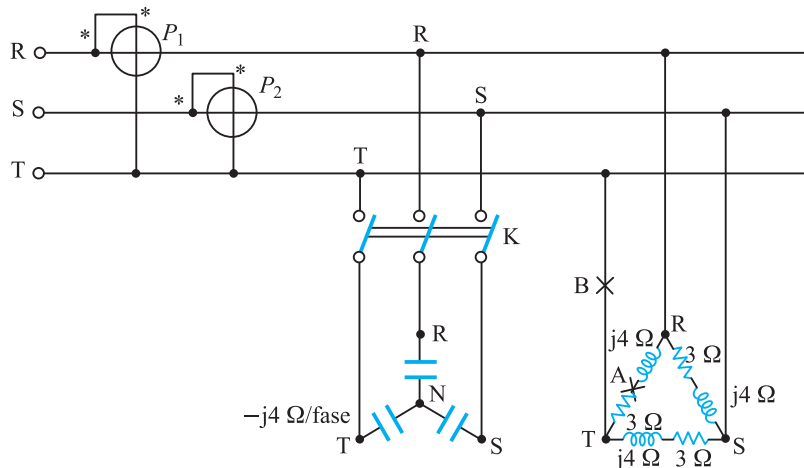


Figura P.3.3

- 3.20.** Una red trifásica simétrica de secuencia positiva de 380 V de línea y 50 Hz, alimenta dos cargas equilibradas: 1) Carga en triángulo de $25 \angle 30^\circ \Omega/\text{fase}$. 2) Carga en estrella de $100 \angle 0^\circ \Omega/\text{fase}$. Tomando como referencia de fases la tensión $\underline{U}_{RN}$, calcular: a) módulo de las corrientes absorbidas por cada carga y total de la instalación; b) lecturas correspondientes a dos vatímetros conectados correctamente para medir la potencia activa absorbida por la instalación; c) potencia reactiva total y capacidad por fase de un banco de condensadores conectados en triángulo y acoplados a la red, que eleven el f.d.p. total de la instalación a la unidad.

[Res. a) $15,2\sqrt{3}$ A; $38/\sqrt{3}$ A; $I_{\text{Total}} = 28,25$ A; b) $P_1 = 10.723$ W; $P_2 = 5.723$ W; c) 8.660 VAR; 63,6 μF]

- 3.21.** En la Figura P.3.4 se muestra una red trifásica formada por una línea de $0,1 + j0,3 \Omega/\text{hilo}$, que alimenta tres motores trifásicos a una tensión compuesta de 380 V, 50 Hz. ($\underline{U}_{RN}$ en el receptor se toma como referencia). El motor 1 está conectado en triángulo y es equivalente a una impedancia de $25 \angle 45^\circ \Omega/\text{fase}$; el motor 2 está conectado en estrella y equivale a una impedancia de $15 \angle 0^\circ \Omega/\text{fase}$. El motor 3 está conectado en estrella. Las lecturas de los vatímetros mostrados en la Figura P.3.4. han sido: $P_1 = 21.700$ W; $P_2 = 7.405$ W; Calcular: a) módulo de la corriente total absorbida por el conjunto y su f.d.p.; b) magnitud de la corriente absorbida por el motor n.º 3, e impedancia por fase equivalente del mismo; c) si se conecta en la zona receptora una batería de condensadores de 30 kVAR, ¿cuál será la nueva corriente total absorbida por la instalación, su f.d.p. y la tensión compuesta necesaria al principio de línea si la tensión en las cargas es siempre de 380 V?

[Res. a) 58,03 A; $\cos \varphi_T = 0,762$; b) 21,9 A; $10 \angle 60^\circ \Omega$; c) 44,94 A; $\cos \varphi = 0,984$ capacitivo; $U_L = 384,27$ V]

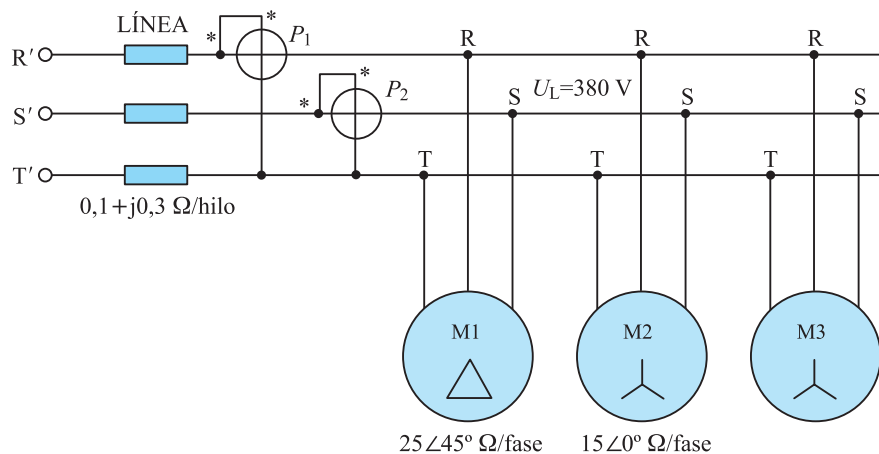


Figura P.3.4

- 3.22.** En el circuito trifásico de la Figura P.3.5, la alimentación es simétrica, de secuencia positiva y con una tensión compuesta de 220 V. Tomando $\underline{U}_{RN}$ como referencia, calcular: a) lectura de los vatímetros P_1 y P_2 ; b) contestar a la pregunta anterior cuando se rompe la fase T en el punto A; c) determinar la lectura de los vatímetros cuando se rompe la fase T en el punto B (en vez del punto A).

[Res. a) $P_1 = 7.621$ W; $P_2 = 4.400$ W; b) $P_1 = 3.219,7$ W; $P_2 = 2.788,3$ W; c) $P_1 = 4.399,3$ W; $P_2 = 1.610,2$ W]

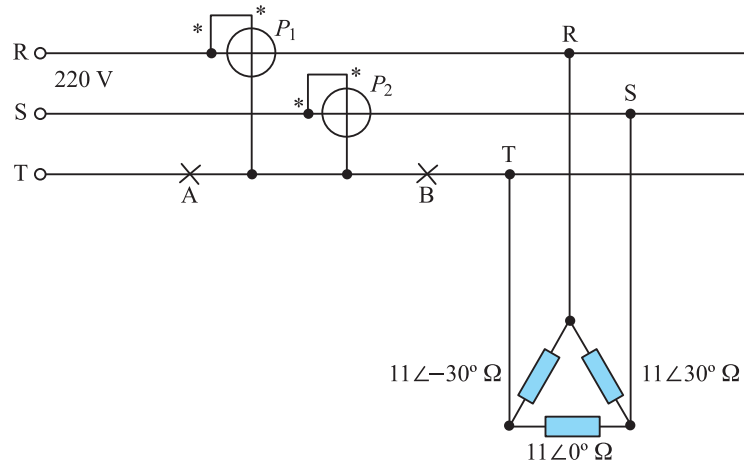


Figura P.3.5

- 3.23.** La red trifásica de la Figura P.3.6 está alimentada a principio de línea por un generador simétrico, de secuencia positiva, de 380 V de tensión compuesta y 50 Hz. Las cargas que se representan están equilibradas, siendo su conexión la que se indica. a) Estando el interruptor D_2 abierto, al cerrar D_1 , las lecturas de los vatímetros fueron: $P_1 = 7.457 \text{ W}$; $P_2 = 2.470 \text{ W}$; ¿cuál es el valor de la impedancia compleja por fase de la carga 1? b) Si a continuación se conecta la carga 2 (es decir D_1 y D_2 están cerrados), ¿cuál será el módulo de la tensión de línea que se tendrá en las cargas? c) En la situación del apartado anterior ¿cuál será el valor de la potencia reactiva total necesaria en unos condensadores conectados en triángulo al principio de la línea, que eleven el f.d.p. total de la instalación en ese punto a 0,9 inductivo?

[Res. a) $10,34 \angle 36,83^\circ \Omega$; b) 351,67 V; c) 4.966 kVar]

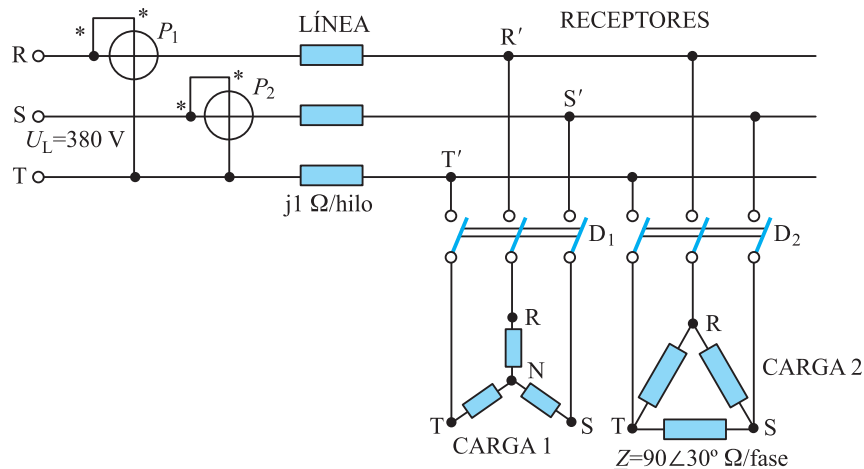


Figura P.3.6

- 3.24.** Una red trifásica simétrica de secuencia positiva alimenta mediante una línea de impedancia $0,1 + j0,2 \Omega$ por hilo los siguientes receptores: 1) un motor trifásico de 10 kW, $\eta = 82\%$; f.d.p. 0,707 inductivo, 2) un motor trifásico de 15 kW, $\eta = 85\%$, $\cos \varphi = 0,8$ inductivo, 3) un motor trifásico de

5 kW, $\eta = 80\%$ y f.d.p. 0,6 inductivo. La tensión compuesta en la zona de los receptores es de 380 V, 50 Hz. Calcular: a) módulos de las corrientes parciales absorbidas por cada motor, y corriente total absorbida por el conjunto de la instalación y su f.d.p.; b) tensión compuesta a principio de línea si la tensión receptora es siempre de 380 V; c) potencia reactiva de una batería de condensadores acoplados a la red en el extremo receptor y que eleven el f.d.p. del conjunto en esa zona a 0,9 inductivo; d) si se desconectan repentinamente los motores de 10 kW y de 15 kW (cargas a y b) ¿cuál será el f.d.p. resultante de la instalación? ¿es inductivo o capacitivo? e) en el caso anterior ¿cuál será la nueva tensión compuesta necesaria al principio de línea?

[Res. a) 26,21 A; 33,51 A; 15,83 A; $I_{\text{Total}} = 5,09$ A; $\cos \varphi_T = 0,73$; b) 407,30 V; c) 16,28 kVAR; d) 0,618 capacitivo; e) 377,52 V]

- 3.25.** La Figura P.3.7 muestra una red trifásica, alimentada por un generador simétrico, de secuencia positiva, de 380 V de tensión compuesta (principio de línea). La carga 1 es una estrella de resistencias de $25 \Omega/\text{fase}$. La carga 2 representa el circuito equivalente de un motor trifásico conectado en triángulo de impedancia $6 \angle +36,87^\circ \Omega/\text{fase}$. Calcular: a) tensión compuesta en bornes del motor (carga 2); b) si se desconecta el motor ¿cuál será la tensión compuesta que aparecerá en bornes de la carga 1?

[Res. a) 280,7 V; b) 378,5 V]

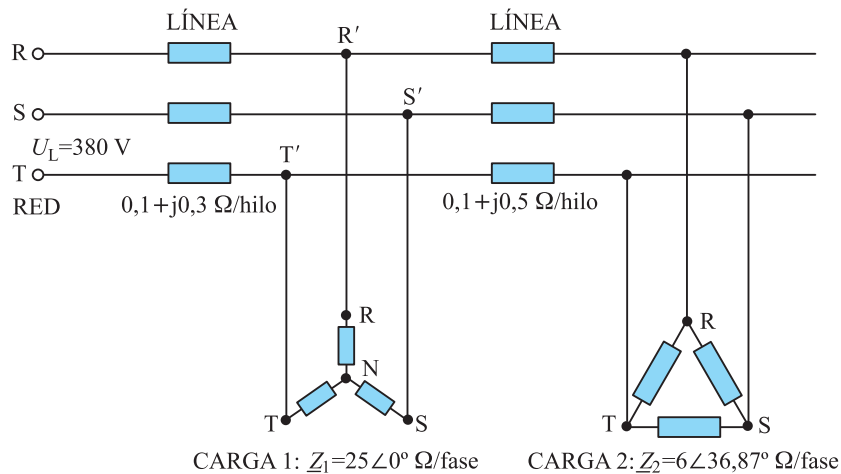


Figura P.3.7

- 3.26.** La red trifásica de la Figura P.3.8 está alimentada en los terminales RST por un sistema simétrico directo de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz. Las cargas que se representan están equilibradas y su conexión es la que se indica. Calcular: a) lecturas P_1 y P_2 de los vatímetros si D_1 está abierto y D_2 y D_3 están cerrados; b) tensión compuesta en la carga 3, si D_1 y D_2 están abiertos y D_3 cerrado; c) cuando se cierran los tres interruptores, las lecturas de los vatímetros son: $P_1 = 87.616$ W; $P_2 = 84.408$ W, determinar el valor en ohmios de la resistencia R (por fase) de la carga 1.

[Res. a) $P_1 = 15.488,5$ W; $P_2 = 12.280$ W; b) 566,90 V; c) $R = 1 \Omega$]

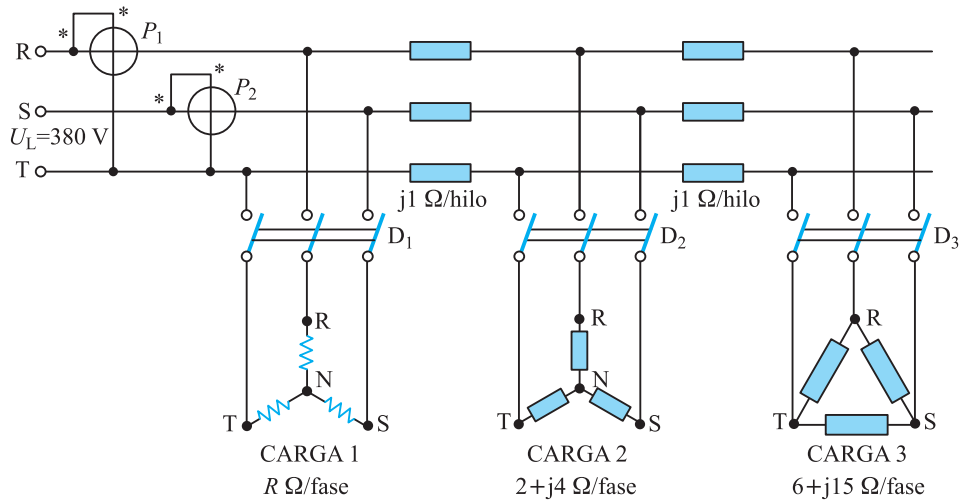


Figura P.3.8

- 3.27.** La red trifásica de la Figura P.3.9 está alimentada en los terminales de entrada por un sistema simétrico directo de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz. Existe al principio de línea una carga 1 que representa un motor trifásico conectado en estrella. Al final de línea hay una carga en triángulo de $12 \angle 90^\circ \Omega/\text{fase}$. Estando el interruptor D_2 abierto, es decir funcionando solo el motor, se observan las siguientes lecturas de los vatímetros: $P_1 = 16.674 \text{ W}$; $P_2 = 8.337 \text{ W}$. a) Calcular la impedancia por fase del motor; b) se cierra el interruptor D_2 (el motor sigue funcionando) ¿cuál será la d.d.p. en bornes de la carga 2? c) se abre la fase T en el punto A ¿cuáles serán las lecturas de los vatímetros estando conectadas ambas cargas? (se supone que la impedancia equivalente del motor permanece invariable); d) en el caso anterior ¿cuál será el valor de la tensión que adquiere el centro de la estrella del motor respecto del neutro del generador?

[Res. a) $5 \angle 30^\circ \Omega$; b) $U_{L2} = 304 \text{ V}$; c) $P_1 = 25.010 \text{ W}$; $P_2 = -12.505 \text{ W}$; d) $\underline{U}_{N'N} = 109,72 \angle -60^\circ$]

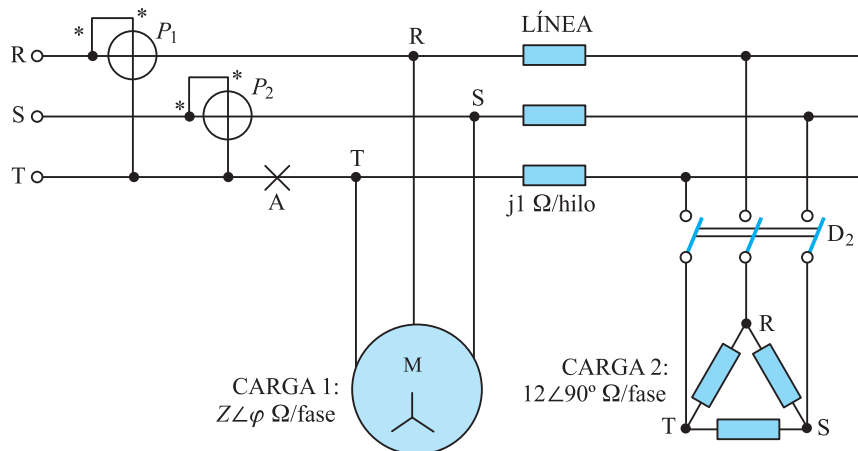


Figura P.3.9

- 3.28.** Se dispone de la red trifásica a cuatro hilos de la Figura P.3.10, alimentada por un generador simétrico directo. La impedancia del neutro se considera despreciable. Se sabe que la tensión en bornes de la

carga en triángulo es constante y de magnitud igual a 380 V. Tomando $\underline{U}_{RN}$ en la carga en triángulo como referencia, calcular: a) corrientes complejas $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$ al principio de línea; b) módulo de la tensión compuesta en bornes de la carga en estrella y al principio de línea; c) lecturas de dos vatímetros conectados correctamente para medir la potencia trifásica a principio de línea ¿cuánto vale el f.d.p. de la instalación?

[Res. a) $\underline{I}_R = 22,36 \angle -26,56^\circ$; $\underline{I}_S = 22,36 \angle -146,56^\circ$; $\underline{I}_T = 22,36 \angle 93,44^\circ$; b) 350 V; 398,82 V; c) $P_1 = 8.914,40$ W; $P_2 = 4.249,6$ W; $\cos \varphi_T = 0,852$]

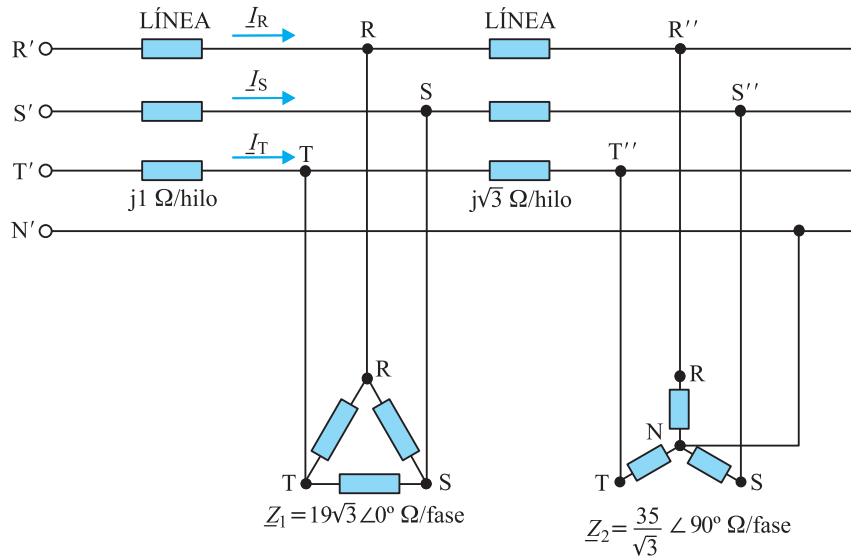


Figura P.3.10

- 3.29.** La Figura P.3.11 representa una red trifásica a 4 hilos, de 380 V de tensión compuesta, simétrica y de secuencia directa. Las cargas conectadas son: 1) motor trifásico conectado en triángulo que absorbe una potencia aparente de la red de 200 kVA con f.d.p. 0,866 inductivo; 2) una carga monofásica entre las fases R y S formada por una batería de condensadores que aportan una potencia reactiva de 50 kVAR; 3) una carga monofásica de alumbrado incandescente conectada entre la fase T y el neutro que absorbe una potencia activa de 20 kW. Tomando la tensión $\underline{U}_{RN}$ como referencia, calcular: a) valores complejos de corrientes $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$, e $\underline{I}_N$; b) lecturas P_1 y P_2 de los vatímetros indicados en la Figura P.3.11, ¿la suma de ambas lecturas miden la potencia activa total consumida por la instalación? Razónese la respuesta.

[Res. a) $\underline{I}_R = 201 \angle -10,9^\circ$; $\underline{I}_S = 331,14 \angle -126,6^\circ$; $\underline{I}_T = 385,5 \angle 96,8^\circ$; $\underline{I}_N = 91,16 \angle 120^\circ$; b) $P_1 = 72.175$ W; $P_2 = 101.021$ W. La suma de P_1 más P_2 no mide la potencia total ya que existe corriente de retorno por el neutro. No se detecta el consumo del alumbrado]

- 3.30.** En la red de la Figura P.3.12, se supone que la tensión en la zona de receptores es de 400 V, simétrica y de secuencia positiva. El motor trifásico tiene una potencia mecánica de 12,5 CV, $\eta = 85\%$ y f.d.p. 0,8 inductivo. Las fases de la línea tienen una resistencia de 0,15 Ω y reactancia despreciable. El neutro tiene una resistencia de 0,4 Ω y no tiene reactancia. De las fases R, S y T se alimentan lámparas incandescentes, cuyos consumos son de 20 A, 15 A y 5 A respectivamente. a) Calcular la tensión entre

la fase T y el neutro en el extremo emisor ($\underline{U}_{T'N'}$); b) responder a la pregunta anterior cuando se desconecta el motor; c) responder a la misma pregunta si se desconecta el motor y la carga de alumbrado de la fase T.

[Res. a) $\underline{U}_{T'N'} \approx 229 \angle 120^\circ$; b) $226,7 \angle 120^\circ$; c) $223,95 \angle 120^\circ$]

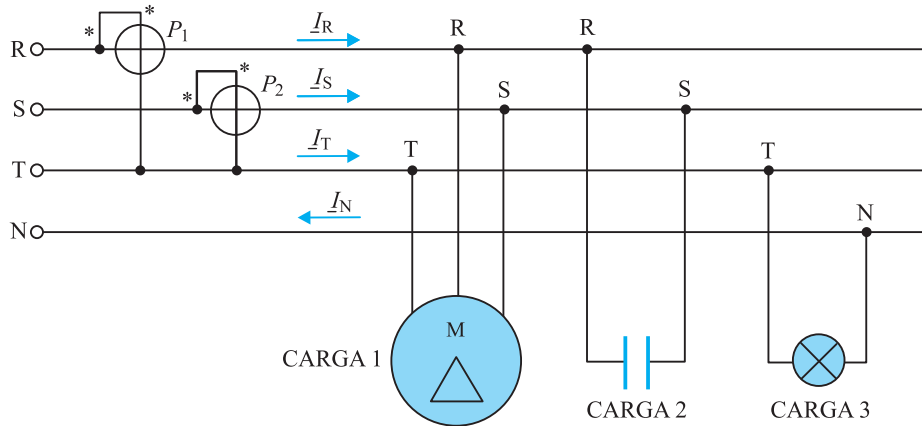


Figura P.3.11

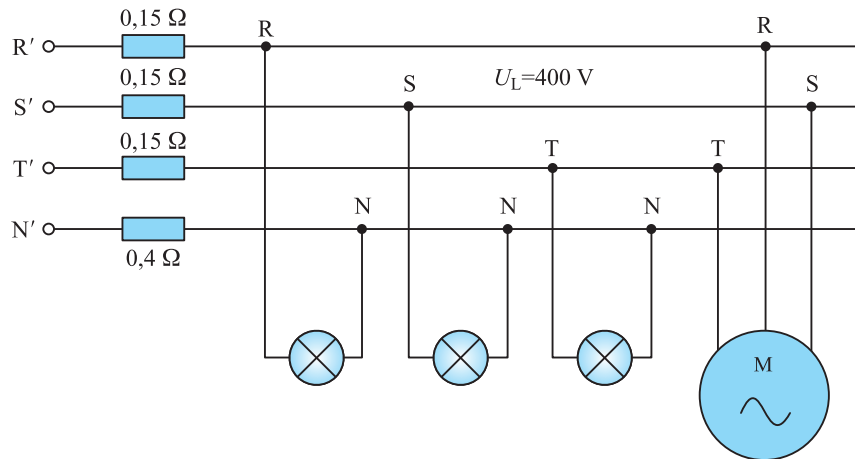


Figura P.3.12

- 3.31.** La red de la Figura P.3.13 está alimentada por un generador trifásico simétrico directo de 220 V de tensión compuesta. Tomando la tensión $\underline{U}_{RN}$ como referencia, calcular: a) tensión de línea en la carga en estrella estando el interruptor D_2 abierto; b) lecturas P_1 y P_2 en el caso anterior; c) si se cierra el interruptor D_2 de la carga monofásica 2 ¿cuáles serán los valores de las corrientes $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ e $\underline{I}_T$? d) determinar los valores de P_1 y P_2 en el caso anterior.

[Res. a) 200 V; b) $P_1 = 1.577,4$ W; $P_2 = 422,6$ W; c) $\underline{I}_R = 40,93 \angle -20,7^\circ$; $\underline{I}_S = 40,93 \angle 170,7^\circ$; $\underline{I}_T = 8,16 \angle 75^\circ$; d) $P_1 = 6.843$ W; $P_2 = -2.829$ W]

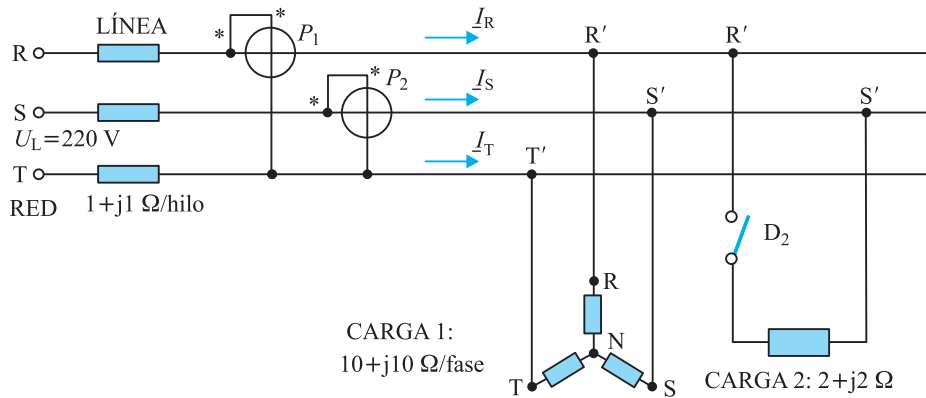


Figura P.3.13

- 3.32.** En el circuito de la Figura P.3.14 se muestra una instalación eléctrica equilibrada alimentada por una red simétrica de secuencia positiva. Al final de la línea existen dos motores trifásicos M_1 y M_2 conectados en estrella. El motor 2 se puede representar por una carga de $3 + j4 \Omega/\text{fase}$. Las lecturas de los aparatos de medida son las siguientes: $P_1 = 27.135 \text{ W}$; $P_2 = 7.271 \text{ W}$; $V_2 = 350,5 \text{ V}$. Calcular: a) lectura del amperímetro conectado en la fase R; b) impedancia por fase equivalente del motor M_1 ; c) lectura del voltímetro V_1 ; d) si se mantiene constante la tensión a principio de línea en el valor acumulado en el apartado c) ¿cuál será la lectura del voltímetro V_2 si se desconecta el motor M_1 ?

[Res. a) 80,15 A; b) $4 + j3 \Omega$; c) 380 V; d) 364 V]

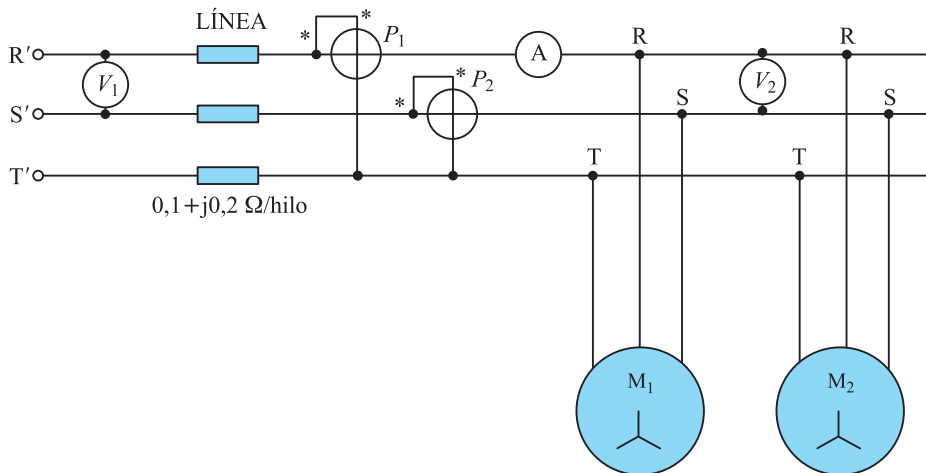


Figura P.3.14

- 3.33.** La red trifásica de la Figura P.3.15 tiene una tensión de alimentación a principio de línea de 380 V, 50 Hz, simétrica y de secuencia directa. La línea tiene una impedancia de $j0,5 \Omega/\text{hilo}$. La carga 1 es una carga en triángulo de impedancia $R_\Delta + jX_\Delta \Omega/\text{fase}$. La carga 2 es una carga en estrella resistiva pura. a) Si el interruptor D_1 está cerrado y D_2 abierto, las lecturas de los vatímetros son: $P_1 = 13.813,6 \text{ W}$; $P_2 = 978,8 \text{ W}$; calcular la impedancia por fase de la carga en triángulo; b) si el interruptor D_1 está abierto y D_2 cerrado, la tensión del voltímetro conectado entre dos fases al final de la línea fue de 368,65 V. Calcular la resistencia R por fase de la carga 2 y las lecturas de los vatímetros; c) se conecta

al final de la línea una batería de condensadores en triángulo ¿cuál deberá ser la capacidad por fase necesaria para que la lectura del voltímetro sea la misma que la tensión de alimentación (es decir 380 V) suponiendo que están cerrados los interruptores D_1 y D_2 ? (Nota: Tomar la capacidad menor de las dos posibles).

[Res. a) $Z_{\Delta} = 9 + j12 \Omega$; b) $R = 2 \Omega$; $P_1 = 38.881 \text{ W}$; $P_2 = 29.070 \text{ W}$; c) $274 \mu\text{F}$]

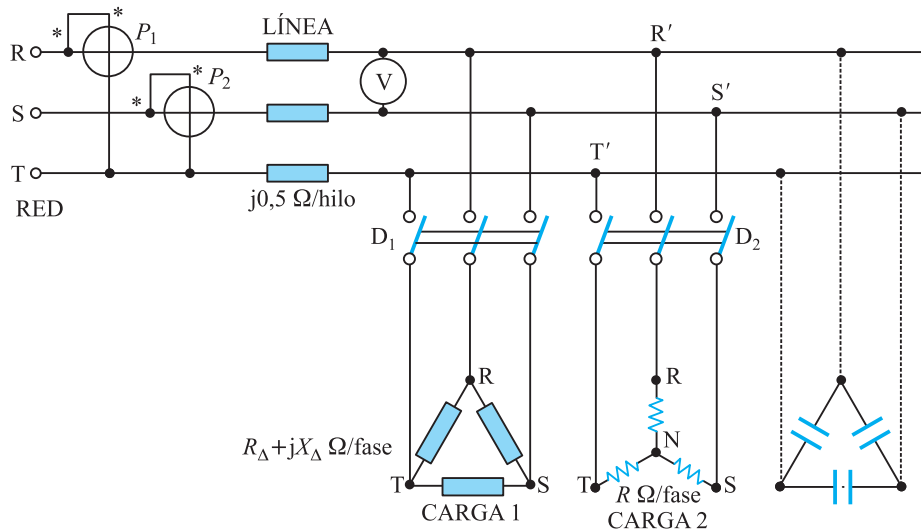


Figura P.3.15

- 3.34.** En la construcción de una obra civil, alimentada por una red trifásica a 380 V de tensión compuesta, se va a emplear la siguiente maquinaria: 1) central de hormigonado de 50 kW, $\eta = 80 \%$ y f.d.p. 0,7 inductivo; 2) blondín de hormigonado con una potencia instalada de 30 CV, $\eta = 75 \%$ y f.d.p. 0,65 inductivo (1 CV = 736 W); 3) grupos de soldadura con una potencia de 25 kW, $\eta = 90 \%$ y f.d.p. 0,9 inductivo; 4) maquinaria diversa: grúas, cintas transportadoras, pequeñas hormigoneras, etc., con una potencia total de 20 kW, $\eta = 70 \%$, f.d.p. 0,6 inductivo. Calcular: a) magnitudes de las corrientes parciales absorbidas para cada receptor a plena carga y corriente total de línea; b) potencias activa, reactiva y aparente del conjunto, indicando el f.d.p. de la instalación; c) potencia reactiva necesaria de un banco de condensadores que eleven el f.d.p. total a 0,9 inductivo; d) indicar la potencia necesaria del transformador de alimentación de la obra en los casos siguientes: 1) sin conectar los condensadores; 2) conectando los condensadores. (Nota: La potencia de los transformadores se mide en kVA).

[Res. a) 135,66 A; 68,81 A; 46,89 A; 72,35 A; 320,18 A; b) 148,28 kW; 149,74 kVAr; 210,74 kVA; 0,704; c) 77,9 kVAr; d) 1) 210,74 kVA; 2) 164,76 kVA]

- 3.35.** La instalación de alumbrado de un centro comercial está alimentada por una red trifásica simétrica de secuencia positiva a 4 hilos con 380 V de tensión compuesta. Entre cada fase y neutro se hayan conectadas en un momento dado las siguientes cargas resistivas: 1) fase R: 300 lámparas de 100 W; 2) fase S: 200 lámparas de 100 W; 3) fase T: 100 lámparas de 100 W. Las lámparas tienen una tensión nominal de 220 V (igual a la tensión fase-neutro a la cual se conectan). Se pide: a) ¿Cuáles serán las impedancias equivalentes (resistencias) de las diferentes cargas? b) ¿Cuáles serán las magnitudes de las corrientes en la diferentes fases y en el neutro? c) Si se produce en este momento y en la entrada del

edificio, la rotura del hilo neutro ¿qué valores tomarán las corrientes en las líneas? d) Sabiendo que una lámpara no soporta una sobretensión superior al 20 % de su valor nominal, ¿se fundirán algunas lámparas?

[Res. a) $\underline{Z}_R = 1,613 \Omega$; $\underline{Z}_S = 2,42 \Omega$; $\underline{Z}_T = 4,84 \Omega$; b) $I_R = 136,01 \text{ A}$; $I_S = 90,66 \text{ A}$; $I_T = 45,33 \text{ A}$; $I_N = 78,52 \text{ A}$; c) $I_R = 103,88 \text{ A}$; $I_S = 94,36 \text{ A}$; $I_T = 57,04 \text{ A}$; d) Se fundirán las 100 lámparas de la fase T]

- 3.36.** En el circuito de la Figura P.3.16, se muestra una instalación eléctrica desequilibrada alimentada por una red trifásica simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta. Las cargas son monofásicas. La carga 1 absorbe una potencia activa de 950 W con f.d.p. 0,5 inductivo. La carga 2 absorbe una potencia activa de 1.140 W con f.d.p. unidad. La carga 3 absorbe de la red una potencia activa de 760 W con f.d.p. 0,5 capacitivo. Tomando como referencia de fases la tensión $\underline{U}_{RN}$ de la red, calcular: a) expresiones complejas de las corrientes de línea $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, e $\underline{I}_T$; b) lecturas P_1 y P_2 de los vatímetros señalados en la Figura P.3.16.

[Res. a) $\underline{I}_R = 7,81 \angle -3,67^\circ$; $\underline{I}_S = 4,359 \angle -173,4^\circ$; $\underline{I}_T = 3,605 \angle 163,9^\circ$; b) $P_1 = 2.660 \text{ W}$; $P_2 = 190 \text{ W}$.

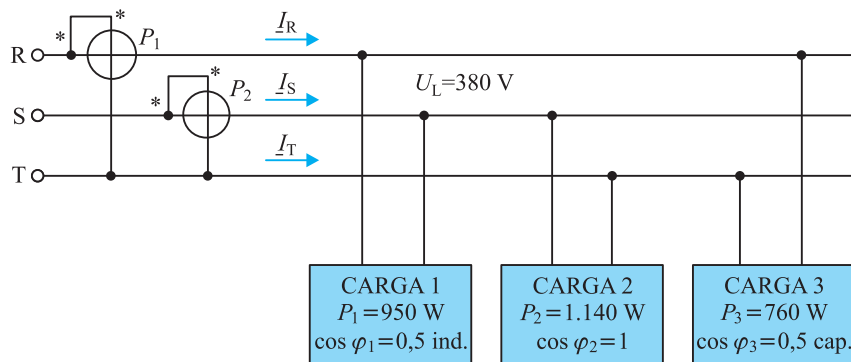


Figura P.3.16

- 3.37.** En el circuito de la Figura P.3.17, se muestra una instalación alimentada por una red trifásica simétrica de secuencia directa, con una tensión compuesta de 380 V. El motor A es trifásico, y absorbe de la red una potencia activa de 2.792 W con f.d.p. 0,707 inductivo. El motor B es monofásico y está conectado entre las fases R y S de la red. Si las lecturas de los vatímetros han sido: $P_1 = 3.722 \text{ W}$; $P_2 = -170 \text{ W}$. Determinar la potencia activa P_B que el motor B absorbe de la red y su f.d.p.

[Res. $P_B = 760 \text{ W}$; $\cos \varphi_B = 0,5$ inductivo]

- 3.38.** La instalación eléctrica de la Figura P.3.18, tiene en el extremo receptor un sistema equilibrado de tensiones, con un valor de línea de 220 V, con sucesión de fases RST. El receptor está compuesto por las siguientes cargas: 1) un motor trifásico conectado en estrella que absorbe una potencia activa de la red de 4 kW, con f.d.p. 0,8 inductivo; 2) un grupo de 60 lámparas incandescentes de 40 W cada una, conectadas de un modo equilibrado a 220 V (20 lámparas entre cada dos fases); 3) un motor monofásico conectado entre las fases R y S y que absorbe 2 kW de la red, con f.d.p. 0,7 inductivo; 4) un hornillo de 500 W conectado entre la fase T y el neutro. La impedancia de la línea es de $0,5 + j1 \Omega/\text{hilo}$, siendo despreciable la impedancia del neutro. Tomando como referencia la tensión $\underline{U}_{RN}$ del receptor,

calcular: a) corrientes $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$ e $\underline{I}_N$; b) tensiones simples en el origen de la línea: $\underline{U}_{R'N}$, $\underline{U}_{S'N}$, $\underline{U}_{T'N}$; c) tensiones compuestas $\underline{U}_{R'S'}$, $\underline{U}_{S'T'}$, $\underline{U}_{T'R'}$.

[Res. a) $\underline{I}_R = 31,44 \angle -21,18^\circ$; $\underline{I}_S = 28,63 \angle -165,6^\circ$; $\underline{I}_T = 22,19 \angle 99,2^\circ$; $\underline{I}_N = 3,94 \angle 120^\circ$; b) $\underline{U}_{R'N} = 154,85 \angle 8,78^\circ$; $\underline{U}_{S'N} = 157,79 \angle -116,44^\circ$; $\underline{U}_{T'N} = 146,24 \angle 126,6^\circ$; c) $\underline{U}_{R'S'} = 277,59 \angle 36,45^\circ$; $\underline{U}_{S'T'} = 259,24 \angle -86,26^\circ$; $\underline{U}_{T'R'} = 257,89 \angle 158,68^\circ$]

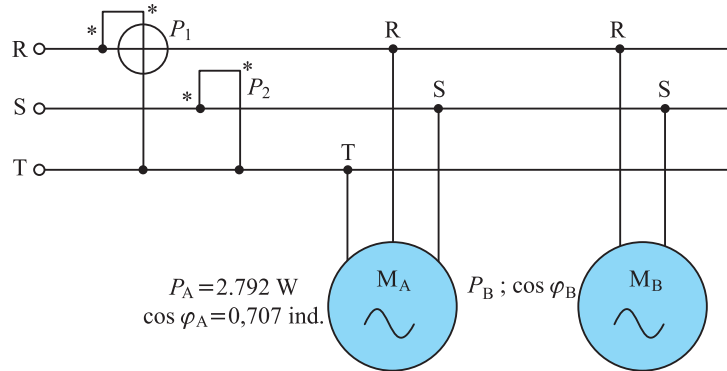


Figura P.3.17

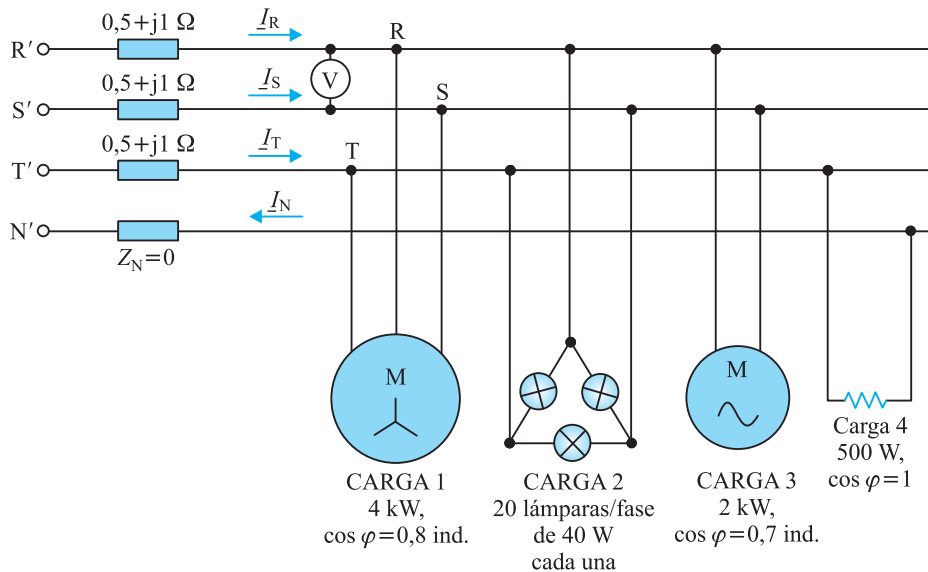


Figura P.3.18

3.39.

El circuito de la Figura P.3.19, se supone que forma un sistema simétrico de tensiones de secuencia directa en el extremo receptor, con un valor de 380 V de tensión compuesta. Las cargas son las siguientes: 1) motor trifásico de 10 kW; $\eta = 90\%$; $\cos \varphi = 0,8$; 2) alumbrado incandescente entre la fase R y el neutro de 5 kW; 3) alumbrado incandescente entre la fase S y el neutro de 4 kW; 4) alumbrado incandescente entre la fase T y el neutro de 1 kW; 5) motor monofásico de 2 kW conectado entre las fases R y S, $\eta = 80\%$; $\cos \varphi = 0,6$ inductivo. Tomando la tensión $\underline{U}_{RN}$ en el receptor como referencia, calcular: a) expresiones complejas de las $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$ e $\underline{I}_N$; b) tensiones complejas simples a principio de línea: $\underline{U}_{R'N'}$, $\underline{U}_{S'N'}$, $\underline{U}_{T'N'}$; c) tensiones complejas compuestas a principio de línea: $\underline{U}_{R'S'}$, $\underline{U}_{S'T'}$, $\underline{U}_{T'R'}$.

[Res. a) $\underline{I}_R = 52,56 \angle -18,83^\circ$; $\underline{I}_S = 43,37 \angle -152,88^\circ$; $\underline{I}_T = 24,9 \angle 89,45^\circ$; $\underline{I}_N = 16,43 \angle 46,11^\circ$; b) $\underline{U}_{R'N'} = 230,73 \angle 0,8^\circ$; $\underline{U}_{S'N'} = 223,21 \angle -118,6^\circ$; $\underline{U}_{T'N'} = 220,42 \angle 119,2^\circ$; c) $\underline{U}_{R'S'} = 392 \angle +30,53^\circ$; $\underline{U}_{S'T'} = 388,35 \angle -89,9^\circ$; $\underline{U}_{T'R'} = 387,57 \angle 150,8^\circ$]

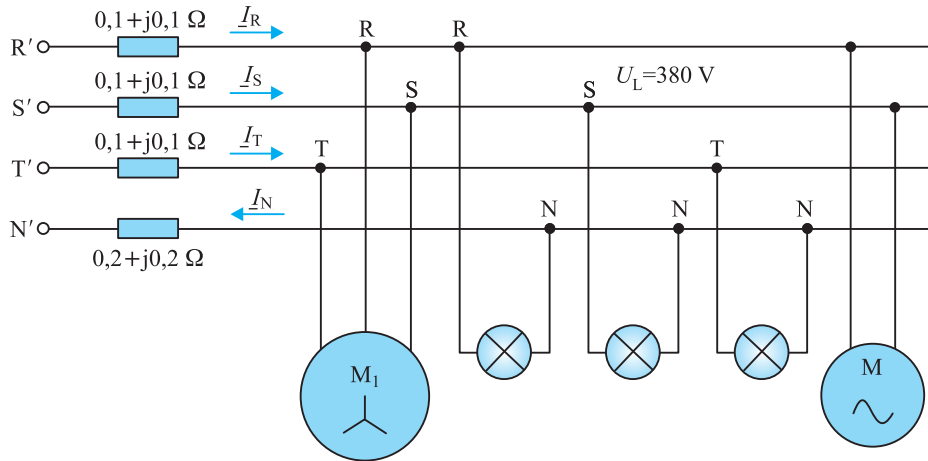


Figura P.3.19

3.40.

La red de la Figura P.3.20 está alimentada por un sistema simétrico y directo a principio de línea de 380 V de tensión compuesta. Las cargas representan un alumbrado incandescente, distribuido entre cada una de las fases y el neutro. Las resistencias equivalentes de las mismas son: 80Ω para la fase R, 60Ω para fase S, y 40Ω para la fase T. Las impedancias de las fases de la línea de alimentación es de $2 + j0 \Omega$ por hilo y $4 + j0 \Omega$ para el neutro. Calcular: a) tensión del neutro de las lámparas respecto al neutro de alimentación, es decir $\underline{U}_{NN'}$; b) corrientes $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, $\underline{I}_T$ e $\underline{I}_N$; c) tensiones a que están sometidas cada una de las fases de las lámparas, es decir: $\underline{U}_{R'N'}$, $\underline{U}_{S'N'}$, $\underline{U}_{T'N'}$. (Nota: Tómese como referencia de tensiones $\underline{U}_{RN}$).

[Res. a) $7,44 \angle 139,4^\circ$; b) $\underline{I}_R = 2,745 \angle -1,23^\circ$; $\underline{I}_S = 3,563 \angle -118,1^\circ$; $\underline{I}_T = 5,057 \angle 119,3^\circ$; $\underline{I}_N = 1,86 \angle 139,4^\circ$; c) $\underline{U}_{R'N'} = 219,6 \angle -1,23^\circ$; $\underline{U}_{S'N'} = 213,78 \angle -118,1^\circ$; $\underline{U}_{T'N'} = 202,28 \angle 119,3^\circ$; que corresponden a las tensiones compuestas a final de línea siguientes: $\underline{U}_{R'S'} = 369,28 \angle 29,86^\circ$; $\underline{U}_{S'T'} = 364,98 \angle -90,27^\circ$; $\underline{U}_{T'R'} = 366,43 \angle 150,38^\circ$]

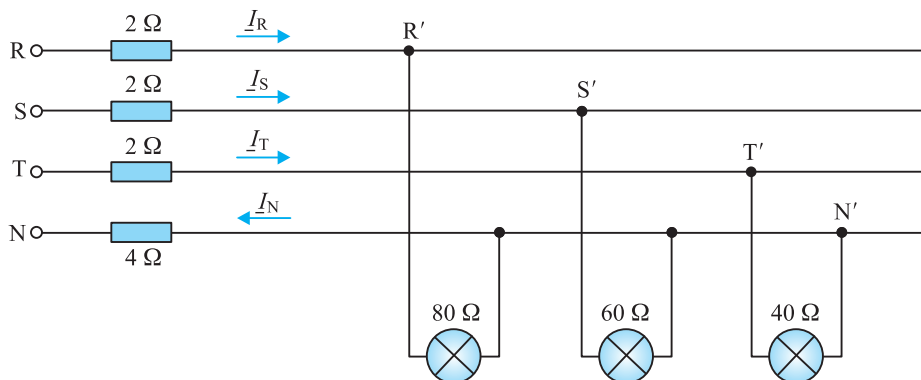


Figura P.3.20

- 3.41.** La instalación trifásica a tres hilos de la Figura P.3.21 tiene una tensión simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz, con la referencia de fases mostrada en la figura. La carga 1 es un sistema equilibrado conectado en triángulo de $9 + j12$ ohmios/fase a través de una línea trifásica de resistencia R ohmios por hilo. La carga 2 es trifásica desequilibrada. Inicialmente solo está cerrado el interruptor D_1 y el amperímetro A_1 señala 38,78 amperios. a) Calcular el valor de la resistencia R y las lecturas de los vatímetros P_1 y P_2 ; b) determinar en el caso anterior la potencia reactiva de una batería de condensadores conectados en estrella que eleven el f.d.p. de la carga 1 (incluida su línea) a 0,9 capacitivo y calcular también la capacidad por fase necesaria; c) se desconecta la carga 1 y también los condensadores y se cierran a continuación D_2 y D_3 ; en la carga desequilibrada 2 se sabe que se cumple: $R_C = |Z_a| = |Z_b|$ y que el f.d.p. de la carga Z_b es 0,5 inductivo; además se observa que la potencia reactiva total del sistema es cero y que al abrir el interruptor D_3 el vatímetro P_1 da una lectura $P_1 = -380$ W. Calcular la lectura del vatímetro P_2 en ese instante.

[Res. a) $R = 1 \Omega$; $P_1 = 14.234$ W; $P_2 = 3.814$ W; b) $Q_c = 26.784$ Var; $C = 590 \mu\text{F}$; c) $P_2 = 1.140$ W]

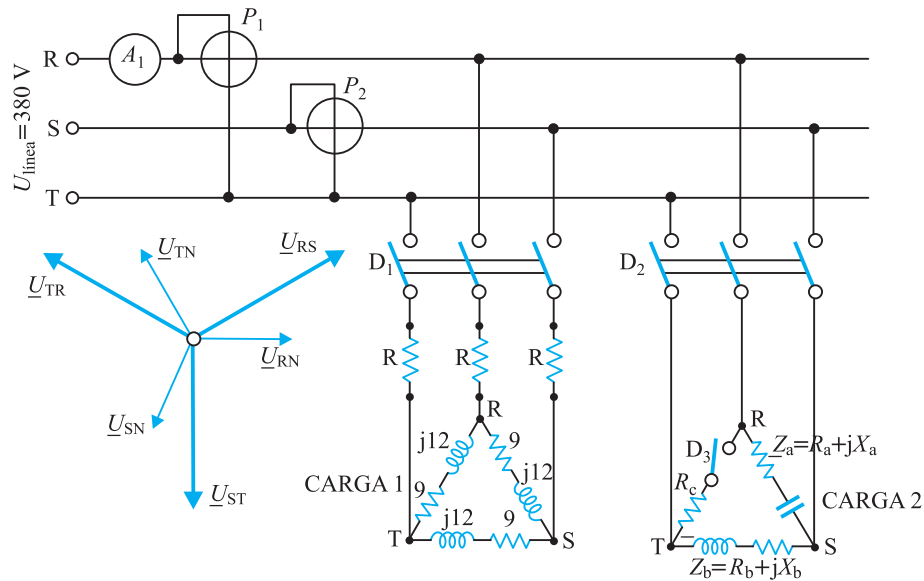


Figura P.3.21

- 3.42.** La instalación trifásica a tres hilos de la Figura P.3.22 tiene una tensión simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz, con la referencia de fases mostrada en la figura. La carga 1 es un sistema equilibrado conectado en triángulo de $12 + j9$ ohmios/fase que se conecta a la red a través de una línea trifásica de reactancia $j1$ ohmios por hilo. La carga 2 es una impedancia monofásica $Z_2 = 20 \angle 60^\circ$ ohmios y está conectada entre las fases R y S de la red. La carga 3 es trifásica desequilibrada. a) Inicialmente solo está cerrado el interruptor D_1 , calcular las lecturas de los voltímetros V_1 y V_2 . b) Estando D_1 cerrado se conecta la carga monofásica 2, calcular las lecturas P_1 y P_2 de los dos vatímetros. c) Se abren D_1 y D_2 a continuación se cierra D_3 y se observa que el amperímetro A_3 señala 23,55 A, calcular los dos valores posibles de la resistencia R que darían lugar a esta lectura.

[Res. a) $V_1 = 335,8$ V; $V_2 = 290$ V; b) $P_1 = 21.453$ W; $P_2 = 205$ W; c) $R = 5 \Omega$; $R = 12,32 \Omega$]

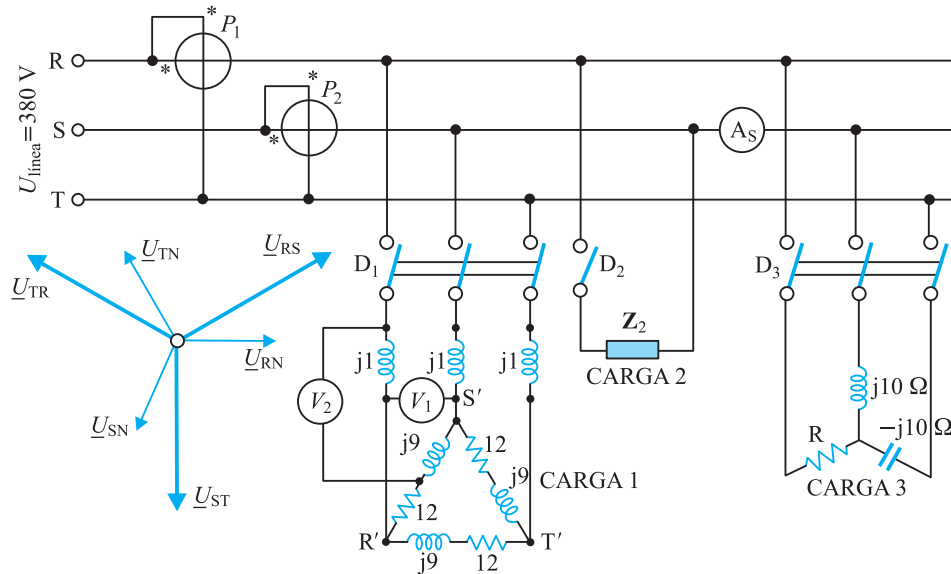


Figura P.3.22

- 3.43.** La instalación trifásica a tres hilos de la Figura P.3.23 tiene una tensión simétrica de secuencia positiva en el extremo receptor de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz, con la referencia de fases mostrada en la figura. La línea tiene una impedancia por hilo de valor $j0,1 \Omega$. La carga 1 es un motor trifásico conectado en triángulo con una impedancia $R_1 + jX_1$ ohmios/fase; la carga 2 es un motor monofásico conectado entre las fases S y T, que absorbe de la red una potencia activa de 7.220 W con f.d.p. 0,5 inductivo. La carga 3 es un conjunto desequilibrado con impedancias $Z_1 = 10 \Omega$; $Z_2 = -j10 \Omega$; $Z_3 = j10 \Omega$. a) Inicialmente se cierra el interruptor D_1 y se observan las siguientes medidas: $P_1 = 16.551 \text{ W}$; $A_1 = A_2 = A_3 = 43,87 \text{ A}$; calcular la impedancia por fase del motor $R_1 + jX_1 = Z \angle \varphi_1$ (tómese para φ_1 el valor mayor de los dos posibles). Calcular la lectura del vatímetro P_2 . b) Estando D_1 cerrado, se cierra a continuación D_2 , calcular la lectura del voltímetro V_1 conectado entre las fases R' y S' a principio de la línea. c) Se abren D_1 y D_2 , se cierra a continuación D_3 , calcular las lecturas de los amperímetros A_1 , A_2 y A_3 . (Nota: En todos los casos se supone constante la **tensión en el extremo receptor** de la instalación e igual a 380 V de línea).

[Res. a) $Z_1 = 12 + j9 \Omega$; $P_2 = 7.700 \text{ W}$; b) $V_1 = 384,7 \text{ V}$; c) $A_1 = 38 \text{ A}$; $A_2 = A_3 = 72,9 \text{ A}$]

- 3.44.** La instalación trifásica a tres hilos de la Figura P.3.24 tiene una tensión simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz, con la referencia de fases mostrada en la figura. La carga 1 es un motor trifásico conectado en estrella con una impedancia $R_1 + jX_1$ ohmios/fase y unido a la red de alimentación a través de una línea trifásica de resistencia 1 ohmio/fase; la carga 2 es trifásica equilibrada conectada en triángulo de $9 + j12$ ohmios/fase unida directamente a la red de alimentación. La carga 3 es un motor monofásico conectado entre las fases R y S, que absorbe de la red una potencia activa de 4.000 W con f.d.p. 0,8 inductivo. a) Inicialmente se cierra el interruptor D_1 y se observan las siguientes lecturas de los vatímetros: $P_1 = 5.694,1 \text{ W}$; $P_2 = 1.527,8 \text{ W}$; calcular la impedancia por fase del motor y la lectura del voltímetro V_1 . b) En el caso anterior determinar la potencia reactiva total de un banco de condensadores conectados en triángulo que eleven el f.d.p. de la instalación (carga 1 + línea) a 0,9 inductivo. Determinar asimismo la capacidad por fase de estos condensadores teniendo en cuenta que la red tiene una frecuencia de 50 Hz. c) Se abre el interruptor D_1 de la carga 1 y se quitan los condensadores de la pregunta anterior. A continuación se cierran los interruptores D_2 y

D₃. Calcular la lectura de los amperímetros A_1 , A_2 y A_3 . d) En el caso anterior calcular la lectura del vatímetro P_3 .

[Res. a) $\underline{Z}_1 = 9 + j10 \, \Omega$; $V_1 = 361,7 \, \text{V}$; b) $Q_C = 3.724,5 \, \text{VAR}$; $C = 27,3 \, \mu\text{F}$; c) $A_1 = 53,8 \, \text{A}$; $A_2 = 56,8 \, \text{A}$; $A_3 = 43,9 \, \text{A}$; d) $P_3 = 2.167,5 \, \text{W}$]

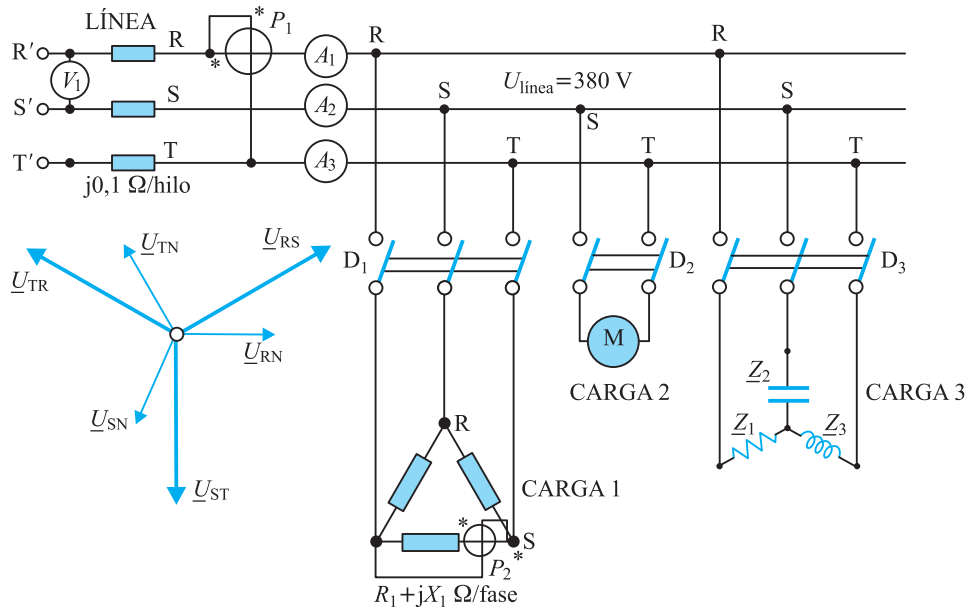


Figura P.3.23

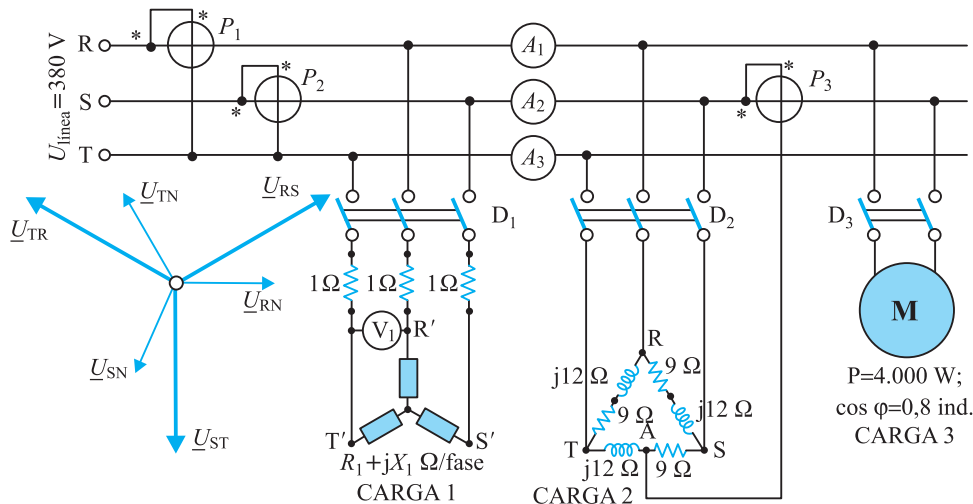


Figura P.3.24

3.45. La instalación trifásica a tres hilos de la Figura P.3.25 tiene una tensión simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz, con la referencia de fases mostrada en la Figura P.3.24. Inicialmente todos los interruptores están abiertos. La carga 1 es el circuito equivalente de un motor

trifásico conectado en estrella con una impedancia $R_1 + jX_1$ ohmios/fase y unido directamente a la red de alimentación. La carga 2 es una batería de condensadores conectados en triángulo de 8.078 VAR de potencia reactiva total. La carga 3 es el circuito equivalente de un motor trifásico conectado en triángulo unido a la red a través de una línea trifásica de impedancia $j1$ ohmio/fase. La carga 4 es un motor monofásico conectado entre las fases R y T que absorbe de la red una potencia eléctrica activa de 7.220 W y f.d.p. 0,5 inductivo. La carga 5 es trifásica desequilibrada y conectada en estrella y con su centro unido al neutro de la red a través del amperímetro A_2 . a) Se cierra el interruptor D_1 . Las lecturas de los vatímetros P_1 y P_2 son 9.490,4 W y 2.543 W respectivamente. Calcular la impedancia Z_1 de la carga 1. b) Se cierran D_1 y D_2 , calcular la corriente que señalará el amperímetro A_R conectado en la fase R de la red y el f.d.p. de la instalación (carga 1 + condensadores). c) Se abren D_1 y D_2 , se cierra D_3 ; las lecturas del vatímetro P_3 y el amperímetro A_1 (situado en una de las fases del triángulo) son 5.775,9 W y 25,33 A respectivamente. Calcular la impedancia de carga Z_3 y la tensión compuesta compleja $\underline{U}_{R'S'}$. d) Se cierran ahora solamente D_1 y D_4 , calcular la lectura del amperímetro A_R colocado al principio de la instalación en la fase R. e) Se abren todos los interruptores, se cierra D_5 ; las lecturas de los vatímetros son $P_1 = 8.337$ W y $P_2 = 14.440$ W. La corriente medida con el amperímetro A_2 es nula (es decir no hay corriente de retorno por el neutro). Calcular el valor en magnitud y fase de las impedancias $\underline{Z}_a = jX_a$; $\underline{Z}_b = R_b$ y $\underline{Z}_c = R_c + jX_c$.

[Res. a) $\underline{Z}_1 = 6 + j6 \Omega$; b) 19,25 A; f.d.p. = 0,95; c) $\underline{Z}_3 = 9 + j9 \Omega$; $V = 322,4$ V; d) 59,2 A; e) $\underline{Z}_a = j5 \Omega$; $\underline{Z}_b = 5 \Omega$; $\underline{Z}_c = 1,83 + j1,83 \Omega$]

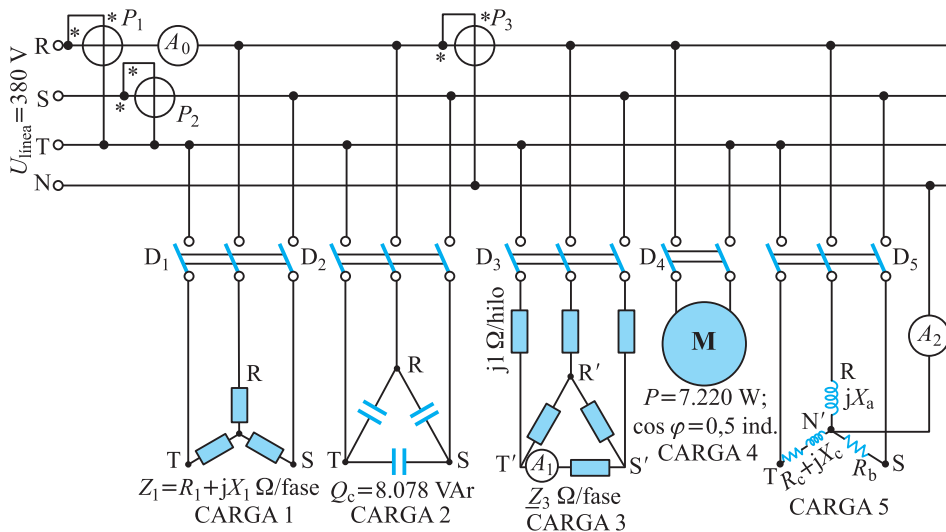


Figura P.3.25

3.46.

La instalación trifásica a cuatro hilos de la Figura P.3.26 está alimentada por una red simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz, con la referencia de fases mostrada en la figura. a) Se cierra el interruptor D_1 de la carga equilibrada 1, que es una carga equilibrada conectado en estrella de valor $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 \Omega/\text{fase}$ y se observa que los vatímetros colocados al principio de la instalación señalan los siguientes valores: $P_1 \approx 7.666,7$ W; $P_2 \approx 997,3$ W. Calcular el valor de la impedancia equivalente $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$ de la carga 1. b) Estando cerrado el interruptor D_1 se cierra el interruptor D_2 que da alimentación a una batería de condensadores puestos en triángulo con una capacidad de 60 $\mu\text{F}/\text{fase}$. Calcular la lectura del amperímetro A_R conectado a la fase R de la red y el f.d.p. resultante del conjunto (carga 1 + condensadores). c) Se abren D_1 y D_2 y se cierra el interruptor D_3 que alimenta una carga desequilibrada conectada en estrella con el centro de la misma unido al neutro

de la red. En esta situación las lecturas de los vatímetros son: $P_1 = 7.220 \text{ W}$; $P_2 = 7.220/\sqrt{3} \text{ W}$ y se observa que el amperímetro A_N conectado al neutro señala cero amperios. Calcular el valor, en módulo y fase de las impedancias $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ y $\underline{Z}_3$. d) Manteniendo cerrado el interruptor D_3 se cierra a continuación el interruptor D_4 que da alimentación a un motor monofásico que absorbe una potencia activa de la red de 2.000 W con f.d.p. $0,8$ inductivo y que está conectado entre las fases R y S ¿cuál será el valor de la lectura que señalará el amperímetro A_R ?

[Res. a) $\underline{Z}_1 = 6 + j8 \ \Omega$; b) $A_R = 14,13 \text{ A}$; f.d.p. = $0,931$ inductivo; c) $R_1 = 10 \ \Omega$; $X_2 = 10 \ \Omega$; $\underline{Z}_3 = 3,66 - j3,66 \ \Omega$; d) $A_R = 28,48 \text{ A}$]

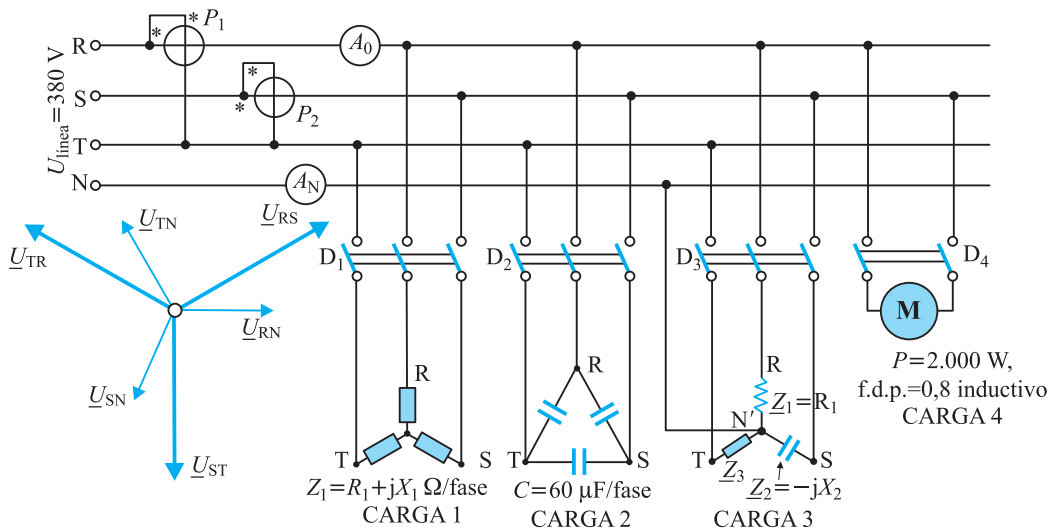


Figura P.3.26

3.47.

La instalación trifásica a tres hilos de la Figura P.3.27 está alimentada por una red simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz , con la referencia de fases mostrada en la figura. a) Se cierra el interruptor D_1 de la carga equilibrada 1, que está formada por seis impedancias $\underline{Z}_1$ iguales dispuestas como se señala en la figura y que frente a la red constituyen una carga trifásica equilibrada con un factor de potencia igual a $0,6$ inductivo, observándose que la corriente que señala el amperímetro A_{TR} es de 19 A . Calcular: a) potencias P_1 y P_2 que señalarán los vatímetros conectados a principio de la línea y valores de la tensión V_a y la impedancia compleja $\underline{Z}_1$; b) determinar en el caso anterior la potencia reactiva de una batería de condensadores puestos en estrella que eleven el f.d.p. de la carga 1 a $0,9$ inductivo y calcular el valor de la capacidad por fase correspondiente; c) se desconecta la carga 1 y también los condensadores. Se cierra el interruptor D_2 que alimenta la carga equilibrada que se muestra en la Figura P.3.27, y se observa que ambos vatímetros P_1 y P_2 indican las mismas lecturas, el amperímetro A_R conectado a la fase R de la red a la entrada de la instalación marca una corriente de $54,85 \text{ A}$ y el voltímetro V_c que mide la tensión del condensador unido a la fase R señala $164,55 \text{ voltios}$. Calcular la impedancia $R_2 + jX_2$ de la carga 2 y la lectura del voltímetro V_b ; d) si en el caso anterior se funde el fusible que protege la fase T de la red ¿cuál será la corriente que marcará el amperímetro A_R ?

[Res. a1) $P_1 = 11.500 \text{ W}$; $P_2 = 1.496 \text{ W}$; a2) $V_a = 164,54 \text{ V}$; b) $Q_C = 11.034 \text{ VAR}$; $C = 243 \ \mu\text{F}$; c) $\underline{Z}_2 = 12 + j9 \ \Omega$; $V_a = 475 \text{ V}$; d) $A_R = 47,5 \text{ A}$]

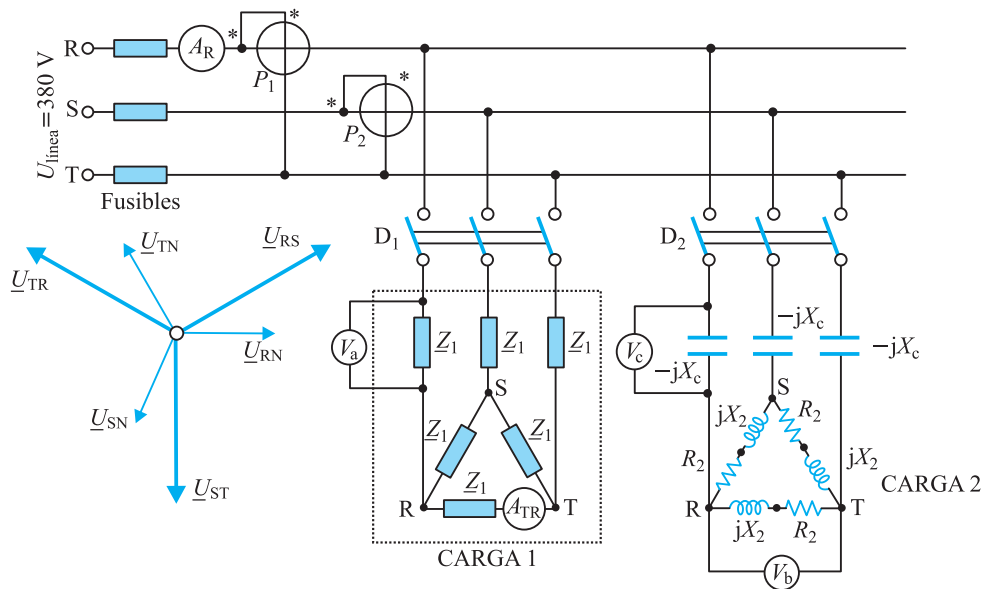


Figura P.3.27

3.48.

La instalación trifásica a cuatro hilos de la Figura P.3.28 tiene una tensión simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz, con la referencia de fases mostrada en la figura. La carga 1 es un motor trifásico equilibrado conectado en triángulo con una impedancia por fase $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$ ohmios. La carga 2 es un motor trifásico conectado en estrella con una impedancia equivalente de $\underline{Z}_2 = 40 + j30$ ohmios por fase. La carga 3 es monofásica y se conecta entre las fases T y R de la red, consumiendo una potencia activa de 3.000 W con f.d.p. 0,6 inductivo. La carga 4 es monofásica, se conecta entre la fase T y el neutro y es equivalente a una resistencia pura de 20 ohmios. Inicialmente todos los interruptores están abiertos. a) Se cierra solamente el interruptor D_1 de la

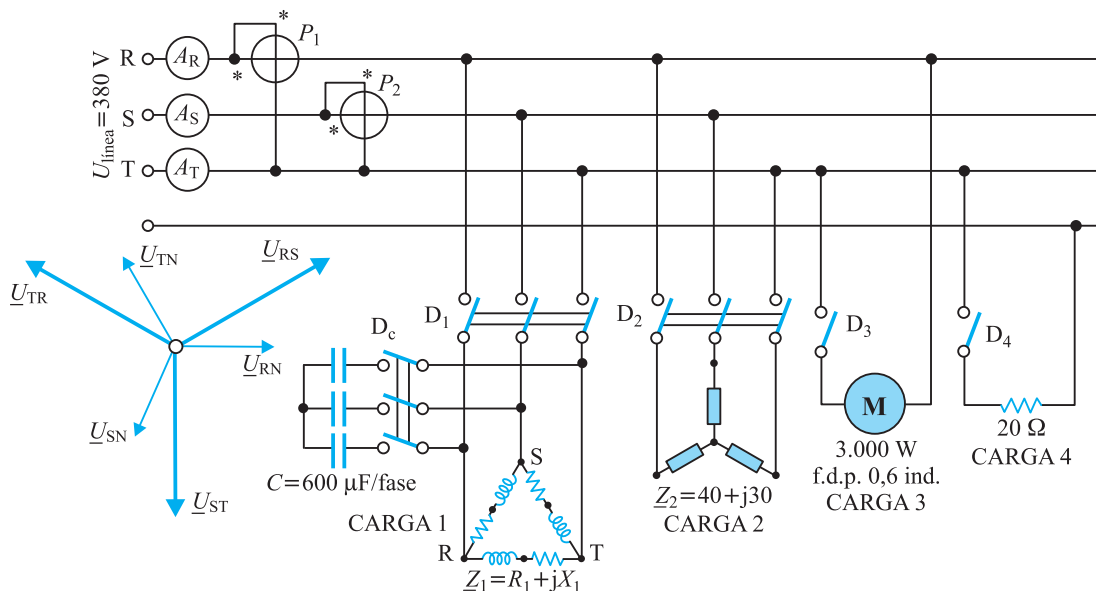


Figura P.3.28

carga trifásica 1 y se obtienen las siguientes lecturas de los vatímetros: $P_1 = 15.333,6 \text{ W}$; $P_2 = 1.994,5 \text{ W}$. Calcular la impedancia por fase equivalente del motor $\underline{Z}_1$. b) En la situación del apartado anterior (estando conectada la carga 1), se cierra el interruptor D_C que conecta a la red una batería de condensadores en estrella de $600 \mu\text{F/fase}$. Calcular las corrientes que señalarán los amperímetros instalados en las fases de entrada de la instalación y el f.d.p. del conjunto carga 1 más condensadores, ¿el f.d.p. total es inductivo o capacitivo? c) Se desconecta la carga trifásica 1 (es decir se abre el interruptor D_1 y se quitan los condensadores). Se cierran a continuación los interruptores D_2 , D_3 y D_4 (es decir se conectan las cargas 2, 3 y 4). Calcular las lecturas de los amperímetros instalados en las fases R, S y T de la red. d) En el caso anterior determinar las lecturas que señalarán los vatímetros P_1 y P_2 . ¿Por qué la suma $P_1 + P_2$ no es igual a la suma de las potencias consumidas por las cargas? Justificar la respuesta razonadamente.

[Res. a) $\underline{Z}_1 = 9 + j12 \Omega$; b) $27,1 \text{ A}$; $0,973$ capacitivo; c) $A_R = 16,5 \text{ A}$; $A_S = 4,4 \text{ A}$; $A_T = 27,7 \text{ A}$; d) $P_1 = 4.655 \text{ W}$; $P_2 = 655 \text{ W}$. Los vatímetros no detectan el consumo de la carga 4 conectada entre la fase T y neutro]

3.49.

La instalación trifásica a tres hilos de la Figura P.3.29 tiene una tensión simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz , con la referencia de fases mostrada en la figura. La carga 1 es un sistema equilibrado conectado en triángulo de $24 + j30$ ohmios/fase a través de una línea trifásica de resistencia 2 ohmios por hilo. La carga 2 es trifásica equilibrada conectada en estrella de impedancia $R_2 + jX_2$ ohmios por fase. La carga 3 es trifásica desequilibrada conectada en estrella con las impedancias por fase mostradas en dicha figura (obsérvese que la fase S está unida directamente con N'). a) Inicialmente se cierra el interruptor D_1 . Calcular la lectura del voltímetro V_1 . b) Estando cerrado D_1 se cierra a continuación D_2 dando lugar a las siguientes lecturas de los vatímetros: $P_1 \approx 13.361 \text{ W}$; $P_2 \approx 2.523 \text{ W}$. Calcular la impedancia por fase $R_2 + jX_2$ de la carga 2. c) Determinar en el caso anterior la potencia reactiva y capacidad por fase de una batería de condensadores conectados en estrella que eleven el f.d.p. de la instalación a la unidad. d) Se abren los interruptores D_1 y D_2 y se quitan los condensadores, se cierra a continuación el interruptor D_3 de la carga desequilibrada 3 y se observa que la lectura del amperímetro A_R es igual a $17,32 \text{ A}$ (exactamente $10\sqrt{3}$ amperios) y se comprueba además que la indicación del amperímetro A_T es doble que la de A_S , calcular las lecturas de A_S y A_T .

[Res. a) $V_1 = 242,3 \text{ V}$; b) $\underline{Z}_2 = 6 + j8 \Omega$; c) $Q_C = 18.770 \text{ VAR}$; $C = 413,7 \mu\text{F}$; d) $A_S = 10 \text{ A}$; $A_T = 20 \text{ A}$]

3.50.

La instalación trifásica a tres hilos de la Figura P.3.30 está alimentada por una red simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz , con la referencia de fases mostrada en la figura. Se cierra inicialmente el interruptor D_1 de la carga equilibrada 1, que está formada por seis impedancias $\underline{Z}_1$ iguales dispuestas como se señala en la figura y que frente a la red constituyen una carga trifásica equilibrada con un factor de potencia igual a $0,6$ inductivo, observándose que la corriente que señala el amperímetro A_1 (en una fase de la carga en triángulo) es de 19 A . a) Calcular los valores de la tensión del voltímetro V_1 , de la impedancia compleja $\underline{Z}_1$ y de las potencias P_1 y P_2 ; b) determinar en el caso anterior la potencia reactiva de una batería de condensadores puestos en estrella que eleven el f.d.p. de la carga 1 a $0,9$ inductivo y calcular el valor de la capacidad por fase correspondiente; c) se abre el interruptor D_1 y se desconectan los condensadores, se cierra a continuación solamente el interruptor D_2 que alimenta la carga equilibrada 2 y se observa que los dos vatímetros P_1 y P_2 señalan las mismas lecturas ($P_1 = P_2$), además el amperímetro A_R conectado a la fase R de la red marca una corriente de $5/\sqrt{3} \text{ A}$ y el voltímetro V_2 señala $285/\sqrt{3} \text{ V}$. Calcular la impedancia por fase

$R_2 + jX_2$ de la carga 2 y la lectura del voltímetro V_3 ; d) se abre el interruptor D_2 (D_1 sigue abierto y siguen desconectados los condensadores), se cierra a continuación el interruptor D_3 de la carga desequilibrada 3 en el que las reactancias de las bobinas son el doble que la correspondiente del condensador, se observa además que el amperímetro A_R señala una corriente de $10\sqrt{3}$ amperios. ¿Cuál es el valor de la reactancia X ?

[Res. a) $V_1 = 164,5$ V; $\underline{Z}_1 = 3 + j4$ Ω ; a2) $P_1 = 11.500$ W; $P_2 = 1.496$ W; b) $Q_C = 11.034$ VAR; $C = 243$ μ F; c) $\underline{Z}_2 = 228 + j171$ Ω ; $V_3 = 4.755$ V; d) $X = 19$ Ω]

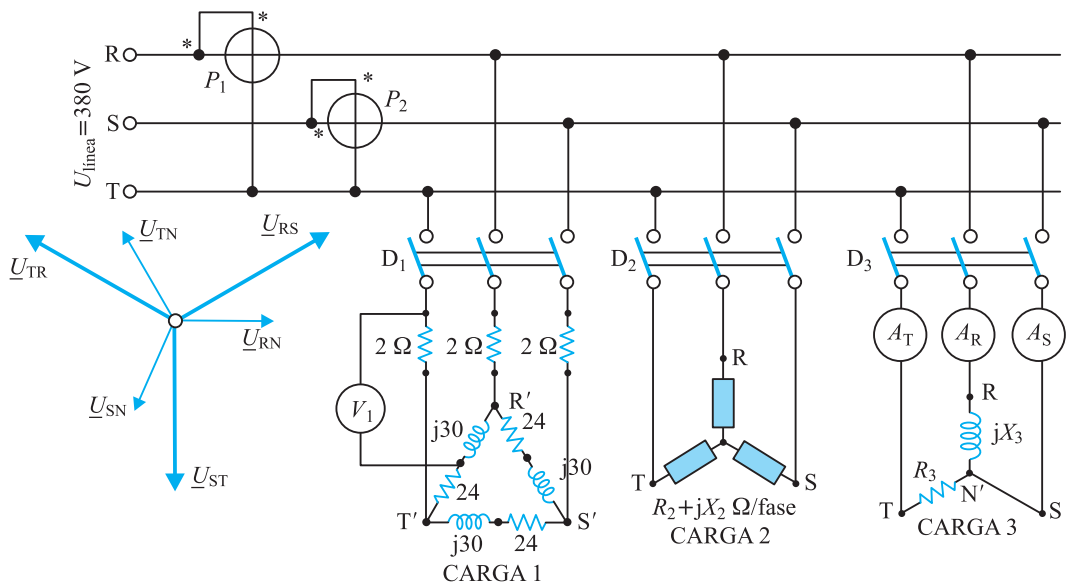


Figura P.3.29

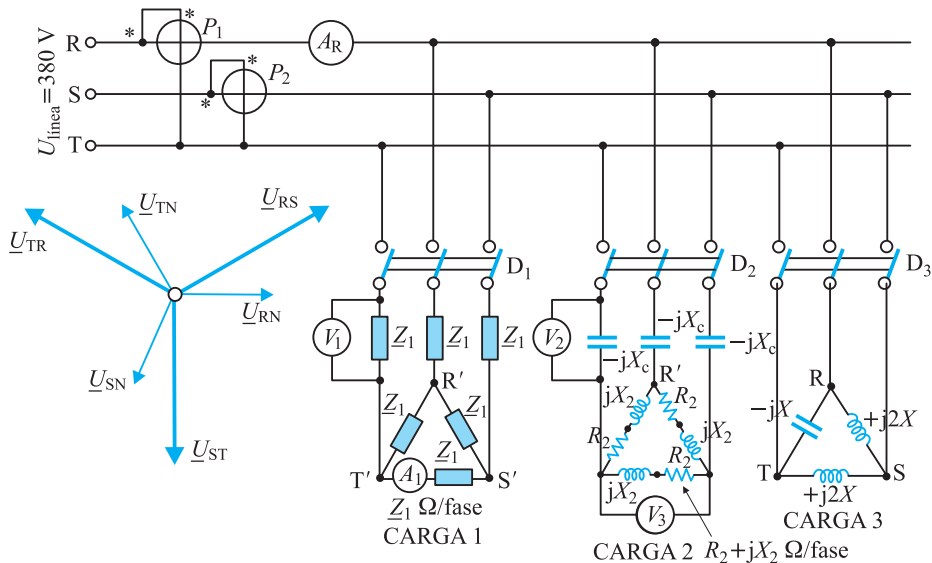


Figura P.3.30

- 3.51.** La instalación trifásica a cuatro hilos de la Figura P.3.31 se alimenta de una tensión simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz, con la referencia de fases mostrada en la figura. La carga 1 es trifásica equilibrada con la disposición de impedancias mostrada en la figura (es decir es una carga en estrella equilibrada de $\underline{Z}$ ohmios por fase que está en paralelo con una carga en triángulo de $\underline{Z}$ ohmios por fase). La carga 2 es desequilibrada con los valores de impedancia siguientes: $\underline{Z}_R = -j10$ ohmios, $\underline{Z}_S = R$ ohmios (resistencia pura); $\underline{Z}_T = +j10$ ohmios. a) Al cerrar el interruptor D_1 y conectar la carga 1 se obtienen unas lecturas de los vatímetros $P_1 = 15.333,6$ W; $P_2 = 1.994,5$ W. Calcular las lecturas que señalarán los amperímetros conectados a la entrada de la red y el valor complejo de las impedancias $\underline{Z}$ de la carga 1. b) En el caso anterior, calcular la potencia reactiva de unos condensadores conectados en triángulo a la red (ver línea de puntos en la Figura P.3.31) para elevar el f.d.p. de la carga 1 a la unidad. Determinar también la capacidad por fase de los condensadores anteriores. c) En el caso anterior, es decir con la carga 1 y los condensadores conectados ¿cuáles serán las lecturas de los amperímetros conectados a la entrada de la red? d) Se desconecta la carga 1 (se abre D_1) y se quita la batería de condensadores en triángulo. Se cierra ahora el interruptor D_2 ; en estas condiciones el voltímetro V_2 indica una lectura de 160,6 V. Calcular el valor de la resistencia R conectada a la fase S de la red (de los dos valores posibles, tómese el más elevado).

[Res. a) $A_R = A_S = A_T = 43,9$ A; $\underline{Z} = 12 + j16$ Ω ; b) $Q_C = 23.104$ VAR; $C = 170$ μ F; c) $A_R = A_S = A_T = 26,33$; d) $R = 10$ Ω]

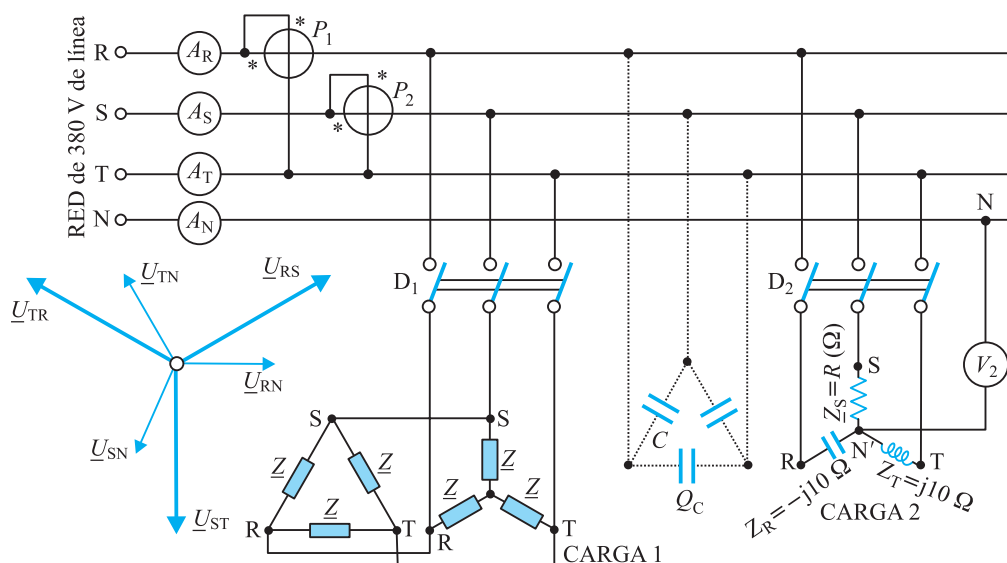


Figura P.3.31

- 3.52.** La instalación trifásica a tres hilos de la Figura P.3.32 tiene una tensión simétrica de secuencia positiva de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz, con la referencia de fases mostrada en la figura. La carga 1 es una combinación de dos cargas equilibradas: una conectada en estrella de $R = 4$ ohmios por fase y la otra conectada en triángulo de impedancia $12 + j24$ ohmios por fase. La carga 2 es una estrella equilibrada de impedancia $R_2 - jX_2$ ohmios por fase que está unida a la red por medio de una línea inductiva de $+jX_3$ ohmio por hilo. a) Inicialmente solamente está cerrado el interruptor D_1 de la carga trifásica equilibrada 1. Calcular la potencia activa, reactiva y aparente absorbida de la red y la lectura que señalará el voltímetro V_1 . b) Estando conectada la carga 1 como en el apartado anterior, se añade a la red una batería de condensadores en triángulo de 130 μ F por fase, determinar las lecturas de los

amperímetros señalados en la Figura P.3.32 (en definitiva se pide el módulo de la nueva corriente de línea) y el f.d.p. del conjunto de la instalación. c) Se desconecta la carga 1 (se abre D_1) y se quita la batería de condensadores en triángulo. Se cierra ahora el interruptor D_2 de la carga 2 y se observa que los dos vatímetros instalados al principio de la línea señalan la misma potencia $P_1 = P_2 = 8.022,22 \text{ W}$ y que el voltímetro V_2 marca una tensión de 400,56 voltios, calcular el valor de la reactancia de la línea jX_3 y de la impedancia $R_2 - jX_2$.

[Res. a) $P = 43.321 \text{ W}$; $Q = 14.436 \text{ VAR}$; $S = 45.663 \text{ VA}$; $V_1 = 210,6 \text{ V}$; b) 66 A ; $0,997$ capacitivo; c) $R = 9 \Omega$; $X_2 = X_3 = 3 \Omega$]

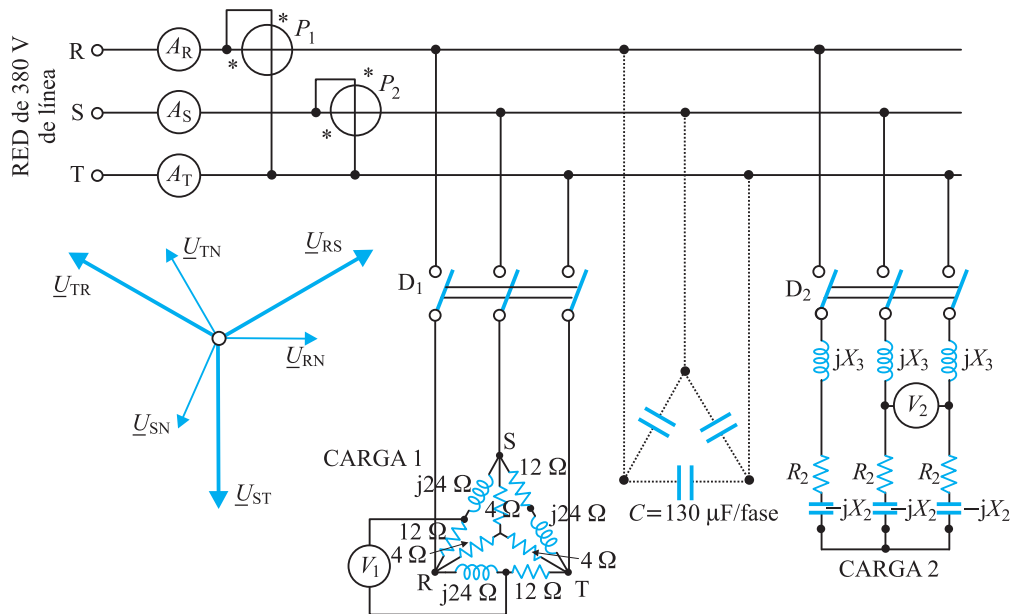


Figura P.3.32



Biografías

ARON, Hermann (1845-1913). Físico alemán. Estudió en las Universidades de Heidelberg y Berlín. Al finalizar sus estudios trabajó con el profesor Paalzow en la *Works Academy* de Berlín, un centro que fue el antecesor de la Escuela Técnica de Charlottenburgo. En 1876 le nombran *Privatdozent* en la Universidad de Berlín y desde 1880 obtuvo la plaza de catedrático de medidas eléctricas en la misma universidad. Trabajó fundamentalmente en el campo de la electrometría, desarrollando contadores eléctricos de tipo péndulo que fabricaba en una empresa de su propiedad con sede social en Charlottenburgo. Se debe a él, el sistema de medida de la potencia trifásica por medio de dos vatímetros y que por ello en algunos textos se conoce como conexión Aron (aunque el principio de conexión se deba al profesor francés André Blondel). Investigó en la teoría del micrófono, en acumuladores y electricidad atmosférica. En 1883 con motivo de la Exposición Eléctrica en Viena, presentó un sistema de transmisión de señales eléctricas sin hilos.

BOUCHEROT, Paul (1869-1943). Ingeniero y científico francés. Estudió en la Escuela de Física y Química de París (1885 a 1888). Trabajó en la Compañía de Ferrocarriles del Norte durante seis años siendo encargado de los servicios eléctricos. Desde 1897 fue gerente de diversas empresas dedicadas a la construcción de máquinas eléctricas. En 1898 se incorporó como profesor en la Escuela Superior de Electricidad de París (creada en 1894). Más tarde en 1907 sucedió a E. Hospitalier como profesor en la Escuela de Física y Química Industriales de París. Contribuyó con sus teorías al estudio de la c.a. y al desarrollo de redes de distribución. Estudió con rigor los motores en jaula de ardilla polifásicos desarrollando métodos de arranque. En 1898 ideó

motores polifásicos que denominó tipos: a, b y g, de hecho este último es el correspondiente a una doble jaula de ardilla. Otra invención de Boucherot es la referente a una excitatriz especial para el *compoundaje* de alternadores (1900). Inventó un tipo de alternador de alta frecuencia (1893) para la alimentación directa de antenas de radio. Alternadores con autoexcitación (1894) y turboalternadores con fugas magnéticas (1916) para limitar las corrientes de cortocircuito. Contribuyó con Blondel al estudio del acoplamiento de alternadores analizando el amortiguamiento de las oscilaciones pendulares de estas máquinas (1892). Expuso el principio de conservación de la potencia reactiva (1900) y su aplicación al cálculo de redes de c.a. Analizó los fenómenos transitorios en líneas largas (1922). Realizó con el físico Claude investigaciones sobre la energía térmica del mar (1926). Recibió grandes premios y condecoraciones: Academia de Ciencias de París, Exposición Universal de 1900, Caballero y Oficial de la Legión de Honor francesa.

EVANS, Robert David (1892-1947). Ingeniero americano. Recibió el Bachelor de Ciencias en 1914 en la Universidad de Oklahoma. Más tarde en 1926 se graduó en ingeniería eléctrica en la misma Universidad. En 1914 ingresó en la Compañía Westinghouse, donde fue asignado al Departamento de Ingeniería de Centrales Eléctricas. En 1931 era uno de los directores del Departamento de Líneas de Transporte. Evans escribió numerosos artículos técnicos en relación con la estabilidad de sistemas eléctricos de potencia. Coautor en 1933 con C. F. Wagner del famoso texto: *Symmetrical Components* (Componentes Simétricas) que fue adoptado como texto obligatorio sobre el tema en muchas universidades del mundo. Este texto fue una ampliación de una serie de diez artículos publicados por Wagner y Evans en la Revista *The Electric Journal* entre marzo de 1928 y noviembre de 1931. (El método de las componentes simétricas se debe a Charles L. Fortescue de la Compañía Westinghouse que publicó su famoso artículo: *Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks*, método de las coordenadas simétricas aplicado a la solución de redes polifásicas, publicado en el *Transactions del AIEE*, vol 37, Pt. II, páginas 1027 a 1140, tenía 25 páginas de discusión sobre el tema en la que colaboraron los seis ingenieros americanos más importantes de la época: J. Slepian, C. P. Steinmetz, V. Karapetoff, A. M. Dudley, Charles F. Scott y C. O. Mailloux). Colaboró en más de 40 libros o artículos técnicos en relación con el transporte de energía eléctrica. Se le acreditan más de 75 patentes en el campo de la Ingeniería Eléctrica.

JANET, Paul (1863-1937). Físico francés. Estudió en la Escuela Normal Superior. En 1886 fue nombrado profesor de Electrotecnia en Grenoble, pasando en 1894 a París como catedrático de la misma asignatura en la recién inaugurada Escuela Superior de Electricidad, (actual SUPELEC), donde enseñó toda su vida. Fue director del Laboratorio Central de Electrotecnia. En 1900 apareció la primera edición de su célebre texto: *Lecciones de Electrotecnia General*, obra de gran calidad pedagógica y que en sucesivas ediciones fue incorporando los progresos de esta ciencia, formando a multitud de ingenieros de toda Europa incluyendo a muchos profesores españoles. Le sucedió en la Cátedra Jean Fallou y más tarde François Cahen que adaptó la obra de Janet, en un texto de Electrotecnia compuesto de cuatro tomos, que ha servido de guía para las enseñanzas de esta materia en muchas Escuelas Técnicas Europeas, hasta fechas muy recientes.

JOULE, James Prescott (1818-1889). Físico inglés. Era hijo de un opulento cervecero. De joven gozó de poca salud, por lo que recibió una educación con profesores particulares; uno de sus maestros fue el gran químico inglés Dalton, padre de la química moderna. Comenzó muy joven realizando experimentos eléctricos, de hecho a los dieciocho años (en 1837) construyó una máquina electromagnética que describió en la revista: *Sturgeon's Annals of Electricity*. Dos años más tarde descubrió el hecho de que hay un valor límite para la magnetización de un trozo de hierro y determinó su valor numérico para diversos valores de la corriente de excitación. Fue un fanático en lo referente a las medidas. En 1840 había logrado obtener la fórmula que lleva su nombre, que determina la potencia disipada en una resistencia eléctrica. Después de muchos experimentos, en 1847 presentó una Memoria en la que calculaba el equivalente mecánico del calor. Las principales revistas científicas no quisieron publicar este trabajo; por lo que se vio obligado a dar una conferencia ante un público arisco; entre los asistentes estaba William Thomson, que a la sazón tenía veintitrés años, que elogió el trabajo y apoyó los resultados, lo que abrió a Joule las puertas del mundo científico y la amistad con el futuro Lord Kelvin. Aunque Joule reconoció el principio de conservación de la energía, el primero en presentarla en forma general y que llevó el honor de descubrirla fue el alemán Helmholtz. Premiado con la medalla de la Royal Society, denominada medalla Copley. Doctor Honoris Causa de las Universidades de Oxford y Edimburgo.

TESLA, Nikola (1856-1943). Ingeniero eléctrico croata-americano. Estudió matemáticas y física en Praga y la carrera de ingeniero eléctrico en Budapest (1881). En 1884 emigró a los Estados Unidos y trabajó en la central eléctrica que la compañía Edison había inaugurado dos años antes en Nueva York. En 1887 se estableció por su cuenta para poder llevar a cabo sus propias ideas; en este mismo año desarrolló los sistemas polifásicos, descubrió el campo giratorio, inventó el motor asíncrono y dio la solución al problema del transporte de energía eléctrica. Diseñó alternadores y transformadores trifásicos. Fue asesor de la Compañía Westinghouse y proyectó la central instalada en las cataratas del Niágara (1896). Trabajó en todos los campos de la Ingeniería Eléctrica: generadores, motores, transformadores, etc., desarrolló la alta tensión, construyó alternadores de alta frecuencia para la incipiente *telegrafía sin hilos* (radio). Realizó investigaciones sobre el uso de aceite como aislante, construcción de condensadores, etc.

VARLEY, Cromwell Flectwood (1828-1883). Físico inglés. En 1846 ingresó en la Compañía Inglesa de Telégrafos. Desarrolló métodos especiales para la localización de averías en cables (la famosa espira de Varley fue patentada en 1859). Cuando en 1847 se introdujo la gutapercha como elemento aislante de los cables demostró, junto con su hermano Alfred, en una línea

experimental de 10 millas, que el efecto capacitivo de los hilos obstaculizaría la transmisión de señales a gran distancia. Varley patentó un sistema con doble circuito para contrarrestar la carga estática. Tomó parte destacada en el tendido del primer cable telegráfico trasatlántico (los consultores fueron William Thomson que más tarde fue nombrado lord Kelvin, Fleeming Jenkin y Cromwell F. Varley). Preocupado por la exactitud de las medidas construyó resistencias y condensadores patrones y fue uno de los pioneros en el desarrollo de la electrometría. Colaboró con Latimer Clark para preparar un sistema racional de unidades eléctricas. En 1863 determinó el valor del ohmio. Para hacerse una idea de la confusión de unidades en aquella época, baste decir que la Revista *Telegraphic Journal* de 1864 daba una lista de 11 tipos diferentes de unidades de resistencia. La unidad Varley creada por él mismo, era equivalente a la resistencia de un hilo de cobre de 1/16 pulgadas de diámetro y 1 milla de longitud. Varley, intervino en 1881 en la Primera Conferencia Internacional de Electricidad de París en la que se prepararon las directrices para la unificación de las unidades eléctricas. Se le atribuyen gran cantidad de patentes relativas a la transmisión telegráfica. Escribió una gran variedad de artículos sobre el tema: medida de resistencias, localización de defectos en conductores telegráficos, velocidad de transmisión de señales en conductores, etc.

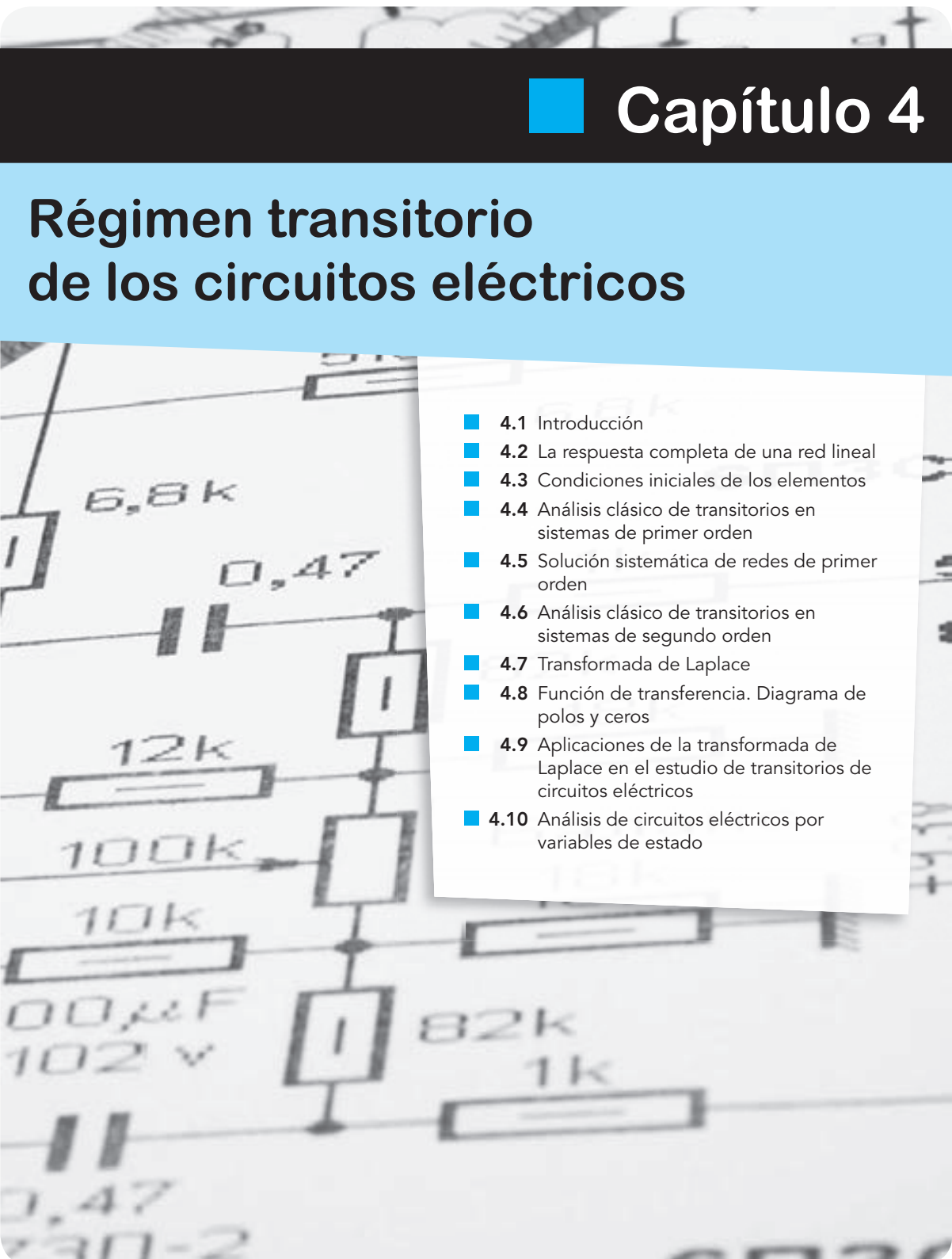
WAGNER, Charles Frederick (1895-1970). Ingeniero americano. Estudió en el *Carnegie Institute of Technology*. Se doctoró en 1940 con premio extraordinario en la Universidad de Illinois. Dos de sus primeros artículos técnicos publicados con su compañero Evans en la revista del AIEE y que se referían a la estabilidad de sistemas eléctricos de potencia, recibieron el Premio Montefiore. Realizó investigaciones sobre la aplicación de la teoría de las componentes simétricas en las redes eléctricas. Coeditor del famoso libro de la Compañía Westinghouse: *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*. Coautor en 1933 con R. D. Evans del famoso texto: *Symmetrical Components* (Componentes Simétricas) que fue adoptado como texto obligatorio sobre el tema en muchas universidades del mundo. Este texto fue una ampliación de una serie de diez artículos publicados por Wagner y Evans en la Revista *The Electric Journal* entre marzo de 1928 y noviembre de 1931. (El método de las componentes simétricas se debe a Charles L. Fortescue de la Compañía Westinghouse que publicó su famoso artículo: *Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks* (Método de las Coordenadas Simétricas Aplicado a la Solución de Redes Polifásicas), publicado en el *Transactions* del AIEE, vol 37, Pt. II, páginas 1027 a 1140, tenía 25 páginas de discusión sobre el tema en la que colaboraron los seis ingenieros americanos más importantes de la época: J. Slepian, C. P. Steinmetz, V. Karapetoff, A. M. Dudley, Charles F. Scott y C. O. Mailloux). Ganó la medalla Edison en 1951 por sus aportaciones en la aplicación de las componentes simétricas a la Ingeniería Eléctrica.



Referencias

- BLACKBURN, J. L.: *Symmetrical Components for Power Systems Engineering*. Marcel Dekker, New York, 1993.
- BLAJKINE, A.: *Electrotechnique Générale*. Ed. Mir, Moscú, 1977.
- BOYLESTAD, R. L.: *Introductory Circuit Analysis*, 4ª ed. Charles E. Merrill, Columbus, Ohio, 1982.
- BROSAN, G. S.; HAYDEN, J. T.: *Advanced Electrical Power and Machines*. Pitman, London, 1966.
- CAHEN, F.: *Electrotechnique. Tomo I. Circuits et Reseaux en Régime Permanent*. Gauthier Villard Editeur, París, 1962.
- COTTON, H.: *Advanced Electrical Technology*. Pitman, London 1967.
- COULON, F.; JUFER, M.: *Traité d'Electricité. Tome I. Introduction à l'électrotechnique*. Editions Georgi, Lausanne, 1981.
- DAGNEAUX, J.; LULLY, R. A.: *Electrotecnia. Tomo II, Teoría de la Corriente Alterna*. Ed. Dossat S.A., Madrid, 1962.
- DRAPER, A.: *Electrical Circuits (including machines)*, 2ª ed, Longman, London, 1972.
- DAWES, Ch. L.: *Tratado de Electricidad. Tomo 2, corriente alterna*. Ed. G. Gili, Barcelona 1966.
- HAYT, W. H. Jr; KEMMERLY, J. E.; DURBIN, S. M.: *Engineering Circuit Analysis, Sixth Edition*. McGraw-Hill Book Co., New York, 2002.
- KASATKIN, A.; PEREKALIN, M.: *Curso de Electrotecnia*. Ed. Cartago Buenos Aires, 1960.
- KERCHNER, R. M.; CORCORAN, G. F.: *Circuitos de Corriente Alterna*. CECSA, México, 1959.
- MINISTERIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA: *Reglamento Electrotécnico para Baja Tensión e Instrucciones ITC BT Complementarias*. Decreto 842/2002 de 2 de agosto (BOE nº 224 de 18-9-2002).
- M.I.T.: *Circuitos Eléctricos, «Staff» del Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.)*. CECSA, México, 1959.
- PARRA, V.; PÉREZ, A.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.: *Circuitos Eléctricos. Volumen I*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid, 2003.
- RAS, E.: *Teoría de Circuitos. Fundamentos*, 3ª ed. Marcombo, Boixareu Ed. Barcelona, 1977.

- RIMINI, C.: *Elementos de Electrotecnia General, Tomo 2*. Distribuidora Gustavo Gili de México S.A., México DF, 1955.
- SHENKMAN, A.: *Circuit Analysis for Power Engineering Handbook*. Kluwer Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1998.
- SHEPHERD, J.; MORTON, A. H.; SPENCE, L. F.: *Higher Electrical Engineering*. Pitman Pub, London, 1970.
- STARR, A. T.: *A New Theorem for Active Networks*. Journal of IEE, September 1933, pp. 303-308.
- UNE 20460-5-54:1990: *Instalaciones eléctricas en edificios. Parte 5: Elección e instalación de los materiales eléctricos. Capítulo 54: Puesta a tierra y conductores de protección*. AENOR.
- UNE 21621-2:1996: *Instalaciones eléctricas para obras al exterior sometidas a condiciones severas (incluidas minas a cielo abierto y canteras). Parte 2: Prescripciones generales de protección*. AENOR.
- WAGNER, C. F.; EVANS, R.D.: *Symmetrical Components*. McGraw-Hill Book, New York, 1933.
- WILDI, T.: *Tecnología de los Sistemas Eléctricos de Potencia*. Ed. Hispano-Europea, Barcelona, 1983.
- ZEVEKE, G.; IONKIN, P.: *Analysis of Electric Circuits*. Mir Publisher, Moscú, 1973.



Capítulo 4

Régimen transitorio de los circuitos eléctricos

- 4.1 Introducción
- 4.2 La respuesta completa de una red lineal
- 4.3 Condiciones iniciales de los elementos
- 4.4 Análisis clásico de transitorios en sistemas de primer orden
- 4.5 Solución sistemática de redes de primer orden
- 4.6 Análisis clásico de transitorios en sistemas de segundo orden
- 4.7 Transformada de Laplace
- 4.8 Función de transferencia. Diagrama de polos y ceros
- 4.9 Aplicaciones de la transformada de Laplace en el estudio de transitorios de circuitos eléctricos
- 4.10 Análisis de circuitos eléctricos por variables de estado

■ 4.1. Introducción

En las lecciones anteriores se han estudiado con detalle los circuitos eléctricos trabajando en régimen permanente, en los que se incluían generadores tanto de c.c. (Capítulo 1) como de c.a. (Capítulo 2). Antes de que un circuito (o máquina) pueda llegar a una situación **estacionaria** o de **régimen permanente** de funcionamiento (que sea diferente de algún estado anterior), el circuito pasa por un periodo de transición, durante el cual, las tensiones y corrientes varían en función del tiempo, hasta llegar finalmente a la condición de equilibrio (estado estacionario) impuesta por los parámetros de la red. El periodo de tiempo requerido para que las tensiones y corrientes alcancen el estado final estacionario, se denomina **periodo transitorio**. Durante este tiempo, las expresiones matemáticas de las tensiones y corrientes en las diversas partes de la red contienen ciertos términos distintos de las componentes estacionarias estudiadas en los capítulos anteriores. Estas componentes constituyen los términos propios, naturales o libres y son, por lo general, de corta duración, siendo amortiguados por ciertos factores exponenciales decrecientes, cuyos valores dependen de los parámetros del circuito.

En general cualquier operación de conexión, o desconexión, inducción o conmutación dentro de un circuito, hará que existan fenómenos transitorios en la red. Aunque los fenómenos transitorios son generalmente de corta duración, es precisamente en estos periodos de tiempo en los que se presentan los problemas más serios y complicados de funcionamiento de un circuito o en particular de una máquina eléctrica.

En este capítulo se van a estudiar los circuitos eléctricos en régimen transitorio. Primeramente el análisis se realiza por el denominado **método clásico**, es decir resolviendo las ecuaciones integro-diferenciales (en definitiva diferenciales), que resultan al aplicar los lemas de Kirchhoff al circuito y determinando las constantes de integración que resultan, conociendo las condiciones iniciales de la red. Este método es fácil de aplicar a circuitos simples, representados a lo sumo por una ecuación diferencial de segundo orden, pero resulta complicada y tediosa su aplicación en circuitos de mayor orden por la dificultad en determinar correctamente las condiciones iniciales de la red. En el capítulo se estudian por este procedimiento las redes de primer orden y de segundo orden, en las que se incluyen conceptos y terminologías de gran interés en el análisis transitorio. Se define después el concepto de **transformada de Laplace** que constituye la base del método moderno de cálculo de transitorios en circuitos eléctricos. Este procedimiento consiste en transformar las funciones y operaciones temporales en otras funciones que dependen de una frecuencia compleja generalizada $s = \sigma + j\omega$; el método es muy sistemático y potente, ya que permite resolver las ecuaciones diferenciales de un circuito de un modo simple, pues transforma las ecuaciones diferenciales lineales de una red, en ecuaciones algebraicas función de la frecuencia compleja s , con la gran ventaja de que las condiciones iniciales del circuito quedan incorporadas de un modo automático. Para no desviar la atención del lector en el estudio de este capítulo, en el Apéndice 2 del texto se hace un repaso de las propiedades de la transformada de Laplace, el cálculo de transformadas de excitaciones básicas que tienen interés en teoría de circuitos y la determinación de transformadas inversas o antitransformadas. A continuación se presenta el concepto de función de transferencia, (que en los circuitos eléctricos se denominan funciones de red) y se señala la construcción geométrica de los diagramas de polos y ceros de las mismas, para demostrar que con este diagrama se puede prever con antelación la respuesta de una red.

Posteriormente se aplican las propiedades de la transformada de Laplace al estudio de transitorios en redes eléctricas; iniciando la exposición, con la respuesta de los elementos pasivos simples en el dominio s de Laplace, definiendo los conceptos de impedancia y admitancia operacionales y las reglas de transformación que deben seguirse para pasar del dominio del tiempo al dominio s . Se desarrollan luego diversos ejemplos de aplicación para comprobar la ventaja del método operacional de Laplace frente a los métodos clásicos. El capítulo finaliza con una introducción al análisis de circuitos mediante variables de estado.

■ 4.2. La respuesta completa de una red lineal

Al aplicar los lemas de Kirchhoff a circuitos eléctricos simples (serie o paralelo), se obtienen unas ecuaciones integro-diferenciales de orden 1 o 2. Las ecuaciones de primer orden responden a la forma general:

$$a \frac{df}{dt} + bf = g(t) \quad (4.1)$$

que corresponde a la expresión normalizada siguiente:

$$\frac{df}{dt} + \frac{f}{\tau} = g(t) \quad (4.2)$$

las ecuaciones de segundo orden son de la forma:

$$a \frac{d^2 f}{dt^2} + b \frac{df}{dt} + cf = g(t) \quad (4.3)$$

donde $f = f(t)$ puede representar una tensión, una corriente o una carga; $g(t)$ es la tensión o corriente de excitación de la red (generadores); a , b , c y τ son coeficientes constantes y t es el tiempo. Las ecuaciones diferenciales anteriores reciben también el calificativo de **lineales**, debido a que los coeficientes que aparecen en cada término son parámetros constantes y no son función de la variable dependiente $f(t)$.

En circuitos más complejos que estén formados por más mallas y nudos, la aplicación de los lemas de Kirchhoff da lugar a una serie de ecuaciones integro-diferenciales, en las que, cada variable dependiente (corriente de malla o tensión de nudo) responde a una ecuación diferencial lineal de un orden que en general es superior a dos, de la forma:

$$a_n \frac{d^n f}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df}{dt} + a_0 f = G(t) \quad (4.4)$$

donde $G(t)$ es en general una función lineal de $g(t)$ y sus derivadas.

Como el lector recordará de un curso de Análisis Matemático, la **solución completa** de una ecuación diferencial lineal (con coeficientes constantes) se compone de dos términos: el primero de ellos se obtiene resolviendo la homogénea de la ecuación diferencial, es decir es la **solución general** de la ecuación diferencial cuando $g(t)$ o $G(t)$ se hace igual a cero, o

de otro modo cuando se anula la función de excitación del circuito. Esta solución $f_n(t)$ se conoce en Ingeniería Eléctrica como **respuesta natural, propia** y también **libre** del circuito; físicamente, representa la respuesta del circuito cuando se anulan los generadores existentes en el mismo y donde se consideran únicamente como fuentes, las debidas a las energías almacenadas en los elementos reactivos de la red, es decir las inductancias y condensadores, como consecuencia de una alimentación previa de los mismos. La respuesta natural recibe este nombre porque es así como responde el circuito naturalmente, libremente, sin estar forzado. El sistema se comporta de este modo debido a su propia estructura o configuración, ya que no hay fuentes conectadas que lo exciten.

El otro término que se incluye en la solución de la ecuación diferencial depende del tipo de excitación del circuito y corresponde a la **solución particular** $f_p(t)$ de la ecuación diferencial, se conoce con el nombre de **respuesta forzada** del circuito ya que depende de la forma particular de la fuente (o fuentes) de excitación. En definitiva la solución completa de una ecuación diferencial lineal como la (4.4) es de la forma:

$$f(t) = f_n(t) + f_p(t) \quad (4.5)$$

La respuesta natural del circuito $f_n(t)$ contiene las constantes de integración de la ecuación diferencial correspondiente. En circuitos pasivos que contengan resistencias, esta respuesta debe ser necesariamente amortiguada, viniendo caracterizada por términos exponenciales decrecientes. Al cabo de un cierto tiempo, estos términos pueden considerarse despreciables, quedando como única respuesta, la solución particular $f_p(t)$; en este caso se dice que el circuito funciona o ha llegado al **régimen permanente**. Mientras que la respuesta natural no sea despreciable, se dice que el circuito funciona en **régimen transitorio**. La respuesta forzada del circuito $f_p(t)$ no contiene constantes de integración arbitrarias ya que están definidas por la excitación correspondiente.

Para determinar las constantes de integración de la respuesta compuesta, que están presentes en la respuesta natural, es preciso conocer el estado del circuito en algún instante de tiempo. En la práctica este instante corresponde al momento en el que se produce la conexión (o desconexión en su caso) de los interruptores del circuito. Por conveniencia matemática se considera, casi siempre, que la conmutación (conexión o desconexión) se produce en el tiempo $t = 0$, de tal modo que el tiempo inmediatamente anterior se define por $t = 0^-$ y el tiempo inmediatamente posterior a la conmutación se señala por $t = 0^+$. El estado previo del circuito anterior a la conmutación (en $t = 0^-$) se define generalmente por el conocimiento de la tensión en bornes de los elementos capacitivos y la corriente en los elementos inductivos. Estas condiciones de contorno definidas en $t = 0^-$ se denominan **condiciones iniciales**. Sin embargo, hay que tener en cuenta que para evaluar las constantes de integración deben conocerse los valores inmediatamente después de que se haya producido la conmutación, puesto que se pretende analizar el comportamiento del circuito a partir de ese instante. En muchos casos el problema es indiferente, ya que las variables tensión y corriente son funciones continuas en $t = 0$ (es decir $f(0^-) = f(0^+)$), pero existen situaciones con excitaciones tipo impulso en el que las variables no tienen el mismo valor en $t = 0^-$ y $t = 0^+$, por lo que es preciso determinar con sumo cuidado las magnitudes de las tensiones y corrientes en $t = 0^+$ necesarias para la evaluación de las constantes iniciales partiendo del conocimiento de sus valores en $t = 0^-$. Esta determinación requiere un conocimiento claro del comportamiento de los elementos pasivos simples, en el instante de la conmutación y se analizan con detalle en el epígrafe siguiente.

■ 4.3. Condiciones iniciales de los elementos

Las condiciones iniciales de una red dependen de las energías almacenadas en los elementos reactivos en $t = 0^-$, y la estructura topológica de la misma en $t = 0^+$ después de la conmutación. Lo que haya pasado antes se manifestará en los valores que tengan las tensiones en los condensadores y las corrientes en las bobinas. Los detalles de este proceso no tienen importancia y lo único que interesa es conocer los valores en $t = 0^-$. Una vez realizada la conmutación en $t = 0^+$, pueden aparecer nuevas tensiones y corrientes en la red, como resultado de los valores iniciales anteriores y debido a las fuentes que ahora se introducen. La evaluación de las tensiones y corrientes en $t = 0^+$, permitirá determinar las constantes de integración que aparecen en la respuesta completa de la red para $t > 0$. Vamos a ver a continuación el comportamiento de los elementos pasivos simples en el momento de la conmutación.

■ 4.3.1. Resistencia

En una resistencia, la relación entre la tensión y la corriente viene definida por la ley de Ohm:

$$u(t) = Ri(t) \quad (4.6)$$

según la ecuación anterior, existe proporcionalidad directa entre la tensión y la corriente en una resistencia, lo que equivale a decir que la corriente sigue los cambios (forma) que imponga la tensión; si esta cambia instantáneamente, la corriente también cambiará de un modo instantáneo con una magnitud $1/R$ de la tensión.

■ 4.3.2. Inductancia

En una inductancia, la relación entre la tensión y la corriente es de la forma:

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (4.7)$$

de la ecuación anterior se deduce que **la corriente en una bobina no puede variar bruscamente**, ya que la tensión debería hacerse infinita, lo cual no tiene sentido físico.

Se puede comprobar la afirmación anterior con un poco más detalle matemático, deduciendo a partir de (4.7) la corriente $i_L(t)$ para un tiempo genérico t :

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t) dt \quad (4.8)$$

que puede desarrollarse en los dos sumandos siguientes:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0^-} u(t) dt + \frac{1}{L} \int_{0^-}^t u(t) dt \quad (4.9)$$

el primer sumando representa el valor de la corriente en $t = 0^-$. Si la conmutación se realiza en $t = 0$ y se desea calcular la corriente en el instante $t = 0^+$, se cumple:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} u(t) dt \quad (4.10)$$

exceptuando la situación teórica de que la tensión aplicada sea un impulso de Dirac¹, la integral de (4.10) será siempre igual a cero, de donde se deduce que:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) \quad (4.11)$$

que representa la continuidad física de la corriente en una bobina en el momento de la conmutación. De la ecuación anterior se deduce *que para el cálculo de los valores iniciales en un circuito, una bobina cargada se puede sustituir por una fuente ideal de corriente de valor $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. Si la bobina está descargada, es decir si $i_L(0^-) = 0$, entonces se comporta inicialmente como un circuito abierto, $i_L(0^+) = 0$, independientemente de cuál sea la tensión en sus terminales.*

Otras conclusiones que pueden deducirse de (4.7) es el comportamiento de una bobina cuando las excitaciones del circuito (generadores) son de corriente continua. En este caso, cuando se ha alcanzado el régimen permanente ($t = \infty$), la corriente en la bobina tendrá un valor constante independiente del tiempo, por lo que según (4.7) la derivada será igual a cero, lo que significa que *con corriente continua, en régimen permanente, una bobina se comporta como un cortocircuito.*

■ 4.3.3. Capacidad

En un condensador, la relación entre la tensión y la corriente viene expresada por:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (4.12)$$

o de un modo equivalente:

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad (4.13)$$

de la ecuación anterior se deduce que la **tensión en un condensador no puede variar bruscamente**, ya que la corriente debería hacerse infinita, lo cual no tiene sentido físico. La afirmación anterior se puede justificar con más detalle a partir de (4.12):

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^-} i(t) dt + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i(t) dt \quad (4.14)$$

¹ En el Apéndice 2 se estudia la función impulso o delta de Dirac $\delta(t)$ que es una señal de amplitud infinita y tiempo de duración nulo, que además cumple la siguiente normalización:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

es una *señal ideal* que tiene propiedades interesantes en Automática, Teoría de la Señal, Análisis Dinámico, y otras, es por ello que si se aplicara a una bobina una señal de tensión en forma de impulso de Dirac, la integral de (4.10) no sería cero.

la primera integral del último miembro de la ecuación anterior representa la tensión en el condensador en $t = 0^-$, es decir $u_C(0^-)$. Si la conmutación del condensador se produce en $t = 0$, el valor de la tensión del condensador en $t = 0^+$, será igual de acuerdo con (4.14) a:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i(t) dt \quad (4.15)$$

que para corrientes que no sean tipo impulso de Dirac conduce a la igualdad siguiente:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) \quad (4.16)$$

que representa la continuidad de la tensión en un condensador en el momento de la conmutación. De (4.16) se deduce entonces que *para el cálculo de los valores iniciales en un circuito, un condensador cargado se puede sustituir por una fuente ideal de tensión de valor $u_C(0^+) = u_C(0^-)$. Si el condensador está descargado, es decir si $u_C(0^-) = 0$, entonces se comporta como un cortocircuito $u_C(0^+) = 0$, sea cual sea la corriente que circula por el mismo.*

Por otro lado, si se considera un condensador en un circuito de corriente continua, cuando se ha alcanzado el régimen permanente ($t = \infty$), la tensión en bornes del condensador tendrá un valor constante, independiente del tiempo, por lo que según (4.13) la derivada será igual a cero, lo que significa que *con corriente continua, en régimen permanente, un condensador se comporta como un circuito abierto*. En la Figura 4.1 se resumen las conclusiones anteriores. Se han representado los circuitos equivalentes de los elementos pasivos simples en las condiciones iniciales, en situación de cargado o descargado y los circuitos equivalentes finales cuando los generadores de la red son de corriente continua.

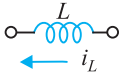
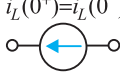
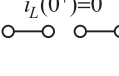
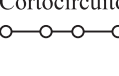
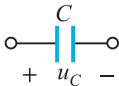
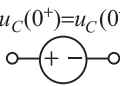
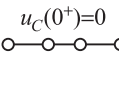
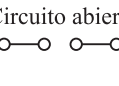
ELEMENTO	Circuito equivalente inicial ($t=0^+$)		Circuito equivalente final (solo con c.c.) $t = \infty$
	CARGADO	DESCARGADO	
			
	$i_L(0^+) = i_L(0^-)$ 	$i_L(0^+) = 0$ 	Cortocircuito 
	$u_C(0^+) = u_C(0^-)$ 	$u_C(0^+) = 0$ 	Circuito abierto 

Figura 4.1 Circuitos equivalentes de los elementos pasivos en $t = 0^+$ y $t = \infty$

De este modo, cuando se desean determinar las condiciones iniciales en una red deben seguirse los siguientes pasos:

- Sustituir todos los generadores de tensión del circuito $u_g(t)$ por fuentes de tensión continua de valor $u_g(0^+)$.
- Sustituir todos los generadores de corriente del circuito $i_g(t)$ por fuentes de corriente continua de valor $i_g(0^+)$.

- c) Sustituir todas las bobinas cargadas por generadores de corriente de valor $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. Si la corriente inicial en la bobina es cero $i_L(0^-) = 0$, sustituir por un circuito abierto.
- d) Sustituir todos los condensadores cargados, por generadores de tensión de valor $u_C(0^+) = u_C(0^-)$. Si la tensión inicial en un condensador es cero $u_C(0^-) = 0$, sustituir por un cortocircuito.
- e) En la red **resistiva** resultante, calcular las corrientes y tensiones iniciales necesarias para el estudio subsiguiente de la red.

Adicional: Si se desean determinar las condiciones iniciales para las derivadas (por ejemplo $i'(0^+)$, $u'(0^+)$), se escribirán las ecuaciones de la red aplicando el primer lema o segundo lema de Kirchhoff según se necesite, para $t > 0$. A continuación se deben calcular las derivadas de las variables para el instante $t = 0^+$. (Las condiciones iniciales para las derivadas se requieren para el estudio de redes de orden superior a 1).

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.1

En la red de la Figura 4.2, la corriente del generador de intensidad es $i_g = 10e^{-2t}$. El interruptor se abre en $t = 0$, siendo los valores iniciales: $i_L(0^-) = 0$; $u_C(0^-) = -5$ V. Calcular: a) $i_R(0^+)$, $i_C(0^+)$, $u_L(0^+)$; b) $u'_C(0^+)$, $i'_L(0^+)$; c) $u''_C(0^+)$.

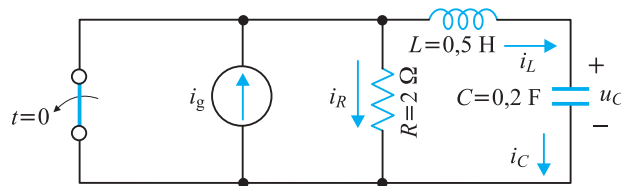


Figura 4.2 Ejemplo de aplicación 4.1

Solución

a) El circuito correspondiente en el instante $t = 0^+$ (válido únicamente para este instante) es el mostrado en la Figura 4.3. Teniendo en cuenta los valores iniciales previos a la apertura del interruptor que señala el enunciado, la bobina se ha sustituido por un circuito abierto, ya que $i_L(0^-) = 0$ y el condensador se ha sustituido por un generador de tensión $u_C(0^-) = -5$ V (obsérvese la polaridad del generador en la Figura 4.3). Además se ha tomado la corriente del generador de intensidad $i_g(0^+) = [10e^{-2t}]_{t=0} = 10$ A.

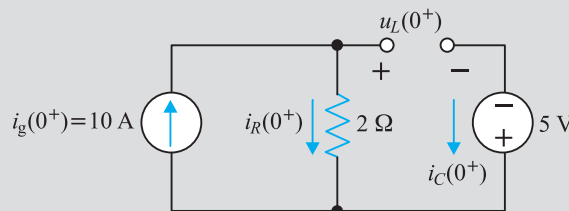


Figura 4.3 Circuito equivalente en $t = 0^+$ de la red de la Figura 4.2

Del circuito de la Figura 4.3 se deduce de un modo inmediato:

$$i_R(0^+) = 10 \text{ A} \quad ; \quad i_C(0^+) = 0$$

Para calcular el valor de $u_L(0^+)$, aplicamos el segundo lema de Kirchhoff a la malla de la derecha:

$$u_L(0^+) - 5 - 2i_R(0^+) = 0$$

de donde se deduce:

$$u_L(0^+) = 5 + 2 \cdot 10 = 25 \text{ V}$$

b) Para calcular las condiciones iniciales de las derivadas, es preciso representar el circuito para $t > 0$. En la Figura 4.4 se muestra la red correspondiente. En esta red se cumple:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = i_L(t)$$

y en consecuencia en $t = 0^+$ resulta:

$$\left[C \frac{du_C(t)}{dt} \right]_{t=0^+} = Cu'_C(0^+) = i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

y por lo tanto:

$$u'_C(0^+) = 0$$

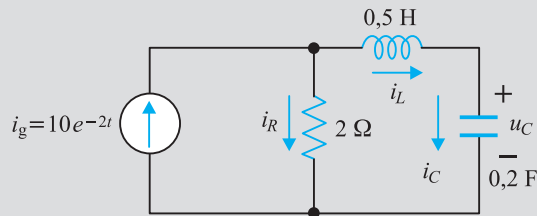


Figura 4.4 Circuito equivalente para $t > 0$

Si se aplica el segundo lema de Kirchhoff a la malla de la derecha de la Figura 4.4 se obtiene:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + u_C(t) - Ri_R(t) = 0$$

que en el instante $t = 0^+$ nos da:

$$Li'_L(0^+) + u_C(0^+) - Ri_R(0) = 0$$

y teniendo en cuenta los resultados del apartado a), queda:

$$0,5i'_L(0^+) + (-5) - 2 \cdot 10 = 0$$

es decir:

$$i'_L(0^+) = \frac{25}{0,5} = 50 \text{ A/s}$$

c) De acuerdo con el apartado b), en el circuito de la Figura 4.4 se cumple:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = i_L(t)$$

expresión que al derivar respecto de t nos da:

$$i'_L(t) = C \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} = C u''_C(t)$$

que para $t = 0^+$ da lugar a:

$$i'_L(0^+) = C u''_C(0^+)$$

y teniendo en cuenta el resultado del apartado anterior se llega a:

$$u''_C(0^+) = \frac{i'_L(0^+)}{C} = \frac{50}{0,2} = 250 \text{ V/s}^2$$

que es el resultado solicitado. Es importante en el estudio de las condiciones iniciales, que el lector distinga los circuitos que se obtienen en $t = 0^+$ y en $t > 0$. En nuestro caso el esquema de la Figura 4.3 representa la visión del **circuito congelado** en $t = 0^+$. A partir de este momento, para $t > 0$, el circuito se ha transformado y se convierte en el de la Figura 4.4.

■ 4.4. Análisis clásico de transitorios en sistemas de primer orden

Los sistemas de primer orden responden a las ecuaciones diferenciales (4.1) o (4.2), que se traducen en la práctica a circuitos que contienen un único elemento almacenador de energía eléctrica: bobina o condensador. A continuación se van a estudiar con detalle las redes más simples R - L y R - C para deducir conclusiones prácticas que más tarde se generalizarán.

■ 4.4.1. Respuesta transitoria de un circuito R - L

a) Respuesta natural

Considérese el circuito de la Figura 4.5 que representa una red serie R - L alimentada por una fuente de tensión que depende del tiempo $u(t)$, estando situado el conmutador señalado en la posición 1. En el tiempo $t = 0$ el conmutador pasa a la posición 2.

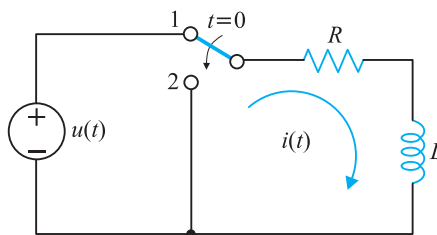


Figura 4.5 Circuito de primer orden de tipo inductivo

Vamos a suponer que la corriente previa en la bobina en $t = 0^-$ tiene un valor $i(0^-) = I_0$, entonces en el tiempo $t = 0^+$, de acuerdo con el principio de continuidad de la corriente en una inductancia se cumplirá:

$$i(0^+) = i(0^-) = I_0 \quad (4.17)$$

en esta situación el circuito resultante para $t > 0$ está formado por una malla R - L sin fuentes de alimentación exteriores. La respuesta del circuito (respuesta natural) se deberá por entero a la energía almacenada en la bobina:

$$W = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (4.18)$$

Vamos a determinar la corriente $i(t)$ para $t > 0$. Si aplicamos el segundo lema de Kirchhoff a la malla formada se cumplirá:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (4.19)$$

es decir:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad (4.20)$$

la ecuación anterior representa una ecuación diferencial homogénea de primer orden (el orden de la derivada más alta), que se resuelve de un modo inmediato separando las variables i y t :

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt \quad (4.21)$$

que al integrar nos da:

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int dt + K \quad (4.22)$$

donde K es la constante de integración. La solución de (4.22) es:

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + K \quad (4.23)$$

para simplificar la forma de la ecuación anterior, la constante K se puede definir como el logaritmo de otra constante A , es decir $K = \ln A$, de este modo (4.23) se puede escribir:

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + \ln A \quad (4.24)$$

lo que da lugar a la corriente:

$$i(t) = A e^{-(R/L)t} \quad (4.25)$$

que es la solución de la ecuación diferencial (4.20). Un procedimiento alternativo y más inmediato para resolver (4.20) y que se aplica también en la resolución de ecuaciones diferenciales homogéneas de alto orden, es darse cuenta que debe encontrarse una corriente $i(t)$, tal que su derivada, sumada con ella misma (multiplicada por el parámetro R/L) sea nula para todo valor de t . Esto quiere decir que la función $i(t)$ y su derivada di/dt deben tener la misma forma de onda. La función exponencial cumple esta exigencia; por lo que si se parte de la función:

$$i(t) = A e^{st} \quad (4.26)$$

como solución de (4.20), donde A y s son constantes, se tiene:

$$\frac{di}{dt} = s A e^{st} \quad (4.27)$$

que al llevar a (4.20) nos da:

$$s A e^{st} + \frac{R}{L} A e^{st} = 0 \quad (4.28)$$

que es la versión algebraica de la ecuación diferencial (4.20). Prescindiendo de la solución trivial $A = 0$, la ecuación (4.28) se transforma en:

$$s + \frac{R}{L} = 0 \quad (4.29)$$

que se denomina **ecuación característica** de la ecuación diferencial. Su solución constituye el valor característico o frecuencia natural del circuito²:

$$s = -\frac{R}{L} \quad (4.30)$$

que al sustituir en (4.26), nos da el valor de la corriente natural $i(t)$:

$$i(t) = A e^{-(R/L)t} \quad (4.31)$$

que coincide con el resultado (4.25) obtenido allí por el procedimiento de separación de variables. Para evaluar la constante A , debemos tener en cuenta la condición inicial (4.17), lo que requiere que se cumpla:

$$i(t = 0^+) = I_0 = [A e^{-(R/L)t}]_{t=0} = A \quad (4.32)$$

es decir $A = I_0$, por lo que (4.31) se transforma en:

$$i(t) = I_0 e^{-(R/L)t} \quad (4.33)$$

² El hecho de que se le llame *frecuencia* no debe inducir a confusión, pensando que da lugar a oscilaciones de tipo sinusoidal en la respuesta. Este nombre procede de que el cociente L/R tiene dimensión de tiempo (ver expresión (4.35)), por lo que R/L tiene dimensiones de frecuencia.

En definitiva la respuesta natural del circuito (la respuesta sin excitaciones externas) es una corriente exponencial decreciente con el tiempo. En la Figura 4.6 se ha representado la corriente anterior.

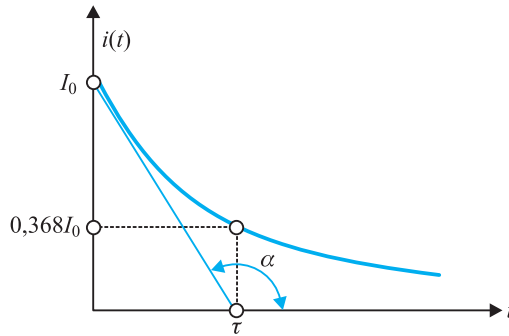


Figura 4.6 Respuesta natural de un circuito de primer orden inductivo

La corriente es máxima en $t = 0$ y vale $i = I_0$, y su decrecimiento depende de la relación L/R ; este cociente es un parámetro importante que recibe el nombre de **constante de tiempo** y se simboliza con la letra griega τ . La denominación anterior se debe a que τ tiene dimensiones de tiempo en segundos (s), ya que las dimensiones de L y R son:

$$[L] = \frac{\text{voltios}}{\text{amperios/segundo}} = \frac{[\text{V}][\text{s}]}{[\text{A}]} \quad ; \quad [R] = \frac{[\text{V}]}{[\text{A}]} \quad (4.34)$$

de donde se deduce:

$$\frac{[L]}{[R]} = [\text{s}] \quad (4.35)$$

de este modo (4.33) se puede escribir también:

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad ; \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (4.36)$$

si se considera un tiempo $t = \tau$, el valor de la corriente será:

$$[i(t)]_{t=\tau} = I_0 e^{-1} = 0,368 I_0 \quad (4.37)$$

el resultando anterior se puede utilizar para definir la constante de tiempo τ , como el tiempo necesario para que la respuesta natural se reduzca a $1/e = 0,368$ de su valor inicial I_0 ; cuanto mayor es la constante de tiempo, tanto más lento será el decrecimiento de la corriente con el tiempo.

Se puede dar una definición alternativa de la constante de tiempo, calculando la pendiente de $i(t)$ en $t = 0$. Si partimos de (4.36), el valor de la pendiente será:

$$\left[\frac{di(t)}{dt} \right]_{t=0} = m = \text{tg } \alpha = -\frac{I_0}{\tau} \quad (4.38)$$

cuyo significado geométrico se muestra en la Figura 4.6. La constante de tiempo τ , representa entonces el tiempo necesario para que se anule la respuesta natural, si la velocidad de decrecimiento se conservara en el valor inicial representado por (4.38).

La corriente $i(t)$ que circula por la malla R - L , se debe a la energía almacenada inicialmente en la bobina $LI_0^2/2$ que se va disipando en la resistencia R en un tiempo teóricamente infinito. Comprobemos que la energía disipada en la resistencia es:

$$W = \int_0^{\infty} Ri^2(t) dt = \int_0^{\infty} RI_0^2 e^{-(2R/L)t} dt = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (4.39)$$

que coincide con la energía que tenía almacenada la bobina. La ecuación (4.39) representa el balance energético del circuito.

b) Respuesta forzada de una red R - L a una tensión continua

Si en el esquema de la Figura 4.5, el generador de tensión $u(t)$ es de corriente continua de f.e.m. U_0 y el conmutador se pasa de la posición 2 a la posición 1 en $t = 0$, la tensión U_0 actuará como una excitación forzada de la red R - L . Este tipo de señal recibe el nombre de escalón de amplitud U_0 y viene definido por las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 & \text{para } t < 0 \\ u(t) &= U_0 & \text{para } t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

en la Figura 4.7a se ha representado la señal anterior. Al aplicar el segundo lema de Kirchhoff a la malla formada se obtiene:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_0 \quad (4.41)$$

de acuerdo con el Epígrafe 4.2, la solución completa de la ecuación diferencial (4.41) se compone de la respuesta natural i_n (solución de la homogénea) y de la respuesta forzada i_f (solución particular):

$$i = i_n + i_f \quad (4.42)$$

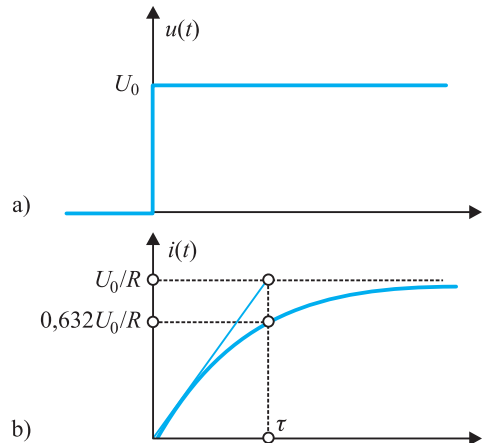


Figura 4.7 Respuesta forzada de una red R - L a una tensión continua

la respuesta natural, de acuerdo con el apartado a) de este epígrafe, será de la forma:

$$i_n = A e^{-(R/L)t} = A e^{-t/\tau} \quad (4.43)$$

que constituye la respuesta transitoria del circuito. La respuesta forzada es una solución particular de (4.41); para encontrar este valor, el procedimiento clásico es probar con una función análoga a la de excitación; como en este caso la tensión aplicada es una constante U_0 , se ensayará una respuesta constante $i_f = I_0$, que al sustituir en (4.41) nos da:

$$L \frac{dI_0}{dt} + RI_0 = U_0 \quad (4.44)$$

como I_0 es una constante, su derivada será igual a cero, de donde se deduce:

$$i_f = I_0 = \frac{U_0}{R} \quad (4.45)$$

que constituye la solución en régimen permanente del circuito, y que el lector puede encontrar directamente si tiene en cuenta, según se expresó en el Epígrafe 4.3, que en régimen permanente en c.c., la bobina se puede sustituir por un cortocircuito, por lo que la corriente i_f será igual a U_0/R . En definitiva la solución completa de (4.41) será:

$$i = i_n + i_f = A e^{-t/\tau} + \frac{U_0}{R} \quad (4.46)$$

la constante A deberá evaluarse conociendo las condiciones iniciales. Si se considera que la corriente inicial en la bobina es en general $i(0^-) = I_1$, (lo que indicaría en este caso, que mientras el conmutador estaba en la posición 2, la bobina no ha tenido tiempo de descargarse completamente), de acuerdo entonces con el principio de continuidad de la corriente en una inductancia se tendrá:

$$i(0^+) = i(0^-) = I_1 \quad (4.47)$$

y al aplicar esta condición de contorno a (4.46) resulta:

$$i(t = 0^+) = I_1 = [A e^{-t/\tau}]_{t=0} + \frac{U_0}{R} \quad (4.48)$$

es decir:

$$I_1 = A + \frac{U_0}{R} \Rightarrow A = I_1 - \frac{U_0}{R} \quad (4.49)$$

que llevando a (4.46) da como solución final:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} + \left(I_1 - \frac{U_0}{R} \right) e^{-t/\tau} \quad (4.50)$$

en el caso más simple, en el que la condición inicial es $i(0^-) = 0$, la expresión (4.50) se transforma en:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad ; \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (4.51)$$

en la Figura 4.7b se ha representado esta corriente. Se observa en esta figura y en la ecuación (4.51) que si $t = \tau$, el valor de la corriente es:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-1}) = 0,632 \frac{U_0}{R} \quad (4.52)$$

expresión que permite identificar a la constante del tiempo, como el tiempo necesario para que la corriente (partiendo de un valor nulo) alcance el 63,2 % del valor de régimen permanente U_0/R .

■ 4.4.2. Respuesta transitoria de un circuito R-C

a) Respuesta natural

Considérese el circuito de la Figura 4.8 que representa una red R-C en paralelo alimentada por un generador de corriente que depende del tiempo $i_g(t)$ ³. Inicialmente el conmutador se encuentra en la posición 1. Si en el tiempo $t = 0$, el conmutador se pasa a la posición 2, toda la energía almacenada por el condensador actuará como una fuente de tensión, que se descargará sobre la resistencia R en forma de corriente exponencial decreciente. El estado inicial del condensador en $t = 0^-$ se puede definir indistintamente, bien en términos de la carga almacenada $q(0^-)$ o como tensión en bornes $u_C(0^-)$ (cualquiera de estos valores determina la energía almacenada en el condensador).

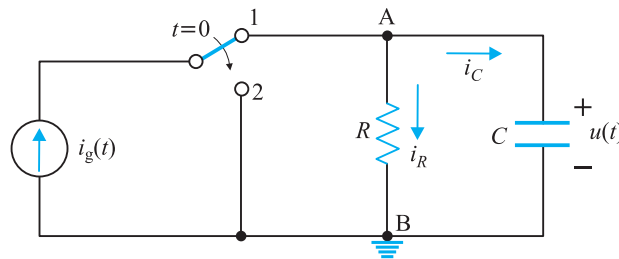


Figura 4.8 Circuito de primer orden capacitivo

Supóngase por ejemplo que el estado inicial está representado por el valor $u_C(0^-) = U_0$, entonces, de acuerdo con el principio de continuidad de la tensión en el condensador, se cumplirá:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 \quad (4.53)$$

³ Se ha elegido este tipo de circuito, porque es dual respecto al de la Figura 4.5. De este modo tanto las ecuaciones de funcionamiento de este circuito como sus respuestas serán similares (duales) a las demostradas en el Epígrafe 4.4.1.

vamos a determinar la evolución de la tensión en el condensador $u(t)$ para $t \geq 0$. Al aplicar el primer lema de Kirchhoff al nudo A de la Figura 4.8 se obtiene:

$$i_R + i_C = 0 \quad (4.54)$$

el nudo inferior B se ha tomado como referencia de tensiones, de tal modo que la tensión del nudo A respecto del B representa la tensión del condensador $u(t)$ que coincide con la d.d.p. en bornes de la resistencia R . Ahora bien, si se sustituyen los valores de $i_R = u/R$ e $i_C = C du/dt$ se obtiene:

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} = 0 \quad (4.55)$$

es decir:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u = 0 \quad (4.56)$$

que es una ecuación diferencial homogénea de primer orden. De un modo análogo al que se siguió en el epígrafe anterior, al ensayar una solución del tipo exponencial:

$$u(t) = A e^{st} \quad (4.57)$$

y sustituir en (4.56) se obtiene la ecuación característica:

$$s + \frac{1}{RC} = 0 \quad (4.58)$$

cuya solución es $s = -1/RC$, de tal modo que la respuesta natural del circuito, al sustituir (4.58) en (4.57) es:

$$u(t) = A e^{-(1/RC)t} \quad (4.59)$$

para evaluar la constante A , aplicamos las condiciones iniciales:

$$u(t = 0^+) = U_0 = [A e^{-t/RC}]_{t=0} = A \quad (4.60)$$

es decir $A = U_0$, y al sustituir en (4.59) se llega a la solución:

$$u(t) = U_0 e^{-t/RC} \quad (4.61)$$

que es una expresión análoga a (4.33), en la que ahora la constante de tiempo τ vale:

$$\tau = RC \quad (4.62)$$

que representa el tiempo necesario para que la respuesta natural se reduzca a $1/e = 0,368$ de su valor inicial. El lector puede comprobar una ecuación similar a (4.39) y ver que toda la energía $CU_0^2/2$ almacenada inicialmente por el condensador se disipará en la resistencia.

b) Respuesta forzada de una red R - C a un generador de corriente continua

Si en el circuito de la Figura 4.8, el generador de corriente genérico $i_g(t)$ es de corriente continua de magnitud I_0 y el conmutador que estaba en la posición 2 se devuelve a la posi-

ción 1 en $t = 0$, se obtendrá una red con excitación forzada constante. Al aplicar el primer lema de Kirchhoff al nudo A resulta:

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} = I_0 \quad (4.63)$$

la solución completa de la ecuación anterior tendrá dos componentes: natural y forzada, es decir:

$$u = u_n + u_f \quad (4.64)$$

la componente natural, de acuerdo con (4.59) será de la forma:

$$u_n = A e^{-t/\tau} \quad (4.65)$$

que constituye la respuesta transitoria del circuito. La componente forzada es la solución en régimen permanente y se obtiene (al ser la excitación de c.c.) sustituyendo el condensador por un circuito abierto; de este modo toda la corriente I_0 atravesará la resistencia R y por consiguiente la tensión u_f será:

$$u_f = RI_0 \quad (4.66)$$

y de este modo la solución completa de (4.63) es:

$$u = A e^{-t/\tau} + RI_0 \quad (4.67)$$

la constante A debe determinarse a partir de las condiciones iniciales. Si se considera que la tensión inicial del condensador es $u(0^-) = U_1$ (lo que indicaría en nuestro caso, que mientras el conmutador ha permanecido en la posición 2, el condensador no se ha descargado completamente) y teniendo en cuenta la continuidad de la tensión en el condensador en el momento de la conmutación, resulta:

$$u_C(0^-) = U_1 = u_C(0^+) = u(t=0) = A + RI_0 \quad (4.68)$$

de donde se deduce:

$$A = U_1 - RI_0 \quad (4.69)$$

que al llevar a (4.67) nos da el resultado final:

$$u(t) = RI_0 + (U_1 - RI_0)e^{-t/\tau} \quad (4.70)$$

en el caso más simple, en el que se considere el condensador inicialmente descargado ($U_1 = 0$) se tiene:

$$u(t) = RI_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad ; \quad \tau = RC \quad (4.71)$$

la corriente en el condensador para $t > 0$ es:

$$i_C = C \frac{du}{dt} = \frac{CRI_0}{\tau} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \quad (4.72)$$

mientras que la corriente en la resistencia vale:

$$i_R = I_0 - i_C = I_0(1 - e^{-t/RC}) \quad (4.73)$$

4.5. Solución sistemática de redes de primer orden

Los resultados obtenidos en el epígrafe anterior se pueden generalizar a redes más complejas de primer orden, es decir en las que solamente exista un único elemento almacenador de energía eléctrica: bobina o condensador (o que existiendo varios del mismo tipo se puedan transformar en uno solo equivalente).

En la Figura 4.9, se ha representado la configuración de un circuito en el instante siguiente a una conmutación (para $t \geq 0$); el recuadro de la izquierda representa un circuito eléctrico genérico (C.E.) que puede contener generadores de tensión, generadores de corriente y resistencias. El circuito anterior puede alimentar una inductancia L o un condensador C . En la parte de la derecha se ha representado el circuito equivalente de Thévenin del C.E. que carga la bobina, o su equivalente de Norton (en forma de generador de corriente) cargando el condensador. De este modo la red de la Figura 4.9b es análoga al circuito de la Figura 4.5, y la red de la Figura 4.9c es equivalente al circuito de la Figura 4.8.

Teniendo en cuenta estas equivalencias se puede decir que las respuestas naturales de los circuitos de las Figuras 4.9b y c serán de la forma siguiente:

$$i_n(t) = A e^{-t/\tau}, \text{ con } \tau = \frac{L}{R_{Th}} \quad ; \quad u_n(t) = B e^{-t/\tau}, \text{ con } \tau = R_{Th}C \quad (4.74)$$

Las expresiones anteriores unidas a las componentes forzadas correspondientes, permiten calcular de un modo simple la respuesta transitoria de una red de primer orden. Las constantes de integración correspondientes se obtendrán a partir de las condiciones iniciales determinadas según se estudió en el Epígrafe 4.3.

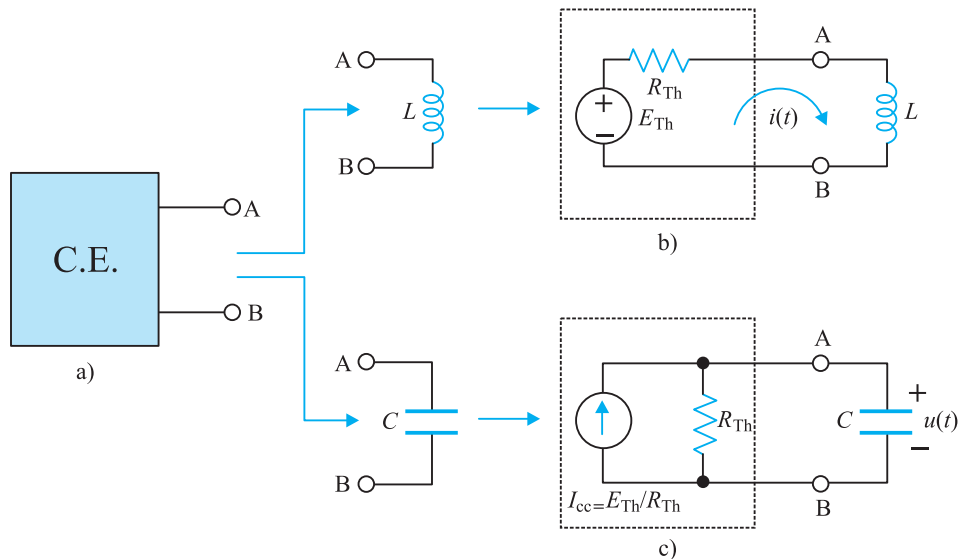


Figura 4.9 Solución sistemática de sistemas de primer orden

El cálculo anterior se puede sistematizar aun más, si se analiza con detenimiento la solución de una ecuación diferencial de primer orden de la forma normalizada (4.2):

$$\frac{df}{dt} + \frac{f}{\tau} = g(t) \quad (4.75)$$

Como sabemos, la solución de la ecuación diferencial anterior tiene dos componentes: *natural* $f_n(t)$ y *forzada* $f_p(t)$, esta última representa la respuesta permanente de la red, es decir para $t = \infty$ y que representaremos mejor por $f_\infty(t)$. La componente natural $f_n(t)$ será de la forma general (4.74) y de este modo se puede escribir la solución de (4.75):

$$f(t) = A e^{-t/\tau} + f_\infty(t) \quad (4.76)$$

La constante A se determina para el tiempo inmediato a la conmutación $t = 0^+$, resultando:

$$f(0^+) = A + f_\infty(0^+) \Rightarrow A = f(0^+) - f_\infty(0^+) \quad (4.77)$$

que al sustituir en (4.76) nos da:

$$f(t) = [f(0^+) - f_\infty(0^+)] \cdot e^{-t/\tau} + f_\infty(t) \quad (4.78)$$

de este modo (4.78) nos da la respuesta completa de un sistema de primer orden, en el que el término entre corchetes indica la respuesta natural y el otro sumando es la respuesta en régimen permanente. Conviene recalcar algo más sobre la solución anterior. En primer lugar $f(0^+)$ se determina por el principio de continuidad de tensiones o corrientes (en ausencia de señales tipo impulso), por lo que $f(0^+)$ será igual a $f(0^-)$. El cálculo de la componente permanente $f_\infty(t)$ es bastante simple cuando se trata de redes de c.c., ya que en estos casos las inductancias se pueden sustituir por cortocircuitos y los condensadores por circuitos abiertos (ver Figura 4.1), dando lugar a una red resistiva en la cual la resolución es sencilla. En el caso de que los generadores presentes en la red sean de c.a. sinusoidal la componente permanente $f_\infty(t)$ se determina con las técnicas ya estudiadas en el Capítulo 2 de este texto, trasladando el circuito al *dominio del plano complejo* en el que se calcula la respuesta fasorial de la red y se vuelve después al dominio del tiempo, (es decir pasando la respuesta fasorial a temporal). Para otro tipo de excitaciones, la respuesta permanente se determinará directamente como solución particular de (4.75), ya que no existen procedimientos directos para calcular $f_\infty(t)$. En resumen, el proceso de cálculo de transitorios en una red de primer orden sigue los siguientes pasos:

1. Dibujar el circuito para $t < 0$ y calcular el valor de régimen permanente de la corriente en la bobina (o tensión en bornes del condensador) en este circuito. Determinar entonces este valor en $t = 0$. Se obtiene así $i_L(0^-)$ o $u_C(0^-)$.
2. Aplicar el principio de continuidad y determinar los valores $i_L(0^+) = i_L(0^-)$, $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ en su caso. (Estas igualdades son válidas siempre que no existan generadores con señales tipo impulso).
3. Dibujar el circuito para $t > 0$ y calcular la resistencia de Thévenin R_{Th} vista desde los bornes de la bobina o el condensador. Con ello se determina la constante de tiempo de la respuesta natural: $\tau = L/R_{Th}$, o $\tau = R_{Th}C$.

4. Calcular la respuesta en régimen permanente (corriente en la bobina o tensión en el condensador) en el circuito para $t > 0$. a) Si los generadores de la red son de c.c. entonces sustituir antes la bobina por un cortocircuito y el condensador por un circuito abierto. b) Si los generadores de la red son de c.a. sinusoidal, aplicar las técnicas de cálculo del Capítulo 2 para calcular esta respuesta. c) Si los generadores tienen otro tipo de forma de onda, determinar la solución particular de la ecuación diferencial correspondiente a $t > 0$.
5. Escribir la solución completa para $t > 0$ aplicando la ecuación (4.78).
6. Utilizando la respuesta calculada en el apartado anterior, determinar otras variables de interés en la red.

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.2

En el circuito de la Figura 4.10, calcular la corriente $i(t)$ al cerrar el interruptor en $t = 0$.

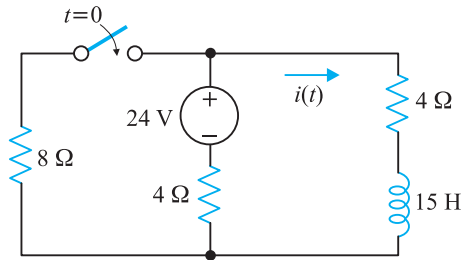


Figura 4.10 Ejemplo de aplicación 4.2

Solución

Para $t < 0$ se tiene la red de la Figura 4.11, en la que se ha sustituido la bobina por un cortocircuito (régimen permanente en la pre-conexión). La corriente en la bobina se obtiene de un modo inmediato:

$$i = \frac{24}{4 + 4} = 3 \text{ A} \quad ; \quad t < 0$$

es decir $i(0^-) = 3$, y por el principio de continuidad de la corriente se tendrá : $i(0^+) = 3$.

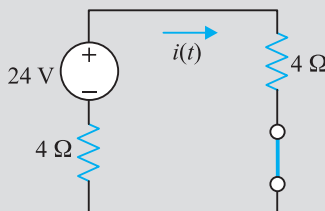


Figura 4.11 Circuito equivalente para $t < 0$

Para $t > 0$, se obtiene la red de la Figura 4.12a. La resistencia equivalente de Thévenin vista desde los bornes de la bobina se determina con ayuda de la Figura 4.12b, resultando:

$$R_{\text{Th}} = (8 \parallel 4) + 4 = \frac{8 \cdot 4}{12} + 4 = \frac{20}{3} \Omega$$

que corresponde a una constante de tiempo:

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{5}{\frac{20}{3}} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{ segundos}$$

De la red de la Figura 4.12a, se puede obtener la corriente en régimen permanente que circula por la bobina, por ello debe sustituirse la inductancia por un cortocircuito. El valor correspondiente se obtiene de un modo inmediato:

$$i_{\infty}(t) = \frac{24}{4 + (8 \parallel 4)} \cdot \frac{8}{8 + 4} = 2,4 \text{ A} \Rightarrow i_{\infty}(0) = 2,4 \text{ A}$$

al sustituir los valores anteriores en (4.78) se obtiene finalmente la corriente $i(t)$:

$$i(t) = (3 - 2,4)e^{-4t/3} + 2,4 = 2,4 + 0,6e^{-1,33t} \text{ amperios}$$

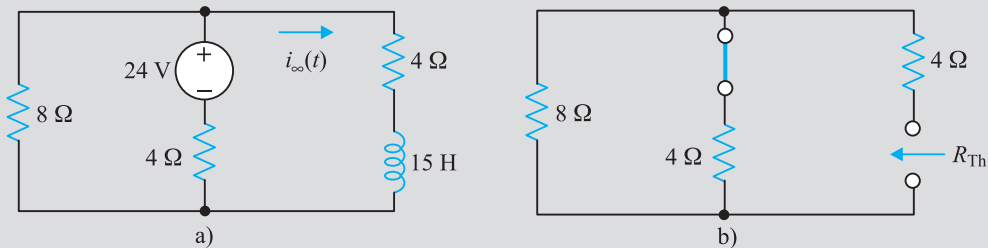


Figura 4.12 Circuito equivalente para $t > 0$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.3

El conmutador de la Figura 4.13 pasa de la posición 1 a 2 en $t = 0$. Calcular la tensión en bornes del condensador para $t > 0$.

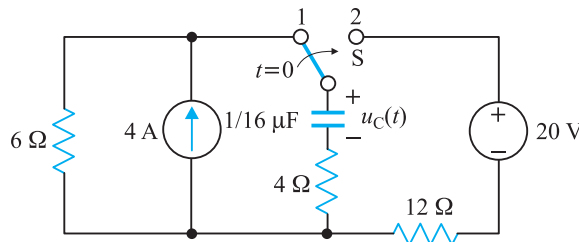


Figura 4.13 Ejemplo de aplicación 4.3

Solución

Para $t < 0$, el conmutador de la Figura 4.13 está en la posición 1. Si suponemos que en la posición anterior se alcanzó el régimen permanente, al ser la excitación constante, el condensador actuará como un circuito abierto y no pasará corriente por el mismo, y en consecuencia no habrá caída de tensión en la resistencia de

4 Ω . De este modo la d.d.p. en bornes del condensador será la que existe en la resistencia de 6 Ω por la que circula la corriente del generador de intensidad de 4 A. Es decir:

$$u_C(t < 0) = u_C(0^-) = Ri = 6 \cdot 4 = 24 \text{ V} \Rightarrow u_C(0^+) = 24 \text{ V}$$

Para $t > 0$ el conmutador ha pasado a la posición 2 y el circuito resultante es el que muestra la Figura 4.14, en el que es evidente que $R_{Th} = 4 + 12 = 16 \Omega$, por lo que la constante de tiempo vale:

$$\tau = R_{Th}C = 16 \cdot \frac{1}{16} = 1 \text{ segundo}$$

En el circuito de la Figura 4.14, en régimen permanente, el condensador actúa como un circuito abierto, por lo que su tensión en bornes será igual a la f.e.m. del generador de tensión, es decir:

$$u_\infty(t) = 20 \text{ V} \Rightarrow u_\infty(0^+) = 20$$

llevando estos valores a (4.78) se obtiene:

$$u_C(t) = (24 - 20)e^{-t} + 20 = 20 + 4e^{-t} \text{ voltios}$$

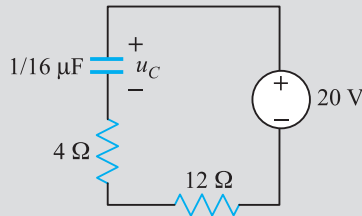


Figura 4.14 Circuito eléctrico equivalente para $t > 0$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.4

El circuito de la Figura 4.15 se abre en el tiempo $t = 0$. Calcular la corriente $i_1(t)$ que circula por la bobina para $t > 0$.

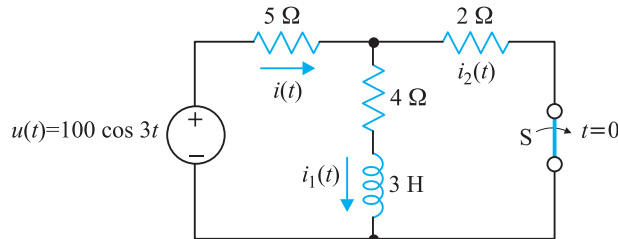


Figura 4.15 Ejemplo de aplicación 4.4

Solución

En el tiempo $t < 0$, la resistencia de 2 Ω está en paralelo con la rama serie constituida por una resistencia de 4 Ω y una bobina de 3 H. Vamos a calcular la corriente de régimen permanente que circula por la

bobina para $t > 0$. Para ello dibujamos el *circuito fasorial* correspondiente a la Figura 4.15 y que se muestra en la Figura 4.16. El fasor del generador de tensión tiene un valor eficaz de $100/\sqrt{2}$ voltios y fase 0° . La impedancia compleja de la bobina será $+jL\omega$, en la que la pulsación del generador vale 3 rad/s, por lo que el valor correspondiente será: $+j3 \cdot 3 = +j9 \Omega$.

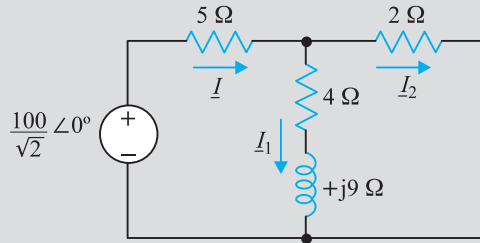


Figura 4.16 Circuito equivalente para $t < 0$

La corriente compleja suministrada por el generador de tensión es:

$$\underline{I} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{5 + (4 + j9) \parallel 2} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{5 + \frac{(4 + j9) \cdot 2}{6 + j9}} = 10,4 \angle -2,6^\circ \text{ A}$$

y la corriente $\underline{I}_1$ es igual a:

$$\underline{I}_1 = 10,4 \angle -2,6^\circ \cdot \frac{2}{2 + (4 + j9)} = 1,92 \angle -58,9^\circ \text{ A}$$

es decir, la corriente instantánea que circulará por la bobina en régimen permanente para $t < 0$ será:

$$i_1(t) = 1,92\sqrt{2} \cos(3t - 58,9^\circ) \text{ A}$$

de este modo la corriente inicial $i_1(0^-)$ tiene un valor:

$$i_1(0^-) = 1,92\sqrt{2} \cos(-58,9^\circ) = 1,4 \text{ amperios}$$

en consecuencia y teniendo en cuenta el principio de continuidad de la corriente en la inductancia, se tendrá:

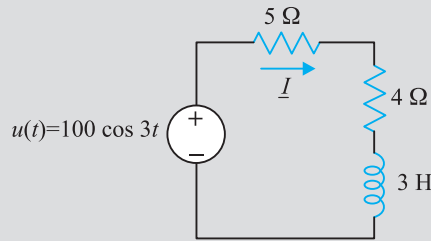
$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 1,4 \text{ A}$$

Para $t > 0$, se tiene el circuito de la Figura 4.17. La resistencia equivalente de Thévenin que se observa desde la bobina es evidente que vale $5 + 4 = 9 \Omega$, por consiguiente la constante de tiempo de la respuesta natural es:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ segundos}$$

la corriente forzada o de régimen permanente para $t > 0$ se puede obtener operando previamente en el plano complejo en el circuito de la Figura 4.17. La corriente compleja será:

$$\underline{I} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{9 + j9} = 5,56 \angle -45^\circ \text{ A}$$


 Figura 4.17 Circuito equivalente para $t > 0$

que corresponde a un valor instantáneo de régimen permanente:

$$i_{\infty}(t) = \sqrt{2} \cdot 5,56 \cos(3t - 45^\circ) = 7,86 \cos(3t - 45^\circ)$$

por lo que $i_{\infty}(0^+)$ vale:

$$i_{\infty}(0^+) = 7,86 \cos(-45^\circ) = 5,56 \text{ A}$$

la respuesta completa se obtendrá aplicando la solución general (4.78) que en nuestro caso se convierte en:

$$i_1(t) = [i_1(0^+) - i_{\infty}(0^+)]e^{-t/\tau} + i_{\infty}(t)$$

los términos calculados han sido:

$$\tau = \frac{1}{3} \text{ segundos} \quad ; \quad i_1(0^+) = 1,4 \text{ A} \quad ; \quad i_{\infty}(0^+) = 5,56 \text{ A}$$

$$i_{\infty}(t) = 7,86 \cos(3t - 45^\circ)$$

al sustituir estos valores en la ecuación general, se obtiene el resultado:

$$i_1(t) = 7,86 \cos(3t - 45^\circ) - 4,16e^{-3t} \text{ amperios}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.5

En el circuito R - C de la Figura 4.18, la corriente suministrada por el generador de intensidad es de la forma: $i_g = 5e^{-t}$ amperios. Calcular $u(t)$ para $t \geq 0$, si la tensión inicial en el condensador es $u_C(0^+) = 2 \text{ V}$.

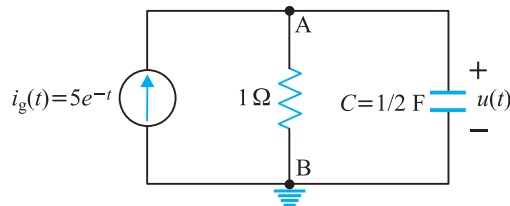


Figura 4.18 Ejemplo de aplicación 4.5

Solución

Aplicando el primer lema de Kirchhoff al nudo A se obtiene:

$$\frac{1}{2} \frac{du}{dt} + u = 5e^{-t}$$

la ecuación homogénea correspondiente es:

$$\frac{1}{2} \frac{du}{dt} + u = 0$$

cuya solución es de la forma:

$$u_n(t) = A e^{-2t}$$

que representa la respuesta natural de la red. La respuesta forzada es una solución particular de la ecuación diferencial original. Tomamos una solución de prueba de la misma forma que la excitación, es decir:

$$u_p(t) = B e^{-t}$$

el parámetro B se obtiene sustituyendo la solución anterior en la ecuación diferencial y resulta:

$$\frac{1}{2} [-B e^{-t}] + [B e^{-t}] = 5 e^{-t}$$

de donde se deduce:

$$-\frac{B}{2} + B = 5 \Rightarrow B = 10$$

por consiguiente la respuesta completa será:

$$u(t) = u_n(t) + u_p(t) = A e^{-2t} + 10 e^{-t}$$

la constante A que se incluye en la respuesta natural se obtiene aplicando las condiciones iniciales, y así resulta:

$$u(t = 0^+) = A + 10 = u_C(0^+) = 2$$

por consiguiente $A = -8$ y de este modo la respuesta será:

$$u(t) = 10 e^{-t} - 8 e^{-2t} \text{ voltios}$$

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.6

En el circuito de la Figura 4.19, el conmutador está inicialmente en la posición 1 y la diferencia de potencial en bornes del condensador es de -10 V con la polaridad indicada. En $t = 0$, el conmutador se pasa a la posición 2 y se va cargando el condensador mediante el generador de tensión (pila) de 20 V. Cuando la

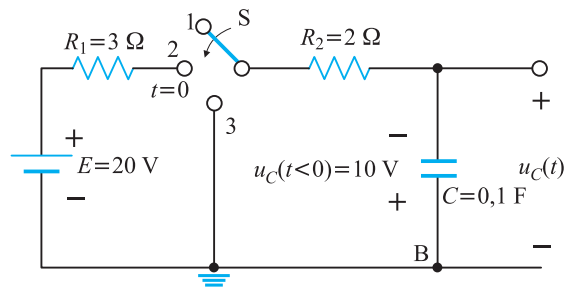


Figura 4.19 Ejemplo de aplicación 4.6

d.d.p. en bornes del condensador llega a 15 V, el conmutador se pasa a la posición 3, lo que provocará el inicio de la descarga del condensador. Calcular: a) expresión de la tensión instantánea en bornes del condensador, cuando el conmutador está en la posición 2; b) en el caso anterior ¿cuánto tiempo tardará el condensador en adquirir la tensión de 15 V? c) determinar la tensión instantánea en el condensador al pasar el conmutador a la posición 3.

Solución

a) Para $t < 0$, el conmutador está en la posición 1 y la tensión en el condensador es $u_C(t < 0) = -10$ V (tomando el terminal superior del condensador como positivo respecto del extremo inferior). Al pasar el conmutador a la posición 2, en el instante $t = 0$, se cumple la continuidad de tensión en bornes del condensador, por lo que:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = -10 \text{ V}$$

y el condensador se irá cargando por medio de la pila que tiene una f.e.m. de 20 V. La constante de tiempo del circuito de carga del condensador es:

$$\tau_1 = (R_1 + R_2)C = (3 + 2) \cdot 0,1 = 0,5 \text{ s}$$

de acuerdo con la expresión (4.78) la d.d.p. en bornes del condensador será de la forma:

$$u_C(t) = u_{C\infty}(t) + [u_C(0^+) - u_{C\infty}(0^+)]e^{-t/\tau} \quad (1)$$

al ser la única fuente de c.c. coinciden en la expresión general anterior las tensiones $u_{C\infty}(t) = u_{C\infty}(0^+) = 20$ V, ya que en régimen permanente la tensión final que adquirirá el condensador será de 20 V, que es la tensión del generador o pila. Al sustituir los valores anteriores en la ecuación que expresa la tensión instantánea del condensador anterior resulta:

$$u_C(t) = 20 + [-10 - 20]e^{-t/0,5} = 20 - 30e^{-2t}$$

En la Figura 4.20 se muestra la evolución de la tensión del condensador con el tiempo, que se mueve desde el punto inicial M hasta el punto final A, en el que la d.d.p. en bornes es de 15 V.

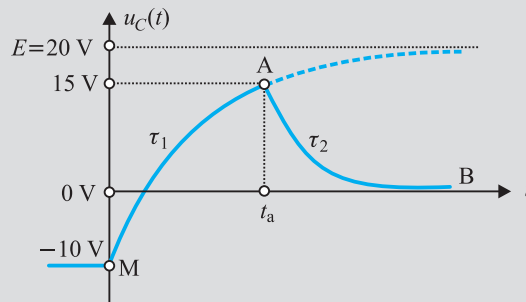


Figura 4.20 Evolución de la tensión en el condensador

b) Cuando el condensador se carga con una tensión positiva de 15 V, el tiempo transcurrido es:

$$u_C(t_a) = 20 - 30e^{-2t_a} = 15 \Rightarrow t_a = 0,896 \text{ s}$$

c) Cuando la tensión del condensador alcanza el punto A, en el tiempo anterior t_a , el conmutador pasa a la posición 3, que provoca una descarga del condensador a través de la resistencia R_1 . Si se cambia el

origen de tiempos al instante en el que se produce este nuevo cambio, la tensión del condensador será de la forma:

$$u_C(t) = u_{C\infty}(t) + [u_C(0^+) - u_{C\infty}(0^+)]e^{-t/\tau} \quad (2)$$

donde se cumple:

$$u_C(0^+) = 15 \text{ V} \quad ; \quad u_{C\infty}(t) = u_{C\infty}(0^+) = 0 \text{ V} \quad ; \quad \tau_2 = R_1 C = 2 \cdot 0,1 = 0,2 \text{ s}$$

ya que el valor final de la tensión del condensador debe ser cero voltios. Al sustituir este valor en (2) resulta:

$$u_C(t) = 0 + [15 - 0]e^{-t/0,2} = 15e^{-5t} \quad (3)$$

que corresponde al tramo AB de la curva de la Figura 4.20.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.7

En el circuito de la Figura 4.21, la fuente de tensión U_g es un generador de onda cuadrada de 500 Hz y que oscila entre un valor mínimo de cero voltios y un valor máximo de 10 V. Calcular: a) tensión del condensador al final del primer ciclo del generador; b) tensión del condensador al final del segundo ciclo del generador; c) cuando se alcanza el régimen permanente, determinar entre qué valores máximo y mínimo oscila la tensión del condensador.

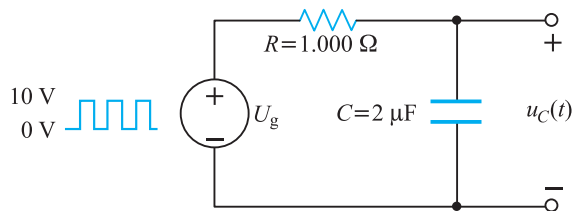


Figura 4.21 Ejemplo de aplicación 4.7

Solución

En la Figura 4.22 se han representado en trazo más grueso las ondas cuadradas del generador de señales y en trazo más fino los ciclos de carga y descarga del condensador, que se van a calcular a continuación.

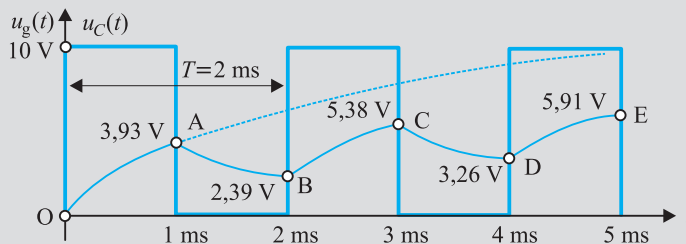


Figura 4.22 Ondas del generador de señales y del condensador

a) La tensión instantánea del condensador durante el tramo OA de carga, en el semiperiodo positivo de la onda del generador de señales viene expresada por:

$$u_C(t) = u_{C\infty} + [u_C(0^+) - u_{C\infty}]e^{-t/\tau} \quad (1)$$

en este semiciclo se cumplen los siguientes valores:

$$u_{C\infty} = 10 \text{ V} \quad ; \quad u_C(0^+) = 0 \text{ V} \quad ; \quad \tau = RC = 1.000 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 2 \text{ ms}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{500} = 2 \text{ ms}$$

donde T representa el periodo de la onda cuadrada, que es la inversa de la frecuencia de la señal. El semiperiodo de esta señal es por consiguiente de 1 ms. Al sustituir estos valores en (1) se obtiene:

$$u_C(t) = 10 + [0 - 10]e^{-500t} = 10(1 - e^{-500t}) \quad (2)$$

que para $t = 1 \text{ ms}$, final del periodo de carga del condensador, se tiene:

$$u_C(t) = 10(1 - e^{-0,5}) = 3,93 \text{ V} \quad (3)$$

que corresponde al punto A de la Figura 4.22. En el semiciclo correspondiente a la zona comprendida entre 1 ms y 2 ms, la tensión del generador de onda cuadrada pasa a valer cero voltios, por lo que comienza la descarga del condensador, con una ecuación idéntica a (1) (si se traslada el origen de tiempos al momento del cambio de la señal cuadrada). Los valores de los parámetros son ahora:

$$u_{C\infty} = 0 \text{ V} \quad ; \quad u_C(0^+) = 3,93 \text{ V} \quad ; \quad \tau = 2 \text{ ms}$$

Al sustituir estos valores en (1) se obtiene:

$$u_C(t) = 0 + [3,93 - 0]e^{-500t} = 3,93e^{-500t} \quad (4)$$

y al final de este semiperiodo de descarga se tiene:

$$u_C(t = 1 \text{ ms}) = 3,93e^{-0,5} = 2,39 \text{ V} \quad (5)$$

que corresponde al punto B en el esquema de la Figura 4.22. Por consiguiente, y contestando al enunciado del problema, al final del primer ciclo de la onda cuadrada, el condensador tiene una tensión de 2,39 V.

b) Si se sigue este proceso, entre las zonas B y C se produce nuevamente la carga del condensador, y su tensión instantánea viene expresada por (1) (trasladando el origen de tiempos al punto A), pero los parámetros son ahora:

$$u_{C\infty} = 10 \text{ V} \quad ; \quad u_C(0^+) = 2,39 \text{ V} \quad ; \quad \tau = 2 \text{ ms}$$

al sustituir estos valores en (1) se obtiene:

$$u_C(t) = 10 + [2,39 - 10]e^{-500t} = 10 - 7,61e^{-500t} \quad (6)$$

y al final de este semiperiodo de carga se tiene:

$$u_C(t = 1 \text{ ms}) = 10 - 7,61e^{-0,5} = 5,38 \text{ V} \quad (7)$$

y que da lugar al punto C de la Figura 4.22. En ese momento, la tensión del generador vuelve a cero y los parámetros son:

$$u_{C\infty} = 0 \text{ V} \quad ; \quad u_C(0^+) = 5,38 \text{ V} \quad ; \quad \tau = 2 \text{ ms}$$

Al sustituir estos valores en (1) se obtiene:

$$u_C(t) = 0 + [5,38 - 0]e^{-500t} = 5,38e^{-500t} \quad (8)$$

y al final de este semiperiodo de descarga se tiene:

$$u_C(t = 1 \text{ ms}) = 5,38e^{-0,5} = 3,26 \text{ V} \quad (9)$$

que da lugar al punto D de la Figura 4.22. De este modo, el condensador se va cargando a tensiones cada vez más elevadas y descargando también a tensiones más elevadas.

c) Cuando se alcance el régimen permanente de cargas y descargas del condensador, las tensiones mínimas y máximas se estabilizarán en unos valores que se van a calcular a continuación. En la Figura 4.23 se muestran las curvas correspondientes. Se ha llamado U_i a la tensión inferior que adquiere el condensador y U_f a la tensión superior o final que alcanza el condensador. Se ha denominado E a la tensión máxima del generador de señales y T al semiperiodo de la onda del mismo.

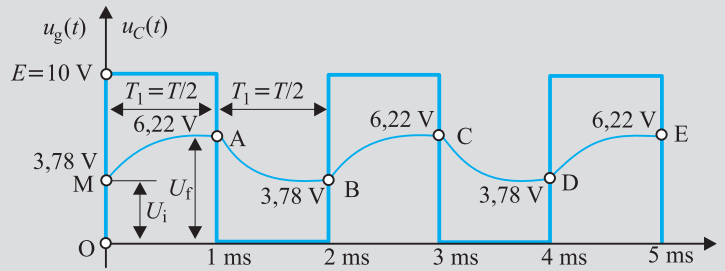


Figura 4.23 Situación en régimen permanente

En el semiciclo de carga, por ejemplo considérese el tramo primero MA, la tensión instantánea del condensador, de acuerdo con la expresión general (1) es:

$$u_C(t) = u_{C\infty} + [u_C(0^+) - u_{C\infty}]e^{-t/\tau} \quad (10)$$

en este semiciclo se cumplen los siguientes valores:

$$u_{C\infty} = E = 10 \text{ V} \quad ; \quad u_C(0^+) = U_i \quad ; \quad \tau = 2 \text{ ms} \quad ; \quad T_1 = T/2 = 1 \text{ ms}$$

Valores que al sustituir en (10) nos da:

$$u_C(t) = E + [U_i - E]e^{-t/\tau} \quad (11)$$

y para $t = T_1$ se obtiene la tensión final U_f , es decir:

$$U_f = E + [U_i - E]e^{-T_1/\tau} \quad (12)$$

En el semiciclo de descarga, por ejemplo considérese el tramo AB, la tensión instantánea del condensador, de acuerdo con la expresión general (1) es:

$$u_C(t) = u_{C\infty} + [u_C(0^+) - u_{C\infty}]e^{-t/\tau} \quad (13)$$

en este semiciclo se cumplen los siguientes valores:

$$u_{C\infty} = 0 \text{ V} \quad ; \quad u_C(0^+) = U_f \quad ; \quad \tau = 2 \text{ ms} \quad ; \quad T_1 = T/2 = 1 \text{ ms}$$

Valores que al sustituir en (13) nos da:

$$u_C(t) = 0 + [U_f - 0]e^{-t/\tau} \quad (14)$$

y para $t = T_1$ se obtiene la tensión inferior U_i , es decir:

$$U_i = U_f e^{-T_1/\tau} \quad (15)$$

de la ecuación anterior se puede despejar el valor final superior, lo que da lugar a:

$$U_f = U_i e^{T_1/\tau} \quad (16)$$

y sustituyendo este valor en la ecuación (12) resulta:

$$U_i e^{T_1/\tau} = E + [U_i - E] e^{-T_1/\tau} = E(1 - e^{-T_1/\tau}) + U_i e^{-T_1/\tau} \quad (17)$$

de donde se deduce:

$$U_i(e^{T_1/\tau} - e^{-T_1/\tau}) = E(1 - e^{-T_1/\tau}) \Rightarrow U_i = E \frac{e^{-T_1/\tau}}{1 + e^{-T_1/\tau}} \quad (18)$$

expresión que define el valor final que alcanzará la tensión del condensador en régimen permanente. Si se sustituye este valor en (16) se obtiene:

$$U_f = U_i e^{-T_1/\tau} = E \frac{1}{1 + e^{-T_1/\tau}} \quad (19)$$

que es la expresión de la tensión inferior o mínima del condensador. Al ser los periodos de carga y descarga iguales, debido a la simetría de la onda producida por el generador de señales, se puede demostrar una propiedad importante, y es que la suma de la tensión máxima (o final) y mínima (o inicial) del condensador es una constante, que es precisamente la tensión del generador de señales. El lector puede comprobarlo al sumar las expresiones (18) y (19) que dan un resultado igual a E . Si se sustituyen en (18) y (19) los parámetros del circuito se obtienen los valores numéricos de las tensiones inicial y final:

$$U_i = E \frac{e^{-T_1/\tau}}{1 + e^{-T_1/\tau}} = 10 \frac{e^{-0.5}}{1 + e^{-0.5}} = 3,78 \text{ V} \quad ; \quad U_f = E \frac{1}{1 + e^{-T_1/\tau}} = 10 \frac{1}{1 + e^{-0.5}} = 6,22 \text{ V} \quad (20)$$



Comentarios prácticos

En un Laboratorio de Electrónica es muy sencillo comprobar los resultados del Ejemplo de Aplicación 4.7. Debe disponerse para ello de un generador de señales de onda cuadrada, una red RC y un osciloscopio de doble canal, para que se puedan observar simultáneamente las ondas del generador de señales y la del condensador. La red RC constituye un integrador, y la forma de onda que se obtiene en el condensador depende del valor de la constante de tiempo del circuito RC , respecto del valor del periodo de la onda cuadrada del generador de señales. En la Figura 4.24 se muestran tres tipos de ondas resultantes, según que la constante de tiempo de la red RC sea baja, media o alta.

Se dice que la constante de tiempo es baja cuando es inferior a $1/10$ del periodo de la onda cuadrada de entrada. La constante de tiempo es media cuando está comprendida entre $1/10$ y 10 veces el periodo de la onda cuadrada y es alta cuando la constante de tiempo es superior a 10 veces el periodo de la señal de entrada. Las ondas de la Figura 4.24 se pueden comprobar con sencillez. Para ello se puede elegir una red RC , con una resistencia de $100 \text{ k}\Omega$ y tomar tres valores de capacidades, a saber: $C_1 = 0,001 \text{ }\mu\text{F}$; $C_2 = 0,01 \text{ }\mu\text{F}$ y $C_3 = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$, de este modo se consiguen tres circuitos con constantes de tiempo respectivamente de: $\tau_1 = 0,1 \text{ ms}$; $\tau_2 = 1 \text{ ms}$ y $\tau_3 = 10 \text{ ms}$. Si se utiliza un generador de onda cuadrada con una tensión de salida de 10 V y una frecuencia de 1 kHz , que corresponde a un periodo de 1 ms , se podrán observar ondas similares a las anteriores. Obsérvese en la Figura 4.24 que

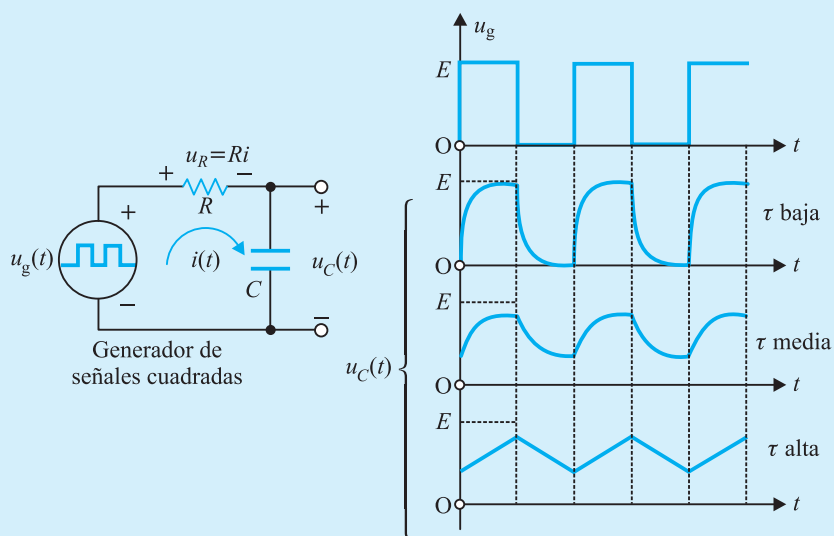


Figura 4.24 Formas de onda de un circuito RC en función de su constante de tiempo

cuando la constante de tiempo es alta, se obtiene a la salida del condensador una onda triangular, es decir la red RC transforma la onda cuadrada en triangular, es por ello un circuito integrador. Si a continuación se intercambian las posiciones de la resistencia y el condensador, las ondas que se obtienen son las que se muestran en la Figura 4.25. Obsérvese en este caso que cuando la constante de tiempo es baja respecto al periodo de la señal, se obtienen a la salida de la resistencia señales tipo impulso, lo que significa que la red RC deriva la señal de entrada y es por ello un **circuito derivador**.

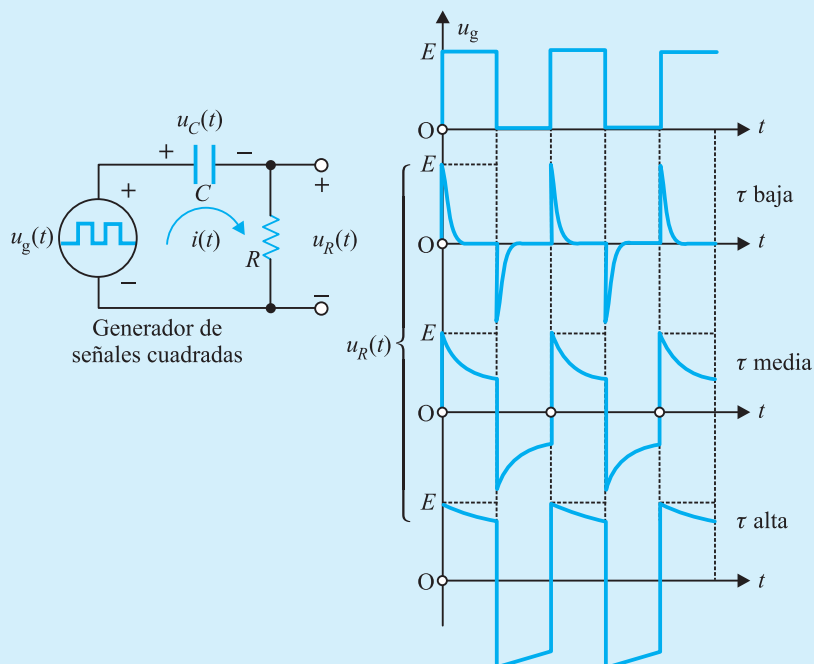


Figura 4.25 Formas de onda de un circuito CR en función de su constante de tiempo

4.6. Análisis clásico de transitorios en sistemas de segundo orden

Los sistemas de segundo orden responden a la ecuación diferencial (4.3) que se traducen en la práctica en circuitos que contienen dos elementos almacenadores de energía de diferente tipo, es decir, una bobina y un condensador (o dos bobinas, o dos condensadores que no se pueden reducir a uno solo equivalente).

Existen en la práctica una gran diversidad de circuitos que pueden dar lugar a ecuaciones diferenciales de segundo orden. Por ello no es fácil realizar un análisis sistemático de los mismos. Debido a esto, se va a estudiar aquí únicamente la red serie clásica R - L - C para comprender los principios básicos. En el siguiente epígrafe se abordará el estudio de la transformada de Laplace cuya aplicación permite una sistematización para redes de cualquier orden.

4.6.1. Respuesta transitoria de un circuito R - L - C

a) Respuesta natural

Considérese el circuito de la Figura 4.26 que representa una red serie R - L - C , alimentada por una fuente de tensión que depende del tiempo $u(t)$. Cuando el conmutador está situado en la posición 1, el segundo lema de Kirchhoff nos da:

$$u(t) = u_R + u_L + u_C \quad (4.79)$$

donde los valores correspondientes son:

$$u_R = Ri \quad ; \quad u_L = L \frac{di}{dt} \quad ; \quad u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt \quad (4.80)$$

por lo que (4.79) se convierte en:

$$u(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt \quad (4.81)$$

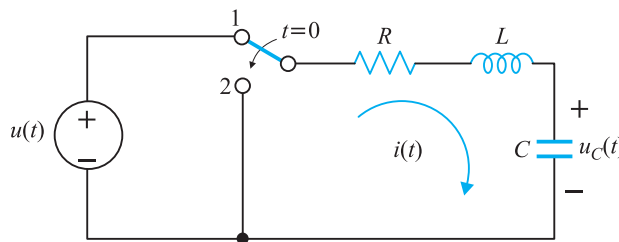


Figura 4.26 Circuito de segundo orden R - L - C

que es una ecuación integro-diferencial que permite calcular $i(t)$. Sin embargo es más simple resolver la ecuación equivalente a (4.81) expresada en función de la tensión u_C del condensador y utilizar a posteriori la última ecuación (4.80) para calcular $i(t)$:

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} \quad (4.82)$$

Si llevamos (4.82) a (4.81) resulta:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u(t) \quad (4.83)$$

que es una ecuación de segundo orden. La respuesta natural de esta red es la solución de la homogénea de (4.83) que físicamente significa determinar la respuesta del circuito de la Figura 4.26 cuando el conmutador se pasa a la posición 2 en $t = 0$. En este caso la ecuación diferencial (4.83) se transforma en:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (4.84)$$

si se sustituye la solución de prueba $u_C = A e^{st}$ en la ecuación anterior resulta:

$$(LCs^2 + RCs + 1)A e^{st} = 0 \quad (4.85)$$

cuya ecuación característica es:

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0 \quad (4.86)$$

que tiene las siguientes raíces:

$$s_1, s_2 = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{2LC} \quad (4.87)$$

que son las **frecuencias naturales** de la red. Por consiguiente la solución de (4.84) será de la forma:

$$u_{Cn}(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (4.88)$$

donde A_1 y A_2 son dos constantes arbitrarias, que se deben evaluar en función de las condiciones iniciales. Se hace notar al lector la regla inflexible de que el número de constantes arbitrarias que aparecen en la respuesta natural coincide con el grado de la ecuación diferencial. Si esto no fuera así, sería imposible definir el estado del circuito sin ambigüedades y conseguir con ello una solución única. Dependiendo de los valores de las raíces de (4.87) se tienen tres tipos de funcionamiento de la red:

1) Circuito sobreamortiguado o con descarga aperiódica

Esta situación corresponde al caso de que las raíces s_1 y s_2 sean reales y distintas, que equivale a decir teniendo en cuenta (4.87) a que:

$$R^2 C^2 > 4LC \Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.89)$$

de este modo resulta:

$$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (4.90)$$

y denominando a y b a las siguientes expresiones:

$$a = \frac{R}{2L} \quad ; \quad b = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (4.91)$$

da lugar según (4.88) al siguiente valor de tensión natural en el condensador:

$$u_{Cn}(t) = A_1 e^{(-a+b)t} + A_2 e^{(-a-b)t} \quad (4.92)$$

donde A_1 y A_2 son dos constantes arbitrarias que se determinan en función de las constantes iniciales. Si se consideran que estas últimas son por ejemplo:

$$u_C(0^+) = U_0 \quad ; \quad \left[\frac{du_C}{dt} \right]_{t=0} = 0 \quad (4.93)$$

teniendo en cuenta (4.92) se tendrá:

$$U_0 = A_1 + A_2 \quad ; \quad 0 = (-a+b)A_1 + (-a-b)A_2 \quad (4.94)$$

es decir:

$$A_1 = \frac{a+b}{2b} U_0 \quad ; \quad A_2 = \frac{-a-b}{2b} U_0 \quad (4.95)$$

llevando estas constantes a (4.92) y después de algunas simplificaciones resulta:

$$u_{Cn}(t) = U_0 \frac{b^2 - a^2}{2b} \left[\frac{e^{-(a+b)t}}{(a+b)} - \frac{e^{-(a-b)t}}{(a-b)} \right] \quad (4.96)$$

y que corresponde de acuerdo con (4.82), a una corriente natural en el circuito:

$$i_n(t) = C \frac{b^2 - a^2}{2b} U_0 [e^{-(a-b)t} - e^{-(a+b)t}] \quad (4.97)$$

Y si se tienen en cuenta los valores de los parámetros a y b expresados en (4.91) da lugar a:

$$i_n(t) = \frac{-2U_0 e^{-at}}{\sqrt{R^2 - 4L/C}} \operatorname{Sh} bt \quad (4.98)$$

en la Figura 4.27, la curva señalada con la letra «a» corresponde a la representación de (4.98).

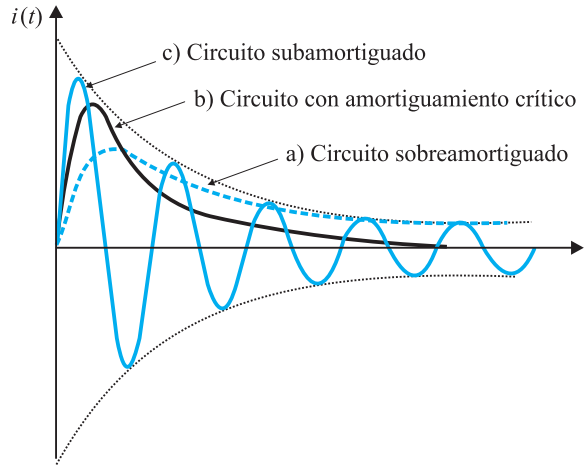


Figura 4.27 Respuestas de un circuito de segundo orden

2) Circuito con amortiguamiento crítico

Esta situación corresponde a la igualdad:

$$R^2 C^2 = 4LC \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.99)$$

lo que corresponde según (4.87) a dos raíces reales iguales:

$$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} = -a \quad (4.100)$$

Llevando estos valores a (4.88) podría aparecer a primera vista que la solución sería de la forma:

$$u_{Cn}(t) = (A_1 + A_2)e^{-at} = A e^{-at} \quad (4.101)$$

donde se ha tomado $A = A_1 + A_2$ como única constante arbitraria. Pero según se ha dicho anteriormente, la respuesta natural de una ecuación diferencial de segundo orden debe contener dos constantes arbitrarias, ya que si no es así, la solución no quedaría unívocamente determinada por dos condiciones iniciales conocidas con antelación. Por ello, en vez de considerar a A como una constante, se toma como una función del tiempo:

$$A = A_1 + A_2 t \quad (4.102)$$

el lector puede comprobar entonces que la respuesta natural correspondiente:

$$u_{Cn}(t) = A_1 e^{-at} + A_2 t e^{-at} \quad (4.103)$$

es solución de (4.83). Si se consideran las condiciones iniciales (o de contorno) (4.93) del caso anterior, resulta:

$$U_0 = A_1 \quad ; \quad 0 = -aA_1 + A_2 \quad (4.104)$$

de donde se deduce:

$$A_1 = U_0 \quad ; \quad A_2 = aU_0 \quad (4.105)$$

y llevando a (4.103) nos da:

$$u_{Cn}(t) = U_0(1 + at)e^{-at} \quad (4.106)$$

lo que corresponde según (4.82) a una corriente:

$$i_n(t) = C \frac{du_{Cn}}{dt} = -CU_0 a^2 t e^{-at} \quad (4.107)$$

que teniendo en cuenta el valor de «a» que se expresó en (4.91) nos da:

$$i_n(t) = \frac{-U_0}{L} t e^{-R/2Lt} \quad (4.108)$$

esta respuesta se produce cuando se cumple la condición (4.99) y es una situación límite entre el caso aperiódico y la descarga oscilante que después veremos; se denomina condición de amortiguamiento crítico. En la Figura 4.27 (curva «b») se ha representado (4.108), la corriente de descarga tiene un valor de pico mayor que en el caso aperiódico pero tiende a cero más rápidamente.

3) Circuito subamortiguado o con descarga oscilante

Esta situación corresponde a la desigualdad:

$$R^2 C^2 < 4LC \quad \Rightarrow \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.109)$$

las raíces s_1 y s_2 de (4.87) son complejas y conjugadas y de la forma:

$$s_1, s_2 = -a \pm j\omega_d \quad (4.110)$$

donde los valores de a y ω_d vienen definidos por:

$$a = \frac{R}{2L} \quad ; \quad b = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = j\omega_d \quad (4.111)$$

donde se cumple: $\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, el término ω_d recibe el nombre de *pulsación natural no amortiguada* del circuito; de este modo (4.88) se convierte en:

$$u_{Cn}(t) = A_1 e^{(-a+j\omega_d)t} + A_2 e^{(-a-j\omega_d)t} \quad (4.112)$$

o de un modo equivalente:

$$u_{Cn}(t) = e^{-at}[B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t] \quad (4.113)$$

donde B_1 y B_2 representan dos constantes arbitrarias. Una forma más útil y compacta de expresar (4.113) es:

$$u_{Cn}(t) = B e^{-at} \sin(\omega_d t + \alpha) \quad (4.114)$$

donde los parámetros B y α son:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \quad ; \quad \alpha = \arctg \frac{B_1}{B_2} \quad (4.115)$$

si se consideran las condiciones iniciales (4.93) resulta:

$$u_C(0^+) = U_0 = B \sin \alpha \quad ; \quad \left[\frac{du_C}{dt} \right]_{t=0} = 0 = -aB \sin \alpha + \omega_d B \cos \alpha \quad (4.116)$$

de donde se deduce:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_d}{a} \quad ; \quad B = U_0 \frac{\sqrt{a^2 + \omega_d^2}}{\omega_d} \quad (4.117)$$

que al sustituir en (4.114) nos da:

$$u_{Cn}(t) = U_0 \frac{\sqrt{a^2 + \omega_d^2}}{\omega_d} e^{-at} \sin(\omega_d t + \alpha) \quad (4.118)$$

que corresponde de acuerdo con (4.82) a una corriente natural:

$$i_n(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{-CU_0}{\omega_d} e^{-at} (a^2 + \omega_d^2) \sin \omega_d t \quad (4.119)$$

es decir:

$$i_n(t) = \frac{-U_0}{L\omega_n} e^{-at} \sin \omega_d t \quad (4.120)$$

puesto que $a^2 + \omega_d^2 = 1/LC$. La corriente anterior representa una descarga oscilante que va decreciendo con el tiempo y está representada por la curva «c» de la Figura 4.27.

b) Respuesta forzada de una red R - L - C a una alimentación de c.c.

Si en el circuito de la Figura 4.26, el generador de tensión $u_g(t)$ es de corriente continua de valor U_0 y el conmutador que estaba en la posición 2 (respuesta natural) se devuelve a la posición 1 en $t = 0$, se obtendrá una red con excitación forzada constante. La ecuación diferencial que regirá el comportamiento del circuito, teniendo en cuenta (4.83) será:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0 \quad (4.121)$$

es evidente que la respuesta forzada en régimen permanente nos dará $u_{Cp} = U_0$, ya que el condensador en régimen permanente en c.c. es equivalente a un circuito abierto por lo que

no circulará ninguna corriente forzada por la red, por lo que toda la tensión aplicada U_0 aparecerá en bornes del condensador. De este modo la solución de (4.121) será:

$$u_C(t) = u_n(t) + u_p(t) \quad (4.122)$$

en la que $u_p(t) = U_0$. Teniendo en cuenta además los resultados obtenidos en el apartado a) de este epígrafe se tiene:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_0 + A_1 e^{(-a+b)t} + A_2 e^{(-a-b)t} \quad \text{si } R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \\ u_C(t) &= U_0 + (A_1 + A_2 t)e^{-at} \quad \text{si } R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \\ u_C(t) &= U_0 + B e^{-at} \sin(\omega_d t + \alpha) \quad \text{si } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned} \quad (4.123)$$

donde las constantes arbitrarias se determinarán en función de las condiciones iniciales. De hecho, si se considera que el condensador de la Figura 4.26 está inicialmente descargado cuando se aplica la tensión del generador U_0 , los parámetros A_1 , A_2 y B de las ecuaciones anteriores (4.123) deben ser negativos, lo cual es debido a que en el estudio realizado en la parte a) de este epígrafe, se supuso para obtener la respuesta natural que el condensador estaba inicialmente cargado a la tensión U_0 , para determinar los parámetros anteriores. En definitiva, en la ecuación (4.122), la respuesta natural es negativa, con objeto de que se cumpla que en $t = 0$, la tensión inicial del condensador sea nula. Para otros tipos de excitación se calculará la solución particular de la ecuación diferencial (4.83).



Comentarios prácticos

Hemos visto que los sistemas de segundo orden responden a la ecuación característica señalada en (4.86) y que repetimos aquí:

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0 \Rightarrow s^2 + \frac{R}{L}Cs + \frac{1}{LC} = 0 \quad (1)$$

y cuyas raíces son de la forma señalada en (4.90), es decir:

$$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (2)$$

Generalmente estos sistemas se suelen expresar de una forma estándar, en función de dos nuevas magnitudes denominadas: **factor de amortiguamiento** ζ y **pulsación natural no amortiguada** o simplemente **pulsación natural o de resonancia** ω_n . Para transformar (1) a esta forma estándar, se define primeramente la resistencia crítica R_{cr} , que es el valor de la resistencia eléctrica R que hace que desaparezca el radical de las soluciones (2), y cuyo valor es:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3)$$

y el factor de amortiguamiento se define como el cociente entre la resistencia real R y la resistencia crítica R_{cr} , es decir:

$$\zeta = \frac{R}{R_{cr}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4)$$

La pulsación natural es la correspondiente a la resonancia del circuito RLC y cuyo valor es igual a la raíz de (1) cuando no existe resistencia eléctrica, y su expresión es:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5)$$

el valor del producto $2\zeta\omega_n$ es igual a:

$$2\zeta\omega_n = 2 \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{L} \quad (6)$$

y por consiguiente la ecuación característica (1) de un circuito de segundo orden, se puede escribir en la forma estándar del modo siguiente:

$$s^2 + \frac{R}{L}Cs + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (7)$$

de tal modo que las raíces señaladas en (2) se pueden escribir, en función de estas nuevas magnitudes estándar, de la forma siguiente:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (8)$$

al variar el factor de amortiguamiento ζ desde cero a infinito (que corresponde según (4) al rango de variación de la resistencia R desde cero a infinito), las raíces de la ecuación característica irán cambiando dentro de un plano complejo tal como se señala en la Figura 4.28. Y así se tiene:

a) **Para $\zeta = 0$. Sistema sin amortiguamiento.** Las raíces de (8) son entonces:

$$s_1, s_2 = \pm j\omega_n \quad (9)$$

es decir las raíces son imaginarias puras y corresponden a los puntos A y B de la Figura 4.28 y que se señalan con una cruz (ver el diagrama de polos y ceros que se explica en el Epígrafe 4.8 de este capítulo).

b) **Para $0 < \zeta < 1$. Sistema subamortiguado o con descarga oscilatoria.** En este caso, el radical de las soluciones (8) es negativo, por lo que se puede poner así:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (10)$$

lo que indica que las raíces son complejas conjugadas, y corresponden a los puntos A' y B' señalados en la Figura 4.28. Se puede demostrar que el lugar geométrico de las raíces es una circunferencia de radio igual a la pulsación natural ω_n . Obsérvese para ello que en la Figura 4.28 si se toma el ángulo $\theta = \arccos \zeta$, y siendo el radio de la semicircunferencia ω_n , se cumple:

$$|OP| = \omega_n \cos \theta = \zeta\omega_n \quad ; \quad |A'P| = |B'P| = \omega_n \sin \theta = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (11)$$

valores que corresponden a la parte real y a la parte imaginaria de las raíces (10).

c) **Para $\zeta = 1$. Sistema con amortiguamiento crítico.** De acuerdo con (8) se obtienen dos raíces reales iguales y negativas de valor:

$$s_1, s_2 = -\omega_n \quad (12)$$

que corresponden a los puntos A'' y B'' situados en la parte negativa del eje real.

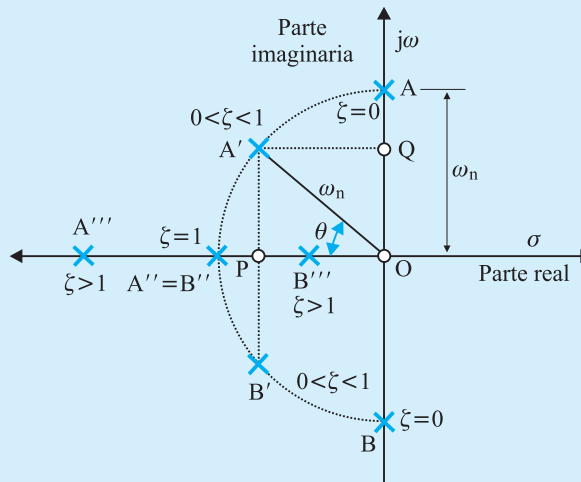


Figura 4.28 Lugar de las raíces de la ecuación característica de un sistema de segundo orden

- d) **Para $\zeta > 1$. Sistema sobreamortiguado o con descarga aperiódica.** En este caso, el radical de las soluciones (8) es positivo, y se obtienen dos raíces reales puras:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (13)$$

la raíz más negativa corresponde al punto A''' situado en el eje real y que se aleja del eje imaginario, y la menos negativa da lugar al punto B''' que está situado en el eje real y que se acerca al origen, tal como se muestra en la Figura 4.28. Esta figura se denomina lugar geométrico de las raíces de la ecuación (7), que es la forma normalizada o estándar de un sistema de segundo orden (e incluso es prácticamente válido para sistemas de orden superior al segundo). Este diagrama es importante no solamente en el análisis del funcionamiento transitorio de los circuitos eléctricos, sino también en el estudio de los sistemas de control, porque permite prever el funcionamiento de un sistema, conociendo la ubicación de las raíces en el plano complejo de la Figura 4.28, en el que señalan los valores del factor de amortiguamiento en cada uno de los puntos y/o zonas. En el Epígrafe 4.8 se desarrollan estos conceptos.

Las soluciones (4.97), (4.106) y (4.118) que definían el comportamiento natural de un circuito *RLC*, se pueden expresar en función de los parámetros anteriores, sustituyendo los parámetros *a*, *b*, α y ω_d allí señalados por los siguientes:

$$a = \zeta\omega_n \quad ; \quad b = \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad ; \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad ; \quad \alpha = \theta = \arctg \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta} \quad (14)$$

y lo mismo sucede con las respuestas forzadas expresadas en (4.123), que en la forma estándar y para cada valor del amortiguamiento son las que se indican a continuación.

- a) **Para $\zeta = 0$. Sistema sin amortiguamiento.** Los polos están situados en el eje imaginario y la respuesta forzada es oscilatoria:

$$u_C(t) = U_0[1 - \cos \omega_n t] \quad (15)$$

- b) **Para $0 < \zeta < 1$. Sistema subamortiguado o con descarga oscilatoria.** Los polos se sitúan en el semiplano izquierdo del lugar de raíces y la respuesta forzada es:

$$u_C(t) = U_0 \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \alpha) \right] \quad (16)$$

- c) **Para $\zeta = 1$. Sistema con amortiguamiento crítico.** Los polos son idénticos y reales negativos y la respuesta forzada es:

$$u_C(t) = U_0[1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}] \quad (17)$$

- d) Para $\zeta > 1$. **Sistema sobreamortiguado o con descarga aperiódica.** Los polos se encuentran en el eje real negativo y la respuesta forzada es:

$$u_C(t) = U_0 \left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \right] \quad (18)$$

donde s_1 y s_2 tienen los siguientes valores:

$$s_1 = \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad ; \quad s_2 = \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.8

El circuito de la Figura 4.29a ha alcanzado el régimen permanente con el interruptor cerrado. El interruptor se abre en $t = 0$. Calcular la expresión de la tensión en bornes del condensador para $t > 0$.

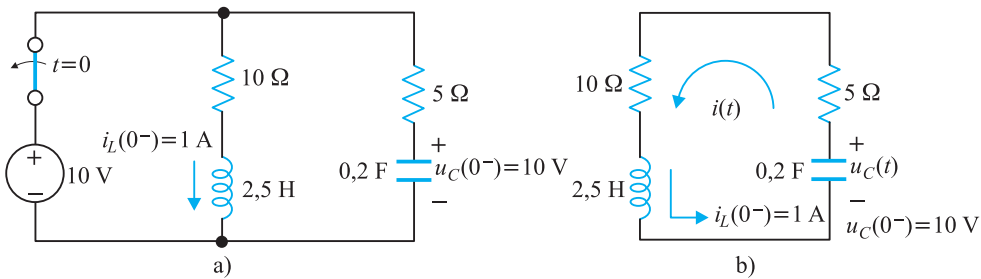


Figura 4.29 Ejemplo de aplicación 4.8

Solución

En régimen permanente para $t < 0$, la bobina se comporta como un cortocircuito, por lo que la corriente que circula por ella es:

$$i_L(0^-) = \frac{10}{10} = 1 \text{ A}$$

Para $t < 0$, en régimen permanente el condensador es equivalente a un circuito abierto, por lo que su tensión en bornes coincidirá con la tensión de la alimentación:

$$u_C(0^-) = 10 \text{ V}$$

En la Figura 4.29a se muestran los sentidos y polaridades de $i_L(0^-)$ y $u_C(0^-)$. Por las condiciones de continuidad se cumplirá:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 1 \text{ A} \quad ; \quad u_C(0^-) = u_C(0^+) = 10 \text{ V}$$

En la Figura 4.29b se muestra el circuito para $t > 0$, que responde a la siguiente ecuación de funcionamiento:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

donde $L = 2,5 \text{ H}$; $C = 0,2 \text{ F}$; $R = 10 + 5 = 15 \Omega$, por consiguiente se obtiene:

$$0,5 \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 3 \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$0,5s^2 + 3s + 1 = 0 \Rightarrow s_1 = -0,354 \quad ; \quad s_2 = -5,64$$

por consiguiente se tendrá una descarga aperiódica que responderá a la ecuación general:

$$u_C(t) = A_1 e^{-0,354t} + A_2 e^{-5,64t}$$

Para calcular A_1 y A_2 es preciso trabajar con las condiciones iniciales. Sabemos por un lado que $u_C(0^+) = 10$ V y por consiguiente se tendrá:

$$u_C(0^+) = 10 = A_1 + A_2$$

por otro lado, la corriente $i(t)$ en la malla puede obtenerse así:

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0,2[-0,354 A_1 e^{-0,354t} - 5,64 A_2 e^{-5,64t}]$$

es decir:

$$i(t) = -0,0708 A_1 e^{-0,354t} - 1,13 A_2 e^{-5,64t}$$

pero $i(0^+) = 1$ A y por consiguiente:

$$i(0^+) = 1 = -0,0708 A_1 - 1,13 A_2$$

de estas dos condiciones iniciales se deduce:

$$A_1 = 11,61 \quad ; \quad A_2 = -1,61$$

por lo que la expresión final de $u_C(t)$ será:

$$u_C(t) = 11,61 e^{-0,177t} - 1,61 e^{-2,82t}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.9

El circuito de la Figura 4.30, ha alcanzado el régimen permanente con el interruptor abierto. El interruptor se cierra en $t = 0$. Determinar la d.d.p. $u_C(t)$ en bornes del condensador para $t > 0$.

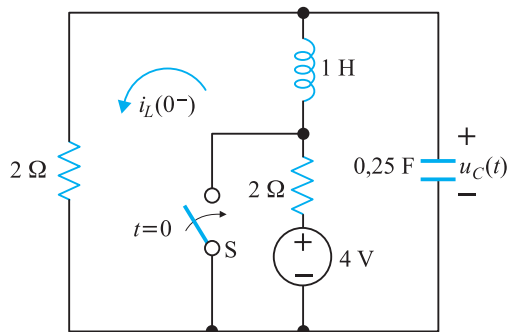


Figura 4.30 Ejemplo de aplicación 4.9

Solución

En la Figura 4.31a se muestra el esquema de la red para $t < 0$. Como quiera que el circuito ha alcanzado el régimen permanente en esta situación; al ser la alimentación de c.c., la bobina se ha sustituido por un cortocircuito y el condensador por un circuito abierto. De este modo resulta:

$$i_L(0^-) = \frac{4}{4} = 1 \text{ A} \quad ; \quad u_C(0^-) = 2i_L(0^-) = 2 \text{ V}$$

y por las condiciones de continuidad se cumple:

$$i_L(0^+) = 1 \text{ A} \quad ; \quad u_C(0^+) = 2 \text{ V}$$

En la Figura 4.31b se ha dibujado el circuito *congelado* en el instante $t = 0^+$. En este circuito se cumple:

$$i_R(0^+) = \frac{2 \text{ V}}{2 \Omega} = 1 \text{ A}$$

por lo que al aplicar el primer lema de Kirchhoff al nudo A resulta:

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+) = 1 - 1 = 0$$

como quiera además que en el condensador se cumple:

$$i_C(0^+) = C \left[\frac{du_C(t)}{dt} \right]_{t=0^+} = Cu'_C(0^+)$$

resulta:

$$u'_C(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C} = 0$$

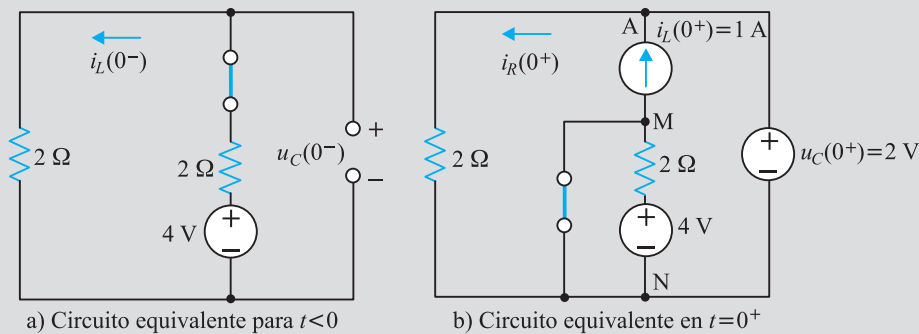


Figura 4.31 Circuitos equivalentes

En la Figura 4.32 se muestra a la izquierda el esquema del circuito para $t > 0$ y a la derecha un circuito equivalente simplificado en el que aparecen dos redes independientes entre sí.

En el nudo A del circuito de la derecha de la Figura 4.32 se cumple:

$$i_R + i_L + i_C = 0$$

es decir:

$$\frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u(t) dt + C \frac{du(t)}{dt} = 0$$

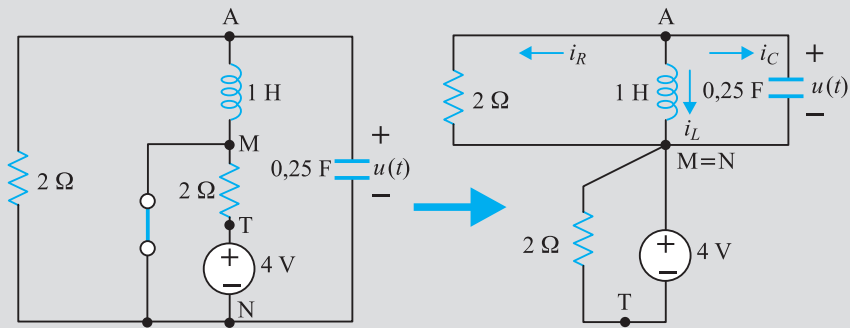


Figura 4.32 Circuito eléctrico equivalente para $t > 0$

que derivando se transforma en:

$$C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = 0$$

que sustituyendo los valores numéricos nos da:

$$0,25 \frac{d^2 u}{dt^2} + 0,5 \frac{du}{dt} + u = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$0,25s^2 + 0,5s + 1 = 0$$

y cuyas soluciones son:

$$s_1, s_2 = -1 \pm j\sqrt{3} \Rightarrow a = 1 \quad ; \quad \omega_d = \sqrt{3}$$

de este modo, la solución de la ecuación diferencial será según (4.113) de la forma:

$$u(t) = e^{-at}[B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sen \omega_d t]$$

es decir:

$$u(t) = e^{-t}[B_1 \cos \sqrt{3}t + B_2 \cos \sqrt{3}t]$$

las condiciones iniciales hemos visto que eran:

$$u_C(0^+) = 2 \text{ V} \quad ; \quad u'_C(0^+) = 0$$

como quiera que $u'(t)$ vale:

$$u'(t) = -e^{-t}[B_1 \cos \sqrt{3}t + B_2 \sen \sqrt{3}t] + e^{-t}[-\sqrt{3} B_1 \sen \sqrt{3}t + \sqrt{3} B_2 \cos \sqrt{3}t]$$

resultará:

$$u(t = 0) = 2 = B_1 \quad ; \quad u'(t = 0) = 0 = -B_1 + \sqrt{3} B_2$$

y por consiguiente las constantes arbitrarias valdrán:

$$B_1 = 2 \quad ; \quad B_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

de este modo la tensión en bornes del condensador será:

$$u(t) = 2e^{-t} \left[\cos \sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \sqrt{3}t \right]$$

o de una forma más compacta:

$$u(t) = \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{3}t + 60^\circ)$$

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.10

En el circuito de la Figura 4.33, el interruptor se cierra en $t = 0$. Siendo las condiciones iniciales: $u_C(0^-) = 5 \text{ V}$; $i_L(0^-) = 1 \text{ A}$. Calcular: a) d.d.p. $u_C(t)$ en bornes del condensador; b) corriente $i(t)$ suministrada por el generador.

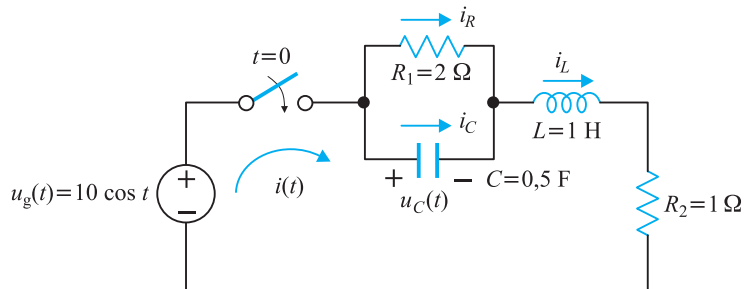


Figura 4.33 Ejemplo de aplicación 4.10

Solución

a) Aplicando el segundo lema de Kirchhoff a la malla del circuito resulta:

$$u_g(t) = u_C(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} + R_2 i_L$$

ahora bien, en el nudo A se cumple:

$$i_L = i_R + i_C = \frac{u_C}{R_1} + C \frac{du_C}{dt}$$

que al sustituir en la ecuación anterior nos da:

$$u_g(t) = LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \left[\frac{L}{R_1} + R_2 C \right] \frac{du_C(t)}{dt} + \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \right]$$

y teniendo en cuenta los valores de los parámetros resulta:

$$0,5 \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{du_C(t)}{dt} + 1,5 u_C = 10 \cos t \quad (1)$$

la respuesta natural es la solución de la ecuación homogénea:

$$0,5 \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{du_C(t)}{dt} + 1,5 u_C = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$0,5s^2 + s + 1,5 = 0$$

que da lugar a las raíces:

$$s_1, s_2 = -1 \pm j\sqrt{2}$$

por lo que la respuesta natural será:

$$u_{Cn}(t) = e^{-t} [B_1 \cos \sqrt{2}t + B_2 \sin \sqrt{2}t]$$

la respuesta forzada corresponde a la solución particular de la ecuación diferencial (1), que equivale a la solución en régimen permanente de un circuito alimentado por un generador de c.a. de pulsación $\omega = 1$ rad/s (ya que el valor instantáneo del generador es $10 \cos t$). Podemos operar directamente la ecuación (1) en el plano complejo, sustituyendo el operador derivada primera por $j\omega = j1$, y la derivada segunda por $(j\omega)^2$. De este modo la ecuación fasorial correspondiente a 1 será:

$$-0,5 \underline{U}_C + j \underline{U}_C + 1,5 \underline{U}_C = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$$

cuya solución compleja es:

$$\underline{U}_C = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{1 + j1} = 5 \angle -45^\circ$$

es decir, la respuesta forzada en el dominio del tiempo es igual a:

$$u_{Cp}(t) = 5\sqrt{2} \cos(t - 45^\circ)$$

de este modo la respuesta completa de (1) es:

$$u_C(t) = u_{Cn}(t) + u_{Cp}(t) = e^{-t} [B_1 \cos \sqrt{2}t + B_2 \sin \sqrt{2}t] + 5\sqrt{2} \cos(t - 45^\circ)$$

las constantes arbitrarias se determinan a partir de las condiciones iniciales, resultando:

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 5 = B_1 + 5\sqrt{2} \cos(-45^\circ)$$

de donde se deduce $B_1 = 0$, y por consiguiente se tiene:

$$u_C(t) = B_2 e^{-t} \sin \sqrt{2}t + 5 \cos \sqrt{2}(t - 45^\circ)$$

la otra condición inicial procede de $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1$ A y como quiera además que se cumple:

$$i_L = \frac{u_C}{R_1} + C \frac{du_C}{dt} = 0,5u_C + 0,5 \frac{du_C}{dt} \quad (2)$$

y que:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -B_2 e^{-t} \sin \sqrt{2}t + \sqrt{2} B_2 e^{-t} \cos \sqrt{2}t - 5\sqrt{2} \sin(t - 45^\circ)$$

resulta:

$$i_L(0^+) = 1 = 0,5u_C(0^+) + 0,5 \left[\frac{du_C}{dt} \right]_{t=0}$$

es decir:

$$1 = 0,5 \cdot 5 + 0,5[\sqrt{2} B_2 - 5\sqrt{2} \sin(t - 45^\circ)]$$

de donde se deduce:

$$B_2 = -4\sqrt{2}$$

y por consiguiente $u_C(t)$ valdrá finalmente:

$$u_C(t) = -4\sqrt{2} e^{-t} \sin \sqrt{2}t + 5\sqrt{2} \cos(t - 45^\circ) \text{ voltios}$$

b) La corriente suministrada por el generador $i(t)$ será igual a la que atraviesa la bobina $i_L(t)$, por lo que llevando la expresión de $u_C(t)$ a la ecuación (2) se obtiene finalmente:

$$i(t) = -4e^{-t} \cos \sqrt{2}t + 5 \cos t \text{ amperios}$$

que es la respuesta solicitada.

4.7. Transformada de Laplace

En las secciones precedentes se ha estudiado el comportamiento transitorio de los circuitos eléctricos por métodos clásicos, esto es, calculando la respuesta de una red en dos fases: en primer lugar determinando la respuesta natural de la red $f_n(t)$ como solución de la homogénea de la ecuación diferencial, y en segundo lugar, calculando la respuesta permanente $f_p(t)$ como solución particular de la ecuación diferencial. La respuesta completa $f_c(t) = f_n(t) + f_p(t)$ incorpora unas constantes arbitrarias en su componente natural, que se determinan con ayuda de las condiciones iniciales. Como ya se ha podido comprobar en los epígrafes anteriores, la determinación de las constantes requiere un estudio lento y cuidadoso de la red y una buena comprensión de los fenómenos físicos que tienen lugar en la conmutación de elementos pasivos, sobre todo tratándose de bobinas y condensadores y en redes de alto orden.

Para facilitar el estudio de transitorios en redes lineales de cualquier orden, se emplea con mayor comodidad un método operacional denominado transformada de Laplace. Con

esta técnica se transforman las ecuaciones integrodiferenciales o diferenciales del circuito en ecuaciones algebraicas función de una frecuencia compleja generalizada:

$$s = \sigma + j\omega \quad (4.124)$$

de tal modo, que en las ecuaciones resultantes quedan incluidas las condiciones iniciales como parte de la transformación al dominio s . A continuación se resuelven estas ecuaciones algebraicas y se obtiene la respuesta $F(s)$ que se transforma posteriormente al dominio del tiempo $f(t)$.

En la Figura 4.34 se muestra un esquema que resume de un modo gráfico la resolución de un problema de transitorios, comparando el método clásico con la transformada de Laplace. El lector encontrará una gran analogía entre el cuadro de la Figura 4.34 y el de la Figura 2.11 que se incluía en el Capítulo 2 sobre corriente alterna. Hay que destacar aquí, que la transformación fasorial del Capítulo 2 se aplicaba a excitaciones sinusoidales de frecuencia fija; sin embargo la transformada de Laplace tiene la ventaja de que es mucho más general y se aplica a cualquier tipo de excitación, siempre que la red sea lineal y con parámetros invariantes con el tiempo.

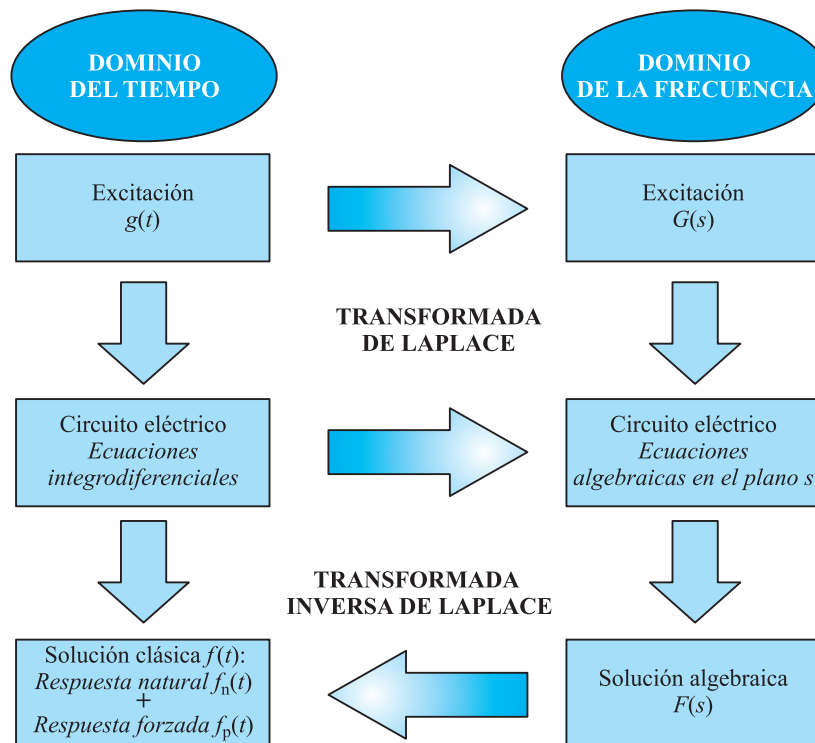


Figura 4.34 Comparación plano tiempo-plano de Laplace

La transformada de Laplace es una transformada integral que se define así:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \quad (4.125)$$

el símbolo $\mathcal{L}$ representa el proceso de transformación y se lee con las palabras: «**La transformada de Laplace de...**». El resultado de la integral es una función de s , de tal modo que la transformada de la función temporal $f(t)$ se designa por $F(s)$. Nótese el uso de la misma letra para $f(t)$ y su transformada $F(s)$, en un caso con minúscula para las funciones del tiempo y en el otro con mayúscula para sus transformadas. Obsérvese que el límite inferior de la integral (4.125) es 0^- , es decir el tiempo inmediatamente anterior a la conmutación; la elección de « 0^- » frente a « 0 », se hace para poder incluir las condiciones iniciales de señales tipo impulso. Exceptuando este caso especial, para cualquier otra forma de onda, es indiferente tal elección.

En el Apéndice 2, se repasa la transformada de Laplace: sus orígenes históricos, teoremas y propiedades. También se definen los tipos de señales básicas que tienen utilidad en el estudio de los circuitos eléctricos: escalón, rampa, impulso o delta de Dirac. Se incluye también la transformada inversa de Laplace y los procedimientos de cálculo de la misma. Es conveniente que el lector que no posea una formación suficiente sobre cálculo operacional, repase este apéndice, antes de continuar con esta lección, ya que se suponen conocidos estos conceptos para poder abordar las aplicaciones de la transformada de Laplace en el análisis transitorio de redes eléctricas que viene a continuación.

■ 4.8. Función de transferencia. Diagrama de polos y ceros

En la mayor parte de los sistemas físicos y en particular en los circuitos eléctricos, las diversas señales, como son las excitaciones de la red (por ejemplo las tensiones de los generadores) y las respuestas en sus elementos (por ejemplo las corrientes en los mismos), están relacionadas por ecuaciones diferenciales lineales. Cuando un sistema tiene una única señal aplicada: la **entrada** y una única salida de interés: la **salida**, se deben eliminar algunas variables entre las ecuaciones para obtener una única ecuación diferencial que relacione la entrada y la salida. Supongamos que la señal de entrada se denomina $x(t)$ y la de salida $y(t)$. Si se transforma la ecuación diferencial (en general íntegro-diferencial) que relaciona $x(t)$ con $y(t)$ mediante la aplicación de la transformada de Laplace, y si se consideran que todas las condiciones iniciales son nulas, entonces la ecuación resultante puede utilizarse para definir una función del sistema $G(s)$ que relaciona la transformada de Laplace de la salida $Y(s)$ respecto a la transformada de Laplace de la entrada $X(s)$. Esta función del sistema o función de red se denomina **función de transferencia** $G(s)$ y es el cociente siguiente:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (4.126)$$

El concepto de sistema entrada-salida se representa en la práctica en la forma de un **diagrama de bloque** (Figura 4.35). La función de transferencia se coloca en el interior del bloque, $X(s)$ es la transformada de la entrada (excitación del bloque) e $Y(s)$ es la transformada de la salida (respuesta del bloque). Las flechas indican que la señal $X(s)$ fluye hacia el bloque y es modificada por $G(s)$ para producir $Y(s)$.

Debe destacarse que la función de transferencia $G(s)$ es una función intrínseca del sistema y es independiente del tipo de excitación. Los polos y ceros de $G(s)$ se deben únicamente al sistema, y el orden del polinomio denominador de $G(s)$ es el orden del sistema. La

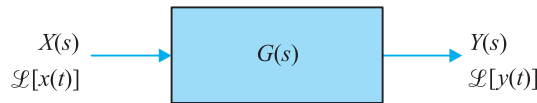


Figura 4.35 Diagrama de bloque

definición de función de transferencia expresada en (4.126) es completamente general y las entradas y salidas pueden ser combinaciones de tensión, corriente, desplazamiento, velocidad, presión, temperatura, etc. Cuando se analiza un sistema ya definido de antemano, es decir cuando es posible plantear la ecuación integro-diferencial que relaciona $x(t)$ con $y(t)$, la determinación de $G(s)$ se realiza como se ha indicado antes, tomando la transformada de Laplace de la ecuación y aplicando la definición (4.126). En el caso de tener que determinar la función de transferencia de un sistema arbitrario (cuya ecuación de comportamiento no se conoce a priori) será preciso introducir una señal arbitraria $x(t)$ y medir la salida $y(t)$; el cociente de las transformadas de ambas funciones según (4.126) será la función de transferencia del sistema. Un procedimiento inteligente que suele utilizarse en los sistemas físicos para la determinación de $G(s)$, es suponer que la excitación aplicada es una delta de Dirac. En este caso y de acuerdo con (81) del Apéndice 2 se cumple:

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (4.127)$$

que llevando a (4.126) nos da:

$$Y(s) = G(s) \quad (4.128)$$

en estas condiciones, se observa que la función de transferencia es igual a la salida del sistema y $G(s)$ **se puede interpretar físicamente como la transformada de la respuesta del sistema a un impulso de Dirac**, $g(t)$ será la correspondiente función del tiempo. Es indudable que un sistema se podría definir entonces de dos modos: 1) en el dominio de Laplace, para lo cual se debería especificar la función de transferencia $G(s)$; 2) en el dominio del tiempo, en el que se debería especificar la respuesta al impulso $g(t)$. De hecho, si uno de los valores es conocido, el otro puede determinarse aplicando transformadas directas o inversas. El concepto de función de transferencia es muy útil en el estudio de los sistemas de control o regulación automática.

La definición de la función de transferencia requiere que el sistema sea lineal, invariante en el tiempo, con variables continuas y condiciones iniciales nulas. La función de transferencia es también más útil cuando el sistema es de parámetros concentrados y cuando no existen retrasos en el transporte y envío de la señal. En general la función de transferencia definida en (4.126) es el cociente de dos polinomios en el dominio de la variable de Laplace s , es decir:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (4.129)$$

en sistemas reales físicos el orden de $P(s)$ será inferior al de $Q(s)$ ya *que la naturaleza integra más que deriva*. La definición (4.126) se puede hacer extensible al campo de la frecuencia compleja $j\omega$, cuando se utilizan señales sinusoidales, sustituyendo la variable de Laplace s por $j\omega$.

Volviendo a la ecuación (4.126), el denominador $Q(s)$ de la función de transferencia se denomina **función característica**, ya que él contiene todas las características físicas del sistema. La **ecuación característica** se forma igualando a cero el polinomio $Q(s)$. Las raíces de esta ecuación se denominan **polos** de la función de transferencia. Las raíces del numerador son los **ceros** de la función de transferencia. El conjunto de los ceros y polos de $G(s)$ se denominan **frecuencias críticas** (valores de s para los cuales $G(s)$ vale cero o infinito). $G(s)$ se puede interpretar como la ganancia del sistema a la frecuencia s . Cuando $G(s)$ tiene un cero en s_1 , significa que la ganancia a esa frecuencia es cero. Si aplicamos por ejemplo una señal de entrada del tipo Ae^{s_1t} , **no hay salida** a esta frecuencia. El sistema bloquea la transmisión de señales a esta frecuencia. Al contrario, si $G(s)$ tiene un polo en s_2 , la ganancia a esa frecuencia es infinita. Existe salida aunque no haya entrada. En otras palabras, la salida del sistema contiene un término Be^{s_2t} aunque no haya una entrada similar. De este modo, los polos son las **frecuencias naturales** del sistema; estas frecuencias se presentan en la salida como resultado del propio sistema y no dependen de ningún modo del tipo de señal que se aplique a la entrada.

Si se considera el esquema específico de la Figura 4.36a en el que la función de transferencia vale:

$$G(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+3)} \quad (4.130)$$

si la entrada aplicada es de la forma: $x(t) = 3e^{-2t}$, cuya transformada de Laplace es:

$$X(s) = \frac{3}{s+2} \quad (4.131)$$

la transformada de Laplace de la salida será:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+3)} \cdot \frac{3}{s+2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} \quad (4.132)$$

donde los valores de los residuos son:

$$\begin{aligned} A &= \left[(s+1) \frac{2s}{(s+1)(s+3)} \cdot \frac{3}{s+2} \right]_{s=-1} = \frac{6 \cdot (-1)}{2 \cdot 1} = -3 \\ B &= \left[(s+2) \frac{2s}{(s+1)(s+3)} \cdot \frac{3}{s+2} \right]_{s=-2} = \frac{6 \cdot (-2)}{(-1) \cdot 1} = 12 \\ C &= \left[(s+3) \frac{2s}{(s+1)(s+3)} \cdot \frac{3}{s+2} \right]_{s=-3} = \frac{6 \cdot (-3)}{(-2) \cdot (-1)} = -9 \end{aligned} \quad (4.133)$$

es decir la descomposición en fracciones parciales de $Y(s)$ es de la forma:

$$Y(s) = \frac{-3}{s+1} + \frac{12}{s+2} + \frac{-9}{s+3} \quad (4.134)$$

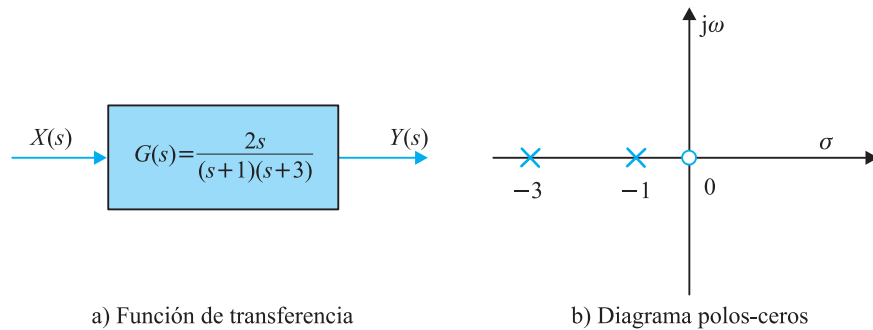


Figura 4.36 Función de transferencia y diagrama polos-ceros

por lo que la repuesta en el dominio del tiempo, es decir la transformada inversa de $Y(s)$, será:

$$y(t) = -3e^{-t} + 12e^{-2t} - 9e^{-3t} \quad (4.135)$$

que se puede escribir de modo equivalente:

$$y(t) = 12e^{-2t} + [-3e^{-t} - 9e^{-3t}] \quad (4.136)$$

el primer sumando es la **componente forzada** (de la misma frecuencia que la entrada); los dos últimos corresponden a la **respuesta natural o libre** debida a las frecuencias naturales del sistema.

Para representar los polos y ceros de funciones de transferencia se utiliza un plano complejo en el que el eje de abscisas es el eje real y el eje de ordenadas es el eje imaginario. En el caso que nos ocupa de la Figura 4.36a la función de transferencia $G(s)$ es igual a:

$$G(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+3)} \quad (4.137)$$

que tiene un cero en $s = 0$ y dos polos en $s = -1$ y $s = -2$. En la Figura 4.36b se han representado el cero y los dos polos de la función anterior, señalando con O el cero de la función de transferencia y con X los polos de la misma. De las expresiones (4.126) y (4.128) y del gráfico de polos y ceros de la Figura 4.36b se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1. El polo de la función de entrada es el que determina la **respuesta forzada** (en nuestro caso el polo está en $s = -2$, por ser la entrada de la forma $x(t) = 3e^{-2t}$).
2. Los polos de la función de transferencia determinan la forma de la **respuesta natural** (los polos de $G(s)$ situados en $s = -1$ y en $s = -3$ producen las salidas $3e^{-t}$ y $9e^{-3t}$).
3. Un polo en el eje real produce una **salida exponencial** de la forma $e^{-\alpha t}$, donde $-\alpha$ es la localización del polo en el eje real. Por consiguiente cuanto más se sitúe a la izquierda del eje real negativo el polo respectivo, tanto más rápida será la respuesta transitoria y por tanto se anulará en un tiempo más breve. (Por ejemplo la respuesta e^{-3t} es más rápida que e^{-2t}).
4. Los ceros de $G(s)$ y de $X(s)$ determinan las **amplitudes y signos** tanto de las respuestas de régimen permanente o estacionaria (respuesta forzada) como de régimen

transitorio (respuesta natural). (Esto puede comprobarse observando la determinación de los coeficientes A, B y C calculados antes).

De este modo observando los diagramas polo-cero de la función de transferencia del sistema $G(s)$ y los polos de la función de excitación o entrada $X(s)$, se puede escribir la respuesta temporal del sistema por simple inspección. Todos estos conceptos son importantes en el estudio del régimen transitorio de los circuitos eléctricos, en la síntesis de circuitos, en el análisis dinámico de las máquinas eléctricas y sobre todo en el campo de la regulación automática o ingeniería de control.

■ 4.9. Aplicaciones de la transformada de Laplace en el estudio de transitorios de circuitos eléctricos

Como ya conoce sobradamente el lector de los epígrafes anteriores, el estudio clásico de transitorios requiere la aplicación de los lemas de Kirchhoff a las mallas y nudos de la red. La aplicación de estos lemas conduce, en general, a un juego de ecuaciones integrodiferenciales que representan el comportamiento del sistema eléctrico. Planteadas estas ecuaciones de funcionamiento, la resolución de las mismas podría realizarse a primera vista, aplicando las transformaciones de Laplace de aquéllas. Sin embargo, esta forma de proceder es muy lenta, por lo que resulta más útil transformar directamente el circuito al dominio de Laplace (plano s), de tal modo que se incorporen en esta nueva red las condiciones iniciales. La idea es análoga al proceso seguido en el estudio de los circuitos de c.a. en el que se transformaba la red en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia compleja (plano fasorial). Con el circuito transformado, la aplicación directa de los lemas de Kirchhoff dará lugar a un juego de ecuaciones algebraicas de más fácil manipulación. Estudiando la respuesta de este circuito se obtendrá una solución en el *plano s* a la que aplicando la *transformada inversa o antitransformada* permitirá conocer la expresión en el dominio del tiempo.

Para poder realizar este proceso de *transformación de dominios*, es preciso analizar previamente la respuesta de los elementos pasivos simples y conocer los esquemas equivalentes a que dan lugar.

■ 4.9.1. Respuestas de los elementos pasivos simples en el plano s

a) Resistencia

En la Figura 4.37a se ha representado una resistencia en el dominio del tiempo.

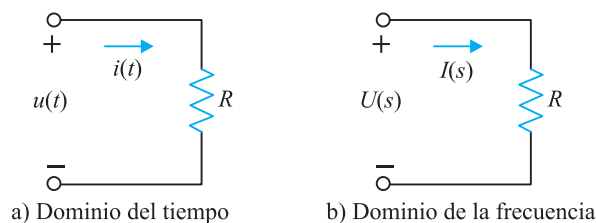


Figura 4.37 Circuito equivalente de una resistencia

De acuerdo con la ley de Ohm, sabemos que se cumple:

$$u(t) = Ri(t) \quad (4.138)$$

la relación anterior en el dominio de Laplace será:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[Ri(t)] \Rightarrow U(s) = RI(s) \quad (4.139)$$

donde:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] \quad ; \quad I(s) = \mathcal{L}[i(t)] \quad (4.140)$$

en la Figura 4.37b se muestra el circuito equivalente correspondiente a la ecuación (4.139) y que representa en definitiva un circuito en el plano s . El lector puede comprobar la analogía entre las ecuaciones (4.138) y (4.139).

b) Inductancia

En la Figura 4.38 se ha representado una bobina en el dominio del tiempo. Sabemos que la relación entre la tensión aplicada $u(t)$ y la corriente $i(t)$ es igual a:

$$u(t) = L \frac{di}{dt} \quad (4.141)$$

la relación anterior en el dominio de Laplace será:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}\left[L \frac{di}{dt}\right] \quad (4.142)$$

que teniendo en cuenta la ecuación (14) del Apéndice 2, que nos da la transformada de Laplace de la derivada, resulta:

$$U(s) = L [sI(s) - i_L(0^-)] \quad (4.143)$$

donde $i_L(0^-)$ representa la corriente inicial de la bobina. La ecuación anterior es equivalente a:

$$U(s) = LsI(s) - Li_L(0^-) \quad (4.144)$$

ecuación que responde al circuito equivalente mostrado en la Figura 4.38b (al aplicar el segundo lema de Kirchhoff a este circuito se obtiene la ecuación (4.144)). Es importante hacer notar que la asociación serie de elementos mostrados en la Figura 4.38b en el dominio s representa el circuito equivalente de una inductancia en el dominio del tiempo. Uno

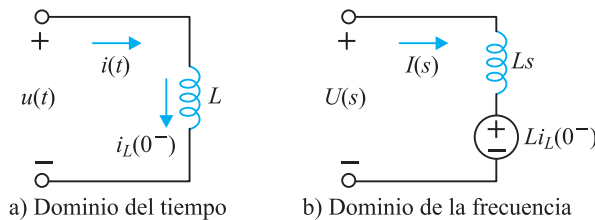


Figura 4.38 Circuito equivalente de una inductancia

de los elementos es una inductancia de valor Ls ohmios, el otro es una fuente de c.c., que se introduce para incluir la condición inicial de corriente previa en la bobina. El valor de la tensión de esta fuente es $Li_L(0^-)$ y con la polaridad mostrada en la Figura 4.38b para que cumpla la ecuación (4.144). En definitiva, el sentido de elevación de tensión de este generador (que va de su terminal $-$ a su terminal $+$) coincide con el sentido de la corriente inicial de la bobina. Obsérvese que si las condiciones iniciales fueran nulas, el circuito equivalente de la Figura 4.38b sería análogo al de la Figura 2.14b del Capítulo 2 de corriente alterna, sin más que sustituir s por $j\omega$.

c) Capacidad

En la Figura 4.39a se ha representado un condensador en el dominio del tiempo. Sabemos que la relación entre $u(t)$ e $i(t)$ viene expresada por:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \quad (4.145)$$

la relación anterior en el dominio de Laplace será:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt\right] \quad (4.146)$$

que teniendo en cuenta la ecuación (25) del Apéndice 2, que nos da la transformada de Laplace de la integral, resulta:

$$U(s) = \frac{1}{C} \left[\frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 i(t) dt \right] \quad (4.147)$$

la integral que aparece en la expresión anterior representa la carga $q(0^+)$ que ha adquirido el condensador desde el tiempo $-\infty$ hasta el tiempo 0^- . Como quiera que además el cociente entre la carga y la capacidad es la d.d.p. se podrá escribir:

$$U(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{u_C(0^-)}{s} \quad (4.148)$$

donde $u_C(0^-)$ representa el potencial inicial en bornes del condensador. En la Figura 4.39b se muestra el circuito equivalente a que responde (4.148) constituido por una capacidad de impedancia $1/Cs$ Ω en serie con una fuente de c.c. de valor $u_C(0^-)/s$ donde $u_C(0^-)$ representa la tensión inicial del condensador. Obsérvese, comparando las Figuras 4.39a y 4.39b

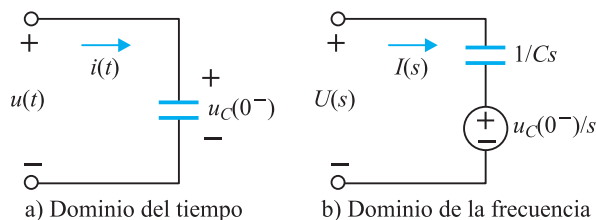


Figura 4.39 Circuito equivalente de un condensador

que la polaridad del generador de tensión es la misma que $u_C(0^-)$. Por otro lado, si las condiciones iniciales son nulas, el lector comprobará la gran analogía del circuito de la Figura 4.39b con el de la Figura 2.16b del Capítulo 2 de c.a. (lo que allí se expresa por $j\omega$ aquí representa s).

d) Impedancia y admitancia

Este término solamente se define en el dominio s y cuando se suponen las condiciones iniciales nulas, se designa con el símbolo $Z(s)$ y es el cociente entre $U(s)$ e $I(s)$ y tiene dimensiones de ohmios:

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)} \quad [\Omega] \quad (4.149)$$

las relaciones entre $U(s)$ e $I(s)$ para los elementos pasivos simples, con las condiciones iniciales igual a cero, se deducen de (4.139), (4.144) y (4.148) respectivamente y son:

$$U(s) = RI(s) \quad ; \quad U(s) = LsI(s) \quad ; \quad U(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \quad (4.150)$$

de este modo las impedancias de estos elementos en el plano s , son respectivamente:

$$Z_R(s) = R \quad ; \quad Z_L(s) = Ls \quad ; \quad Z_C(s) = \frac{1}{Cs} \quad (4.151)$$

Recuérdese del Capítulo 2 que las impedancias de los elementos pasivos simples en el régimen permanente sinusoidal respondían a las expresiones complejas:

$$Z_R(j\omega) = R \quad ; \quad Z_L(j\omega) = j\omega L \quad ; \quad Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \quad (4.152)$$

comparando (4.151) con (4.152) reconocemos nuevamente que las impedancias complejas representan un caso especial de las impedancias en el plano de Laplace, en las que el valor de s toma un valor específico: $s = j\omega$, siendo ω la pulsación de la señal sinusoidal. La ecuación (4.149) representa la ley de Ohm generalizada aplicada en el plano s .

De un modo análogo al que se hizo al estudiar la c.a. se puede definir el concepto de admitancia $Y(s)$ por la relación:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} \quad [\text{siemens}] \quad (4.153)$$

que es la inversa de la impedancia y por ello se mide en siemens. Los valores correspondientes a los elementos pasivos simples son:

$$Y_R(s) = \frac{1}{R} \quad ; \quad Y_L(s) = \frac{1}{Ls} \quad ; \quad Y_C(s) = Cs \quad (4.154)$$

Al igual que se hizo en el Capítulo 2, se pueden obtener reglas para la asociación de impedancias y admitancias. Así si existen impedancias en serie, la impedancia equivalente será:

$$Z(s) = \sum_1^n Z_i(s) \quad (4.155)$$

y para admitancias en paralelo, resulta:

$$Y(s) = \sum_1^n Y_i(s) \quad (4.156)$$

donde $Y(s)$ representa el valor equivalente. Como quiera que los lemas de Kirchhoff son lineales, podremos aplicar las técnicas de mallas, nudos y otros teoremas de circuitos estudiados en los Capítulos 1 y 2, también en el plano s de Laplace, por lo que no será necesario repetirlos aquí.

A modo de resumen, a continuación se indican los pasos a seguir cuando se desea estudiar un circuito eléctrico por la técnica de la transformada de Laplace:

1. Determinar las condiciones iniciales en los elementos que almacenan energía en la red es decir, corrientes $i_L(0^-)$ en las bobinas y tensiones $u_C(0^-)$ en los condensadores.
2. Transformar la red en el dominio del tiempo en una red equivalente en el dominio de Laplace. Para ello:
 - a) Sustituir cada resistencia por su impedancia $Z(s) = R$.
 - b) Sustituir cada bobina por su impedancia $Z(s) = Ls$ en serie con una fuente de tensión continua de magnitud $Li_L(0^-)$, con su terminal $+$ en el lado hacia el que apunta la corriente inicial $i_L(0^-)$.
 - c) Sustituir cada condensador por su impedancia $Z(s) = 1/Cs$, en serie con una fuente de tensión continua de valor $u_C(0^-)/s$, con la misma polaridad que $u_C(0^-)$.
 - d) Sustituir las fuentes de tensión $u_g(t)$ y de corriente $i_g(t)$ existentes en la red por sus transformadas de Laplace, aplicando la definición (4.125). Puede ser muy útil para realizar este paso, el utilizar las técnicas de sintetización de ondas que se explica en el Epígrafe A.2.5 del Apéndice 2.
3. Escribir las ecuaciones correspondientes al método de análisis elegido: mallas, nudos, etc. (es evidente que en el análisis por nudos se deben transformar previamente los generadores de tensión en generadores de corriente, incluyendo aquéllos que representan las condiciones iniciales). Despejar a continuación las respuestas del circuito: corrientes de malla o tensiones de nudo en su caso, mediante cálculo algebraico simple.
4. Determinar las transformadas inversas o antitransformadas de las respuestas basándose en la técnica de descomposición en fracciones parciales que se muestra en el Epígrafe A.2.7 del Apéndice 2, y con ayuda de la Tabla A.2.1 de ese apéndice. Con ello se determinarán las respuestas en el dominio del tiempo deseadas. Conviene finalmente realizar alguna prueba de consistencia de la solución: comprobar que las respuestas cumplen las condiciones iniciales y finales, interpretar físicamente los resultados que se obtienen, etc.

Veamos ahora algunos ejemplos de aplicación en los que pueden comprobarse los conceptos anteriores.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.11

En el circuito de la Figura 4.40a determinar la corriente $i(t)$ que circula por la bobina de 5 H cuando se cierra el interruptor S en $t = 0$.

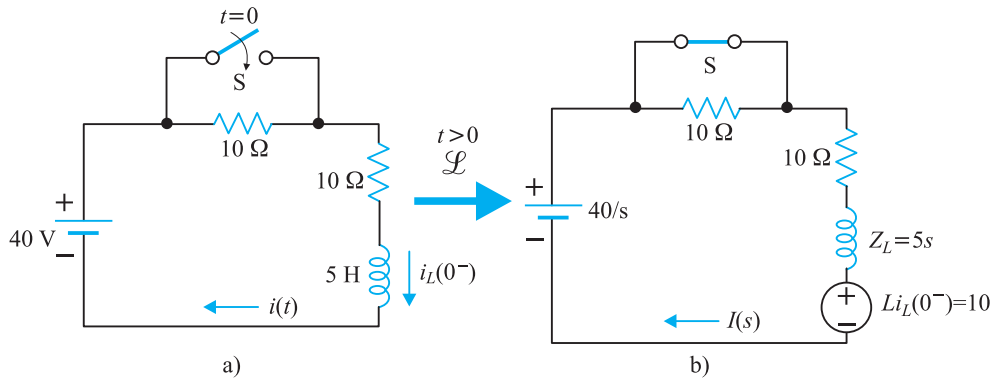


Figura 4.40 Ejemplo de aplicación 4.11

Solución

PASO 1:

La corriente inicial en la bobina es:

$$i_L(0^-) = \frac{40}{10 + 10} = 2 \text{ A}$$

téngase en cuenta que en régimen permanente en c.c. la impedancia de una bobina es cero.

PASO 2:

El circuito transformado para $t > 0$ es el indicado en la Figura 4.40b. Se observa que la bobina se convierte en una impedancia $Ls = 5s$ en serie con un generador $Li_L(0^-) = 5 \cdot 2 = 10$ voltios. La transformada de la tensión de excitación representada por un valor constante de 40 voltios es $40/s$.

PASO 3:

La ecuación del circuito transformado es:

$$\frac{40}{s} + 10 = [10 + 5s]I(s)$$

que al despejar $I(s)$ nos da:

$$I(s) = \frac{\frac{40}{s} + 10}{10 + 5s} = \frac{40 + 10s}{s(5s + 10)} = \frac{2(s + 4)}{s(s + 2)}$$

PASO 4:

Para hallar la antitransformada de $I(s)$, se descompone esta corriente en fracciones parciales y resulta:

$$I(s) = \frac{2(s + 4)}{s(s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2}$$

obteniéndose el valor de los residuos siguientes:

$$A = [sI(s)]_{s=0} = \left[\frac{2(s + 4)}{(s + 2)} \right]_{s=0} = \frac{8}{2} = 4$$

$$B = [(s + 2)I(s)]_{s=-2} = \left[\frac{2(s + 4)}{s} \right]_{s=-2} = \frac{2 \cdot 2}{-2} = -2$$

en consecuencia:

$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{2}{s + 2}$$

y la transformada inversa será:

$$i(t) = 4 - 2e^{-2t} \text{ para } t > 0$$

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.12

El interruptor S de la Figura 4.41a se cierra con el tiempo suficiente para que se establezca la corriente de régimen estacionario o permanente en las bobinas. En $t = 0$ se abre el interruptor. Determinar la corriente $i_1(t)$ suministrada por la pila de 100 voltios.

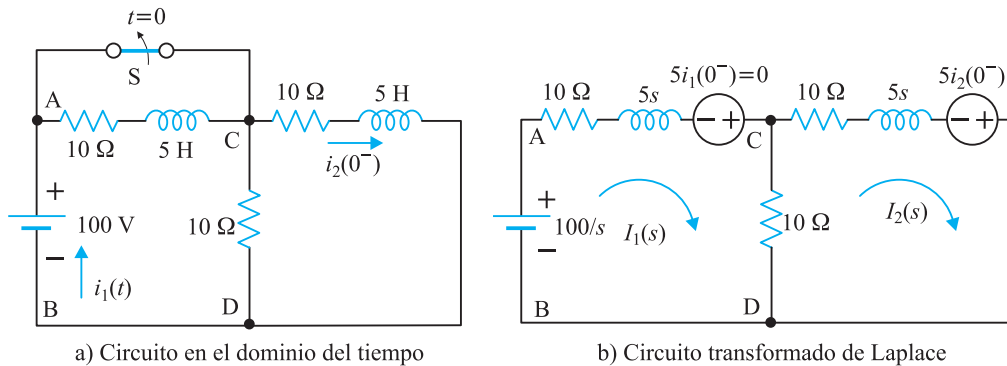


Figura 4.41 Ejemplo de aplicación 4.12

Solución

En $t = 0^-$, la corriente que circula por la bobina de la malla de la izquierda es cero porque está cortocircuitada por el interruptor. La corriente $i_2(0^-)$ en la bobina de la otra malla vale:

$$i_2(0^-) = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

ya que $U_{AB} = U_{CD} = 100 \text{ V}$, y en régimen permanente en c.c. las bobinas equivalen a cortocircuitos. El circuito equivalente en el dominio de Laplace de la frecuencia compleja es el indicado en la Figura 4.41b, donde se ha transformado el generador de 100 V en $100/s$. Aplicando mallas se obtiene:

$$\frac{100}{s} = (10 + 10 + 5s)I_1(s) - 10I_2(s)$$

$$5i_2(0^-) = 50 = -10I_1(s) + (10 + 10 + 5s)I_2(s)$$

resultando:

$$I_1(s) = \frac{40s + 80}{s(s^2 + 8s + 12)}$$

las raíces del denominador o polos de $I_1(s)$ son:

$$s_1 = 0 \quad ; \quad s^2 + 8s + 12 = 0 \Rightarrow s_2 = -2 \quad ; \quad s_3 = -6$$

por consiguiente resulta:

$$I_1(s) = \frac{40s + 80}{s(s^2 + 8s + 12)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 6}$$

donde los valores de los residuos son:

$$A = \left[s \frac{40s + 80}{s(s + 2)(s + 6)} \right]_{s=0} = \frac{80}{12} = 6,67$$

$$B = \left[(s + 2) \frac{40s + 80}{s(s + 2)(s + 6)} \right]_{s=-2} = \frac{40(-2) + 80}{(-2)(-2 + 6)} = 0$$

$$C = \left[(s + 6) \frac{40s + 80}{s(s + 2)(s + 6)} \right]_{s=-6} = \frac{40(-6) + 80}{(-6)(-6 + 2)} = -6,67$$

de esta forma $I_1(s)$ será igual a:

$$I_1(s) = \frac{6,67}{s} - \frac{6,67}{s + 6}$$

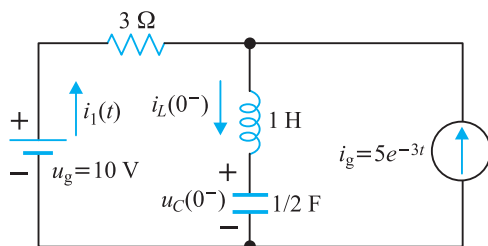
que corresponde a una antitransformada:

$$i_1(t) = 6,67 - 6,67e^{-6t} \text{ amperios} \quad \text{para } t > 0$$

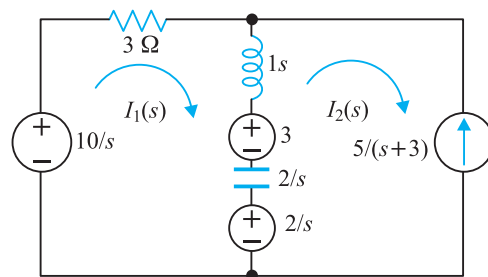


EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.13

En el circuito de la Figura 4.42a, las condiciones iniciales son: $i_L(0^-) = -3 \text{ A}$; $u_C(0^-) = 2 \text{ V}$. Calcular la corriente $i_1(t)$ suministrada por el generador de tensión continua para $t > 0$.



a) Circuito en el dominio del tiempo



b) Circuito en el dominio de la frecuencia

Figura 4.42 Ejemplo de aplicación 4.13

Solución

En la Figura 4.42b se ha representado el circuito equivalente en el dominio de Laplace. Los generadores se han transformado de acuerdo con las expresiones:

$$\mathcal{L}[10u(t)] = \frac{10}{s} \quad ; \quad \mathcal{L}[5e^{-3t}] = \frac{5}{s+3}$$

el circuito transformado de la bobina consiste en una impedancia $Ls = s$, en serie con un generador de tensión de valor $L \cdot i_L(0^-) = 1 \cdot 3 = 3$ V, con la polaridad mostrada, donde el terminal + está en la parte superior, puesto que es el lado hacia el que apunta la corriente inicial real $i_L(0^-) = -3$ A. El circuito equivalente del condensador está representado por una capacidad de impedancia $1/Cs = 2/s$, más un generador de tensión $u_g(0^-)/s = 2/s$.

Aplicando el método de las mallas al circuito de la Figura 4.42b resulta:

$$1) \quad \frac{10}{s} - \frac{2}{s} - 3 = \left(3 + s + \frac{2}{s}\right)I_1(s) - \left(s + \frac{2}{s}\right)I_2(s)$$

$$2) \quad I_2(s) = -\frac{5}{s+3}$$

de donde se deduce:

$$I_1(s) = \frac{-8s^2 - s + 14}{(s+3)(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-8s^2 - s + 14}{(s+3)(s+1)(s+2)}$$

cuyo desarrollo en fracciones parciales es:

$$I_1(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

donde los valores de los residuos son:

$$A = [(s+1)I_1(s)]_{s=-1} = \frac{7}{2} \quad ; \quad B = [(s+2)I_1(s)]_{s=-2} = 16$$

$$C = [(s+3)I_1(s)]_{s=-3} = -\frac{55}{2}$$

por consiguiente la transformada inversa será:

$$i_1(t) = \frac{7}{2} e^{-t} + 16e^{-2t} - \frac{55}{2} e^{-3t}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.14

En el circuito de la Figura 4.43, calcular la d.d.p. $u(t)$ en bornes del generador de corriente si todas las condiciones iniciales son nulas.

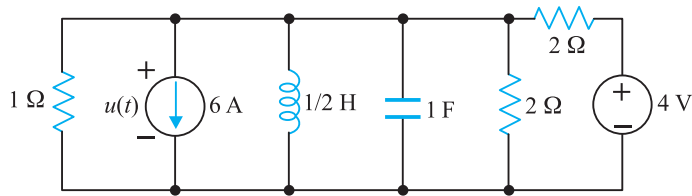


Figura 4.43 Ejemplo de aplicación 4.14

Solución

El circuito transformado es el mostrado en la Figura 4.44; que asociando las impedancias en paralelo con el generador de corriente, y transformando el generador de tensión en corriente se convierte en la red de la Figura 4.45, con los valores siguientes:

$$Y(s) = \frac{1}{1} + \frac{2}{s} + s + \frac{1}{2} = \frac{2s^2 + 3s + 4}{2s} \quad I(s) = \frac{4/s}{2} = \frac{2}{s}$$

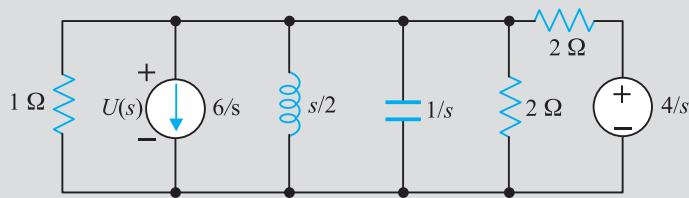


Figura 4.44 Circuito equivalente en el plano s

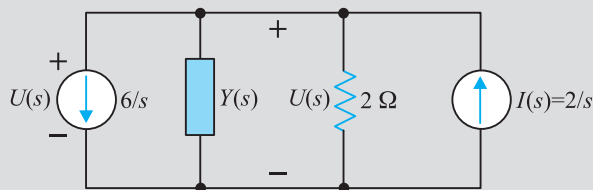


Figura 4.45 Circuito transformado de la Figura 4.44

Aplicando el primer lema de Kirchhoff al nudo formado por la «rama» superior se obtiene:

$$\frac{2}{s} - \frac{6}{s} = \left[\frac{2s^2 + 3s + 4}{2s} + \frac{1}{2} \right] U(s)$$

de donde resulta:

$$U(s) = \frac{-4}{s^2 + 2s + 2} = \frac{-4}{(s + 1)^2 + 1}$$

cuya transformada inversa es:

$$u(t) = -4e^{-t} \sin t \text{ voltios}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.15

En el circuito de la Figura 4.46 el interruptor se cierra en $t = 0$. Calcular la tensión $u(t)$ en el condensador y la corriente i_L en la bobina.

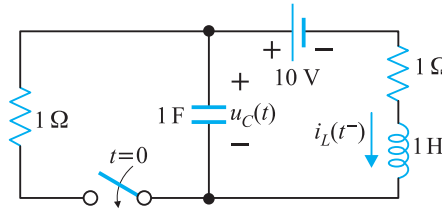


Figura 4.46 Ejemplo de aplicación 4.15

Solución

Para $t < 0$ en régimen permanente, la bobina es un cortocircuito y el condensador un circuito abierto, por ello en la malla de la derecha no circulará corriente y la tensión de 10 V aparecerá en el condensador. De este modo las condiciones iniciales serán:

$$u_C(0^-) = 10 \text{ V} \quad ; \quad i_L(0^-) = 0$$

La red transformada será la que se muestra en la Figura 4.47, que al aplicar el método de las mallas da lugar a las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{10}{s} = \left(1 + \frac{1}{s}\right)I_1(s) - \frac{1}{s}I_2(s)$$

$$\frac{10}{s} - \frac{10}{s} = -\frac{1}{s}I_1(s) + \left(1 + s + \frac{1}{s}\right)I_2(s)$$

de donde se deduce:

$$I_1(s) = \frac{-10(s^2 + s + 1)}{s(s^2 + 2s + 2)} \quad ; \quad I_2(s) = \frac{-10}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

la corriente $i_L(t)$ en la bobina será:

$$i_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_2(s)]$$

ahora bien, descomponiendo $I_2(s)$ en fracciones parciales resulta:

$$I_2(s) = \frac{-10}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1 - j1} + \frac{B^*}{s + 1 + j1}$$

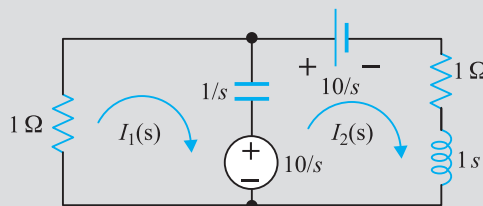


Figura 4.47 Red transformada en el plano de Laplace

cuyos residuos son:

$$A = -5 \quad ; \quad B = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ \quad ; \quad B^* = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

por consiguiente se obtiene:

$$i_L(t) = -5 + 5\sqrt{2}e^{-t} \cos(t - 45^\circ) \text{ amperios}$$

La d.d.p. en bornes del condensador en el plano s será:

$$U_C(s) = -1 \cdot I_1(s) = \frac{10(s^2 + s + 1)}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{C}{s} + \frac{D}{s + 1 - j1} + \frac{D^*}{s + 1 + j1}$$

cuyos residuos son:

$$C = 5 \quad ; \quad D = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \quad ; \quad D^* = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

por lo que la transformada inversa nos da:

$$u_C(t) = 5 + 5\sqrt{2}e^{-t} \cos(t + 45^\circ) \text{ voltios}$$

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.16: Sistema de encendido de automóvil

En la Figura 4.48 se muestra el sistema de encendido por batería de un motor de combustión interna de cuatro cilindros (automóvil). Básicamente está formado por un interruptor de encendido S que cierra el circuito del acumulador (batería), alimentando el primario de un transformador (bobina) cuya salida va en serie con un *ruptor* que se abre y cierra mediante la acción de una leva que pertenece a un eje que engrana con el motor.

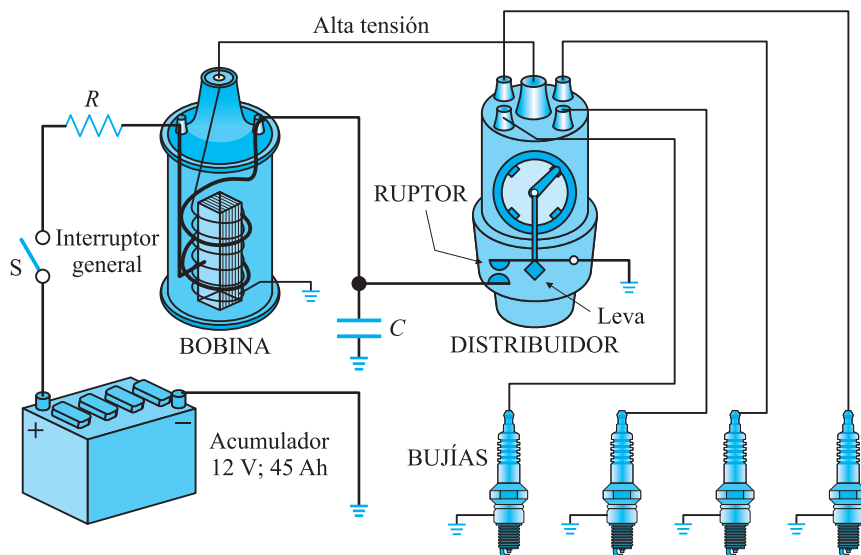


Figura 4.48 Ejemplo de aplicación 4.16

El secundario del transformador va unido a un distribuidor («delco»), que forma un único cuerpo con el ruptor, y cuya misión es llevar la alta tensión del secundario del transformador a las cuatro bujías del motor. En la Figura 4.49 se muestra el esquema eléctrico simplificado de la instalación, donde se considera que en este instante el «ruptor» está cerrado (el tiempo suficiente para que se haya conseguido el régimen permanente). En $t = 0$ se abre el ruptor, los parámetros del circuito de la Figura 4.49 son: resistencia del devanado primario $R = 2 \Omega$; inductancia $L = 2,5 \text{ mH}$; capacidad $C = 1 \mu\text{F}$; tensión del acumulador $U_g = 12 \text{ V}$; espiras del primario $N_1 = 200$; espiras del secundario $N_2 = 20.000$. Calcular: a) expresión de la d.d.p. $u_2(t)$ en el secundario del transformador (se supone que tiene un funcionamiento ideal); b) si la chispa de encendido en la bujía se produce cuando la d.d.p. en sus electrodos (que es la tensión secundaria $u_2(t)$) es igual a 10 kV ¿cuál será el valor del tiempo t , contado a partir del momento de la apertura del ruptor, para el cual se produce la chispa en la bujía?

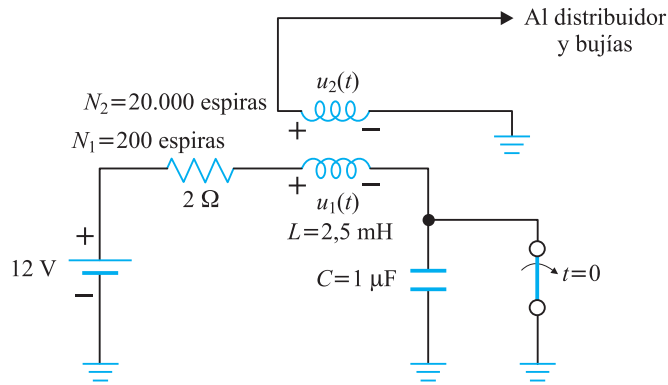


Figura 4.49 Circuito eléctrico equivalente del sistema de encendido de automóvil de la Figura 4.48

Solución

a) Si suponemos que para $t < 0$ se ha alcanzado el régimen permanente en el circuito, estando cerrado el ruptor, la bobina será equivalente a un cortocircuito, por lo que la corriente primaria es:

$$i_L(0^-) = \frac{12}{2} = 6 \text{ A}$$

el condensador en $t < 0$ está cortocircuitado por el ruptor, por lo que se considera que se ha descargado:

$$u_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

Con estas condiciones iniciales, el circuito equivalente en el dominio s del circuito de la Figura 4.49 es el que se muestra en la Figura 4.50. En la malla que se forma, al aplicar el segundo lema de Kirchhoff, se obtiene:

$$I(s) = \frac{\frac{12}{s} + 15 \cdot 10^{-3}}{2 + 2,5 \cdot 10^{-3}s + \frac{10^6}{s}} = \frac{4.800 + 6s}{s^2 + 800s + 4 \cdot 10^8}$$

y la tensión $U_1(s)$ será:

$$U_1(s) = LsI(s) - Li(0^-)$$

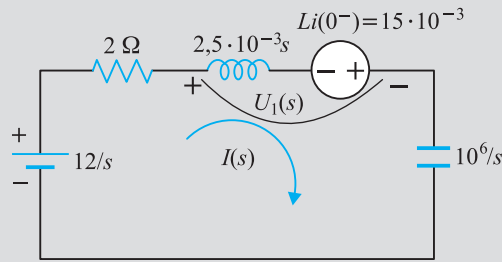


Figura 4.50 Circuito equivalente en el dominio de Laplace

que al sustituir valores nos da:

$$U_1(s) = \frac{6 \cdot 10^6}{s^2 + 800s + 4 \cdot 10^8} = \frac{A}{s + 400 - j20.000} + \frac{A^*}{s + 400 + j20.000}$$

el valor del residuo A es:

$$A = \left[(s + 400 - j20.000) \frac{6 \cdot 10^6}{s^2 + 800s + 4 \cdot 10^8} \right]_{s = -400 + j20.000} = 150 \angle 90^\circ$$

por consiguiente el valor de la tensión primaria inducida en el transformador es:

$$u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_1(s)] = 300e^{-400t} \cos(20.000t + 90^\circ)$$

es decir:

$$u_1(t) = -300e^{-400t} \sin 20.000t \text{ voltios}$$

como quiera que el secundario tiene 100 veces más espiras que el primario:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{20.000}{200} = 100$$

la tensión secundaria $u_2(t)$ será 100 veces la tensión primaria $u_1(t)$:

$$u_2(t) = -30 \cdot 10^3 \cdot e^{-400t} \sin 20.000t \text{ voltios}$$

b) El tiempo t de encendido de la bujía se obtiene de la solución de la ecuación:

$$10 \cdot 10^3 = |u_2(t)| = 30 \cdot 10^3 \cdot e^{-400t} \sin 20.000t$$

si se desprecia la influencia de la variación del término exponencial en el primer semiciclo de la onda sinusoidal, ya que durante este tiempo prácticamente se mantiene constante e igual a la unidad, resulta:

$$\sin 20.000t = \frac{1}{3} \Rightarrow t \approx 17 \mu s$$

puede comprobar el lector que para este tiempo, se tiene:

$$e^{-400t} = 0,993 \approx 1$$

que corrobora nuestra aproximación anterior.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.17: Tensión transitoria de restablecimiento

El esquema de la Figura 4.51 representa un circuito eléctrico simplificado, que se utiliza para determinar la denominada **tensión transitoria de restablecimiento** en ensayos de interruptores automáticos de media tensión. Se dispone de un generador de c.a. (alternador) que alimenta a través de una inductancia limitadora de corriente L , un interruptor S que en $t = 0$ está cerrado, lo que supone un cortocircuito respecto del generador; C representa la capacidad de la línea y elementos adyacentes y que en un Laboratorio de Ensayos está definida con bancos de condensadores. Se desea determinar para $t > 0$, la diferencia de potencial que aparecerá entre los polos o terminales del interruptor automático o disyuntor en el momento de su apertura y que de acuerdo con el esquema de la Figura 4.51 coincide con la tensión en bornes del condensador. Esta tensión se denomina *tensión transitoria de restablecimiento* (T.T.R.) y en las instalaciones reales es la que provoca arcos de reencendido en el disyuntor.

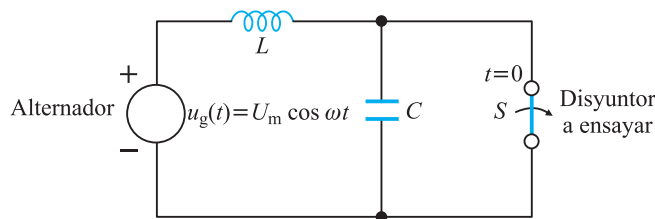


Figura 4.51 Ejemplo de aplicación 4.17

Solución

Si la red de la Figura 4.51 ha alcanzado el régimen permanente para $t < 0$, el circuito equivalente para ese periodo de tiempo anterior a la apertura del disyuntor será el mostrado en la Figura 4.52a. Para ese periodo de tiempo se puede calcular la corriente $i(t)$, trabajando en el plano fasorial y así resulta:

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_L} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{jL\omega} = \frac{U_m}{\sqrt{2}\omega} \angle -90^\circ$$

que corresponde a un valor instantáneo:

$$i_L(t) = \frac{U_m}{L\omega} \cos(\omega t - 90^\circ) = \frac{U_m}{L\omega} \sin \omega t$$

que para $t = 0$ corresponde a $i_L(0^-) = 0$. La tensión en bornes del condensador se considera también inicialmente cero ya que está cortocircuitado por el disyuntor, es decir $u_C(0^-) = 0$.

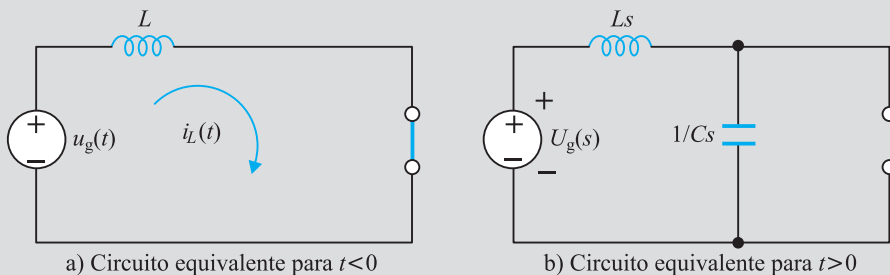


Figura 4.52 Redes transformadas del ejemplo de aplicación 4.17

Al abrir el interruptor automático, el circuito equivalente que se obtiene en el dominio de Laplace es el que se indica en la Figura 4.52b, en el que $U_g(s)$ es la transformada de Laplace de la tensión del generador:

$$U_g(s) = \mathcal{L}[U_m \cos \omega t] = \frac{U_m s}{s^2 + \omega^2}$$

aplicando la regla del divisor de tensión al circuito de la Figura 4.52b resulta:

$$U_C(s) = \frac{U_m s}{s^2 + \omega^2} \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{U_m s}{(s^2 + \omega^2)(LCs^2 + 1)}$$

y denominando ω_0 a la pulsación natural del circuito de valor:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

se puede escribir:

$$U_C(s) = \omega_0^2 U_m \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \omega_0^2)}$$

que admite una descomposición de la forma:

$$U_C(s) = \frac{\omega_0^2 U_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right]$$

y que al aplicar la transformada inversa se convierte en:

$$U_C(t) = \frac{\omega_0^2 U_m}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos \omega t - \cos \omega_0 t]$$

que es la tensión que aparecerá en los bornes del disyuntor a partir de su apertura. Si se consideran unos valores prácticos:

$$L = 0,16 \text{ mH} \quad ; \quad C = 0,1 \text{ } \mu\text{F} \quad ; \quad f = 50 \text{ Hz}$$

resulta:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 25.000 \text{ rad/s} \quad ; \quad \omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$$

es decir, $\omega_0 \gg \omega$ por lo que $u_C(t)$ se puede aproximar a:

$$u_C(t) = U_m [\cos \omega t - \cos \omega_0 t]$$

considerando que durante el tiempo en que persiste la oscilación a la pulsación ω_0 , se tiene $\cos \omega t \rightarrow 1$, resultará:

$$u_C(t) = U_m (1 - \cos \omega_0 t)$$

lo cual nos indica que la tensión que aparece entre los polos del disyuntor después de su apertura, puede alcanzar un valor doble que la tensión nominal de la línea a la cual se conecta. En la práctica las componentes resistivas del circuito hacen que este valor no sea superior a 1,6-1,8 de la tensión nominal del circuito.

■ 4.10. Análisis de circuitos eléctricos por variables de estado

El análisis de circuitos eléctricos mediante variables de estado constituye un procedimiento general para el análisis de las redes eléctricas, que complementa a los estudiados anteriormente en este libro, como son los métodos de las corrientes de malla y de las tensiones de nudo. Pero la utilización de variables de estado tiene grandes ventajas adicionales, porque permite obtener una información más detallada de la evolución temporal de las magnitudes eléctricas implicadas, permitiendo asimismo su extensión al estudio de los sistemas no lineales, incluso con parámetros que varían respecto del tiempo y por otro lado, la resolución de las ecuaciones de estado con ayuda de ordenador, es muy directa. El análisis de circuitos con variables de estado da lugar a un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, de un modo análogo a las ecuaciones integro-diferenciales que aparecen en el análisis por mallas o nudos.

Las técnicas del espacio de estado aparecieron en el mundo científico a mitad de la década de 1950, y su campo de aplicación inicial fue la automática o ingeniería de control. Fue una solución para abordar el estudio de procesos complejos en la industria química y en las técnicas aeroespaciales, y sus teorías fueron el origen de la ingeniería de control moderna, que permitía analizar de un modo sistemático procesos con múltiples entradas y múltiples salidas. También se aplicó al estudio de la estabilidad, control óptimo de procesos, transformada en Z para sistemas muestreados, etc. Estos desarrollos, de gran contenido matemático, requieren una buena formación en espacios vectoriales, y una gran destreza en la manipulación de matrices. Los conceptos de variables de estado se fueron extendiendo a otros campos científicos e incluso sociales, dando lugar a la actual **Ingeniería de Sistemas**. En nuestro caso, se incluye este epígrafe, para que el estudiante conozca su aplicación en el estudio de los circuitos eléctricos y le sirva de preludio a cursos más especializados.

■ 4.10.1. El concepto de estado

Cuando se estudia la dinámica de un sistema físico, este se representa mediante un juego de ecuaciones diferenciales, en el que las condiciones iniciales impuestas por el proceso, junto con el conocimiento de las funciones de excitación que se aplican en un momento determinado, son suficientes para conocer la respuesta presente y futura del sistema. En esencia, esta es la filosofía del espacio de estados. El conjunto de números que se toman como condiciones iniciales, representa el estado del sistema. Al evolucionar la dinámica del proceso, varían con el tiempo algunas variables. El conjunto mínimo de estas variables que define la evolución del sistema se puede representar por un vector, que se denomina **vector de estado**, y las variables correspondientes se conocen lógicamente como **variables de estado**.

En el caso de los circuitos eléctricos, se dispone de elementos pasivos R , L y C . Si se produce un cambio en la energía almacenada en uno de los elementos anteriores, es evidente que el sistema pasará de un estado a otro. Ahora bien, sabemos que en una resistencia no hay almacenamiento de energía, mientras que en una inductancia la energía es de la forma $Li^2/2$ y en un condensador vale $Cu^2/2$. Esto sugiere a primera vista que se podría describir el estado del sistema conociendo la corriente en las inductancias de la red y las tensiones en los bornes de los condensadores. Efectivamente esto es así, y es la elección más simple

y que se va a realizar en este texto; sin embargo, existen otras alternativas para elegir las variables de estado, lo que es esencial e importante, es que el conocimiento de cada una de ellas, permita calcular la energía acumulada en los elementos de la red, en cualquier instante de tiempo. Desde un punto de vista geométrico, la energía almacenada en un circuito en las inductancias y capacidades en un determinado instante de tiempo da lugar a un punto de funcionamiento en un sistema de coordenadas, en el que cada eje corresponde a una variable de estado diferente (si para representar el sistema se necesitan n variables de estado, el espacio es n dimensional). Al variar las energías almacenadas en la red, el punto anterior cambia y va describiendo una trayectoria en este espacio de estado, de tal modo que el vector que une el origen con cada punto de la trayectoria es el **vector de estado**. Como resumen de lo anterior, en el estudio de circuitos con variables de estado, se definen los siguientes términos:

Estado. El *estado de un sistema* es un vector formado por una serie de variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ denominadas *variables de estado*, de tal modo que el conocimiento de los valores iniciales de estas: $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, ..., $x_n(t_0)$ (en muchas situaciones los valores iniciales se toman para $t_0 = 0$) y de las entradas $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_r(t)$ a lo largo del tiempo, son suficientes para describir de un modo único la respuesta del sistema para un tiempo $t > t_0$. Las variables de estado se agrupan en un vector columna de dimensión n que tiene por componentes las variables de estado:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T \quad (4.157)$$

donde el exponente T se emplea para señalar el *vector transpuesto* y que convierte (4.157) en un vector columna. Existe un número mínimo de variables de estado necesarias para representar de un modo preciso el sistema. Estas variables no son únicas y, en general, existen distintas variables de estado que lo definen, pero todas deben cumplir una serie de propiedades:

- Las variables de estado deben ser **linealmente independientes**. No pueden ser múltiplos de alguna otra variable o una suma ponderada de varias.
- Deben ser suficientes como para describir completamente el comportamiento dinámico del circuito.
- No pueden ser entradas al sistema o combinación lineal de estas ya que las entradas son elementos *externos* al circuito y no pueden ser estados del mismo.

Espacio de Estados. Es un espacio de dimensión n en el que las componentes del vector de estado representan sus ejes coordenados.

Trayectoria de Estado. Es la trayectoria producida en el espacio de estado debido a la variación del vector de estado $\mathbf{x}(t)$ con respecto al tiempo. Si el sistema tiene únicamente dos variables de estado, el espacio de estado es un plano y se denomina *Plano de Fase*.

Entradas y salidas del circuito. En general, se puede suponer que un sistema tiene r entradas y m salidas. Las r entradas, que son las funciones de excitación del circuito (o de un sistema en general), dan lugar a un vector columna $\mathbf{u}$ de dimensión r denominado **vector de entrada** y que se expresa por:

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \cdots \quad u_r(t)]^T \quad (4.158)$$

de forma análoga, las m salidas dan lugar a un vector columna de dimensión m , denominado **vector de salida** y que se expresa del siguiente modo:

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \cdots \ y_m(t)]^T \quad (4.159)$$

ambos vectores se escriben de la forma $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$, para destacar su dependencia con el tiempo.

De acuerdo con las definiciones anteriores, si un circuito eléctrico admite una descripción en el espacio de estado, su comportamiento se puede definir mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ \mathbf{y}(t) &= g[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{aligned} \quad (4.160)$$

donde $\dot{\mathbf{x}}(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$. La aplicación del método del espacio de estado a los circuitos eléctricos requiere una profundización de los conceptos de topología de redes que se explicaron en el Capítulo 1 y que van a resumirse a continuación. Recuérdese que el *grafo* de un circuito es una representación simplificada del mismo, en el que cada rama se sustituye por un segmento. Si se considera el circuito de la Figura 4.53a, el grafo correspondiente es el que se muestra en la Figura 4.53b. Un *árbol* es el conjunto de ramas del grafo que une todos los nudos sin que se formen caminos cerrados o lazos. En la Figura 4.53b, el árbol elegido corresponde a las ramas dibujadas con líneas de trazo continuo (ramas 2, 3 y 4) y que unen los nudos A, B, C y D, sin que se formen lazos. Las otras ramas del grafo no incluidas en el árbol se denominan *cuerdas* o *eslabones* (ramas 1, 5 y 6) y se han representado en la Figura 4.53b por líneas de trazo discontinuo. En topología de redes se define además el concepto de *grupos de corte*, como el conjunto de ramas al que puede aplicarse el primer lema de Kirchhoff; de especial importancia son los *grupos de corte básicos*, que se definen para un árbol y es un grupo de corte que contiene *solo una rama del árbol*.

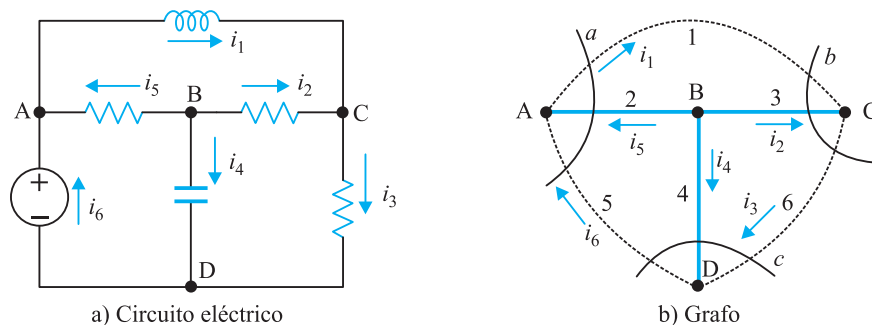


Figura 4.53 Circuito eléctrico y su grafo

En la Figura 4.53b, se han dibujado tres grupos de corte básicos: a , b y c (obsérvese que el a corta a las ramas 1, 2 y 5 en la que solamente la 2 pertenece al árbol, el b abarca las ramas 1, 3 y 6, en la que solamente la rama 3 pertenece al árbol y el grupo c que corta a las ramas 4, 5 y 6 en la que solamente la 4 pertenece al árbol). Al aplicar el primer lema de Kirchhoff a los grupos de corte básicos definidos en un árbol, las ecuaciones correspon-

dientes son *linealmente independientes*. Por otro lado se definen los *lazos básicos de un árbol*, que son lazos que contienen solamente un eslabón y al aplicar el segundo lema de Kirchhoff a los lazos básicos, las ecuaciones que se obtienen son *linealmente independientes*. En el grafo de la Figura 4.53b se tienen tres lazos básicos y que al haberse elegido ese árbol específico coinciden con las mallas de la red; el primer lazo básico es el formado por las ramas 2 y 3 del árbol y el eslabón 1, el segundo lazo está formado por las ramas del árbol 3 y 4 y el eslabón de cierre 6 y el tercer lazo básico lo forman las ramas 2 y 4 del árbol y el eslabón 5.

■ 4.10.2. Planteamiento sistemático de las ecuaciones de estado

Como se ha señalado en el epígrafe anterior, en los circuitos eléctricos, el vector de estado $\mathbf{x}(t)$, tiene como componentes las tensiones $u_C(t)$ en los condensadores y las corrientes $i_L(t)$ en las inductancias. Al calcular la derivada $d\mathbf{x}(t)/dt$, las componentes de este vector serán de la forma $du_C(t)/dt$ y $di_L(t)/dt$. Al multiplicar estas derivadas por los parámetros C y L , dan lugar a términos de la forma $Cdu_C(t)/dt$ y $Ldi_L(t)/dt$ respectivamente, que representan corrientes a través de los condensadores en el primer caso y tensiones en los terminales de las inductancias, en el segundo. Es evidente que para evaluar $Cdu_C(t)/dt$ que es una corriente en función del vector de estado (y posiblemente, en general de la excitación $\mathbf{u}(t)$), se necesitará aplicar el primer lema de Kirchhoff a un grupo de corte básico del grafo de la red. Lo anterior sugiere que los condensadores deben pertenecer a un árbol de la red (es decir deben ser ramas del mismo). De forma análoga, para evaluar las relaciones entre las caídas de tensión $Ldi_L(t)/dt$, se deben establecer en general ecuaciones de lazo para aplicar el segundo lema de Kirchhoff, y como en general en un árbol de un circuito los lazos se cierran mediante ramas de enlace o eslabones, las inductancias deben incluirse, a ser posible en los eslabones del grafo de la red. *Estas ideas son la base de un procedimiento sistemático para formular las ecuaciones de estado de un circuito eléctrico.* El proceso comienza dibujando el grafo de la red, en el que cada elemento debe representarse por una rama, pero sin realizar ninguna simplificación del circuito, es decir aunque se puedan hacer asociaciones de elementos en serie y/o paralelo en la red, estas no deben realizarse. A continuación debe elegirse un árbol de la red, constituido por las ramas del árbol que unan a todos los nudos, pero sin que se cierre ningún camino, es decir sin que se formen lazos o mallas. Para hacer esta elección deben tomarse las ramas que contengan los elementos activos o pasivos siguientes, en orden de preferencia:

1. Todas las fuentes de tensión.
2. Todos los condensadores.
3. Algunas resistencias, cuando sea necesario.
4. Ninguna inductancia.
5. Ninguna fuente de corriente.

La elección 1 es posible porque las fuentes de tensión por sí mismas no forman lazos; si esto ocurriera, significaría que una de las fuentes es redundante o que no se puede cumplir el segundo lema de Kirchhoff en el lazo así formado. De un modo análogo, todos los condensadores del circuito son ramas del árbol, de hecho sus tensiones iniciales son parte del estado inicial del circuito. Las resistencias se deben incluir en el árbol cuando se necesiten; si por ejemplo hay un nudo al que llegan solamente resistencias, este nudo debe conectarse

al árbol mediante una resistencia. Las inductancias deben ser eslabones del árbol y también las fuentes de corriente. Para aclarar estos conceptos, considérese la red de la Figura 4.54, que está formada por dos mallas. Las fuentes de tensión u_1 y u_2 son las entradas y las tensiones en R_1 y R_5 son las salidas.

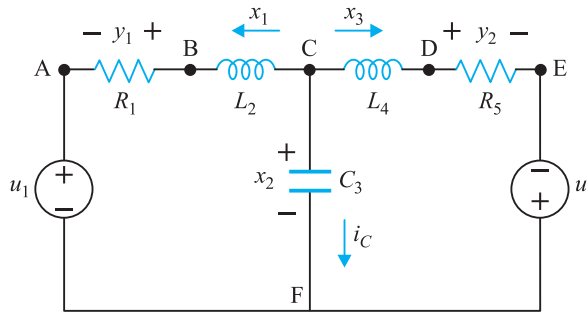


Figura 4.54 Variables de estado en un circuito eléctrico

En la Figura 4.55a se muestra el grafo de la red, en el que cada elemento físico de la Figura 4.54 se ha sustituido por un segmento. El primer paso es seleccionar un árbol en el grafo de la figura anterior, que está formado por ramas que unan todos los nudos (principales y secundarios) sin que se formen circuitos cerrados o lazos.

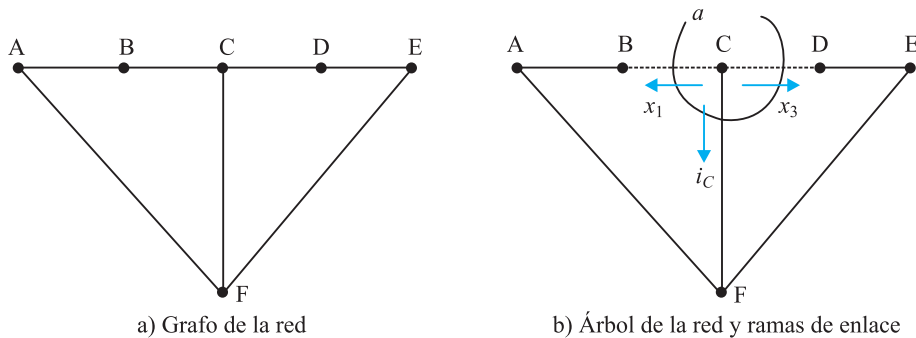


Figura 4.55 Grafo, árbol y ramas de enlace del circuito de la Figura 4.54

En la Figura 4.55b se muestra con trazo continuo el árbol seleccionado, de acuerdo con los criterios anteriores, es decir incluye las ramas AF y EF de los generadores de tensión de la red de la Figura 4.54, la rama CF del condensador central y las ramas AB y DE correspondientes a las resistencias R_1 y R_2 . De acuerdo con la Figura 4.54, se han elegido como variables de estado las corrientes en las inductancias y la tensión en el condensador y que se han señalado por x_1 , x_2 y x_3 , en el circuito. Al aplicar el primer lema de Kirchhoff al conjunto de corte señalado con la letra a en la Figura 4.55b (en definitiva al nudo C) se cumple:

$$i_C + x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow C_3 \frac{dx_2}{dt} + x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{1}{C_3} x_1 - \frac{1}{C_3} x_3 \quad (4.161)$$

Al cerrar el árbol de la Figura 4.54b por el eslabón BC se forma un lazo. Al aplicar el segundo lema de Kirchhoff al mismo resulta:

$$L_2 \frac{dx_1}{dt} + R_1 x_1 + u_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_2} x_1 + \frac{1}{L_2} x_2 - \frac{1}{L_2} u_1 \quad (4.162)$$

de forma análoga, al cerrar el árbol de la Figura 4.54b por el eslabón CD se forma un lazo. Al aplicar el segundo lema de Kirchhoff al mismo resulta:

$$L_4 \frac{dx_3}{dt} + R_5 x_3 - u_2 - x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_3 = \frac{1}{L_4} x_2 - \frac{R_5}{L_4} x_3 + \frac{1}{L_4} u_2 \quad (4.163)$$

Las ecuaciones (4.161), (4.162) y (4.163) dan lugar a la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L_2 & 1/L_2 & 0 \\ -1/C_3 & 0 & -1/C_3 \\ 0 & 1/L_4 & -R_5/L_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/L_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/L_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.164)$$

que corresponde a la forma simplificada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.165)$$

en la ecuación anterior, $\mathbf{A}$ es la matriz de evolución del sistema y $\mathbf{B}$ es la matriz de aplicación del control. Las expresiones correspondientes son:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R_1/L_2 & 1/L_2 & 0 \\ -1/C_3 & 0 & -1/C_3 \\ 0 & 1/L_4 & -R_5/L_4 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.166)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1/L_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/L_4 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

por otro lado, las ecuaciones de salida son:

$$y_1 = R_1 x_1 ; \quad y_2 = R_2 x_2 \quad (4.167)$$

que en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.168)$$

que corresponde a la forma simplificada:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4.169)$$

en la ecuación anterior C es la matriz de observación. Las expresiones correspondientes son:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix} ; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.170)$$

■ 4.10.3. Solución de las ecuaciones de estado por la transformada de Laplace

Vamos a resolver las ecuaciones de estado (4.165), de un modo informal suponiendo que $n = 1$. Es decir que la ecuación de estado es de la forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t) \quad (4.171)$$

Como se puede comprobar en el Apéndice 2, la transformada de Laplace de la derivada es:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0^-) \quad (4.172)$$

por lo que la ecuación transformada de (4.171) es:

$$sX(s) - x(0^-) = aX(s) + bU(s) \quad (4.173)$$

que se puede escribir:

$$X(s) = \frac{1}{(s - a)} x(0^-) + \frac{1}{(s - a)} bU(s) \quad (4.174)$$

cuya transformada inversa es:

$$x(t) = e^{at}x(0^-) + e^{at} \cdot bu(t) \quad (4.175)$$

donde el segundo sumando del segundo miembro representa la convolución de e^{at} con $bu(t)$ y si se tiene en cuenta la definición de convolución señalada en el Epígrafe A.2.9 del Apéndice 2, la expresión anterior se puede poner:

$$x(t) = e^{at}x(0^-) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (4.176)$$

el primer sumando del segundo miembro de la ecuación anterior representa la respuesta del circuito o sistema, debida únicamente a las cargas iniciales de los condensadores y de las corrientes en las bobinas y se denomina por ello **respuesta a entrada cero**, mientras que el segundo término es la respuesta debida a las fuentes de excitación y se denomina por ello, **respuesta a estado inicial cero**.

La aplicación de estos conceptos para resolver la ecuación de estado matricial (4.165), hace que la ecuación equivalente a (4.174) sea ahora:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (4.177)$$

que puede ponerse así:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0^-) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (4.178)$$

en la que $\mathbf{I}$ representa la matriz unidad, que es una matriz cuadrada de orden $n \times n$ que tiene todos los coeficientes igual a 1 en la diagonal principal y ceros en el resto. La solución equivalente (4.175) es en este caso:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0^-) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (4.179)$$

que se obtiene de la ecuación (4.178) al multiplicar cada miembro por la matriz inversa $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, que algunos autores denominan **matriz resolvente**. Y de un modo análogo a (4.176), la resolución de la ecuación de estado matricial será de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0^-) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau) d\tau \quad (4.180)$$

donde $e^{\mathbf{A}t}$ se denomina **matriz de transición de estados** y que es la transformada inversa de Laplace de la matriz resolvente, es decir:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \Phi(t) \quad (4.181)$$

y la expresión (4.180) se puede escribir también de la forma equivalente siguiente:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0^-) + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau) d\tau \quad (4.182)$$

y teniendo en cuenta que la matriz de transición de estados cumple la propiedad siguiente:

$$\Phi(t - \tau) = \Phi(t - 0) \cdot \Phi(0 - \tau) = \Phi(t)\Phi(-\tau) \quad (4.183)$$

por lo que (4.182) se transforma a la forma siguiente, más simple de calcular:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0^-) + \Phi(t) \int_0^t [\Phi(-\tau)\mathbf{B}]\mathbf{U}(\tau) d\tau \quad (4.184)$$

y de modo análogo a la ecuación (4.176), el primer sumando del segundo miembro de la ecuación anterior representa la respuesta del circuito o sistema, debida únicamente a las cargas iniciales de los condensadores y de las corrientes en las bobinas y se denomina por ello **respuesta a entrada cero**, mientras que el segundo término es la respuesta debida a las fuentes de excitación y se denomina por ello, **respuesta a estado inicial cero**.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4.18

En el circuito de la Figura 4.56, el interruptor se cierra en $t = 0$. Siendo las condiciones iniciales: $u_C(0) = 5 \text{ V}$; $i_L(0^-) = 1 \text{ A}$. Calcular, utilizando el método de las variables de estado, la d.d.p. $u_C(t)$ en bornes del condensador y la corriente $i(t)$ suministrada por el generador. (Nota: Este ejercicio está resuelto en el Ejemplo de Aplicación 4.10 por el método clásico).

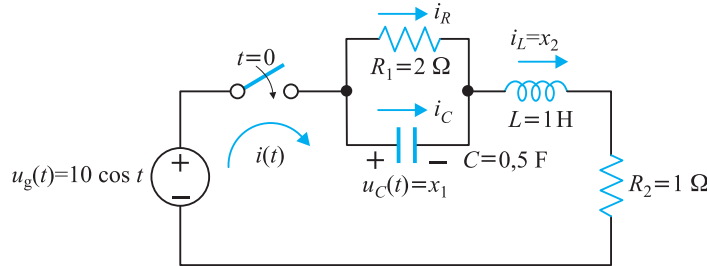


Figura 4.56 Ejemplo de aplicación 4.18

Solución

En el circuito de la Figura 4.56, existen dos elementos que almacenan energía: el condensador y la inductancia, es por ello que se ha tomado como primera variable de estado, la tensión del condensador $u_C(t) = x_1$, y como segunda variable de estado la corriente en la inductancia, es decir: $i_L(t) = x_2$ y que coincide con la corriente que suministra el generador $i(t)$. En la Figura 4.57a se muestra el grafo de la red de la Figura 4.56 y en la Figura 4.57b se ha señalado en trazo grueso un árbol del grafo y en trazo discontinuo los eslabones correspondientes. Obsérvese, de acuerdo con las recomendaciones señaladas anteriormente, que las ramas del árbol incluyen al generador de tensión u_g , al condensador C y a la rama resistiva R_2 . Los eslabones del grafo son dos: el correspondiente a la inductancia L y el debido a la resistencia R_1 .

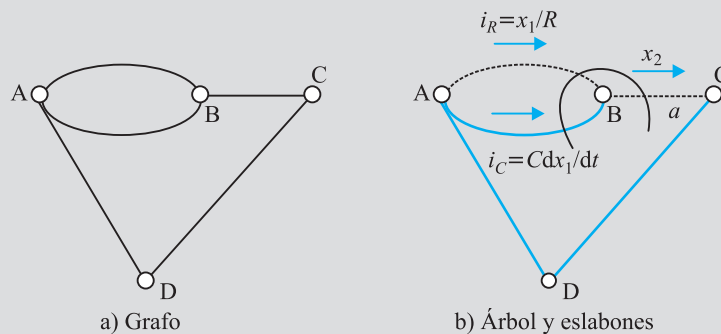


Figura 4.57 Grafo, árbol y eslabones del circuito de la Figura 4.56

Si en la Figura 4.57b se elige el conjunto de corte básico señalado por a , al aplicar al mismo el primer lema de Kirchhoff, resulta:

$$i_C + i_R - i_L = 0 \Rightarrow 0,5 \frac{dx_1}{dt} + 0,5x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2 \quad (1)$$

y al cerrar las ramas del árbol de la Figura 4.56b con el eslabón BC se forma un lazo, al que se puede aplicar el segundo lema de Kirchhoff, resultando la siguiente ecuación:

$$u_{AB} + u_{BC} + u_{CD} + u_{DC} = 0 \Rightarrow x_1 + L \frac{dx_2}{dt} + R_2 x_2 + u_1(t) = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2 + u_1(t) \quad (2)$$

A partir de las expresiones (1) y (2) se pueden escribir las ecuaciones de estado siguientes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(t) \quad (3)$$

y por consiguiente se tiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad u_1(t) = 10 \cos t \quad (4)$$

de donde se deduce:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

y por consiguiente la matriz resolvente es:

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2 + 2} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2} & \frac{2}{(s+1)^2 + 2} \\ \frac{-1}{(s+1)^2 + 2} & \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

que en el dominio del tiempo es:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos \sqrt{2}t & \sqrt{2}e^{-t} \sin \sqrt{2}t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t & e^{-t} \cos \sqrt{2}t \end{bmatrix} \quad (7)$$

y la respuesta del circuito a entrada cero, que corresponde al primer sumando del segundo miembro de (4.184), es:

$$\mathbf{x}(t)_a = \Phi(t)\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos \sqrt{2}t & \sqrt{2}e^{-t} \sin \sqrt{2}t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t & e^{-t} \cos \sqrt{2}t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{-t} \cos \sqrt{2}t + \sqrt{2}e^{-t} \sin \sqrt{2}t \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t + e^{-t} \cos \sqrt{2}t \end{bmatrix} \quad (8)$$

y la respuesta del circuito a estado inicial cero, que corresponde al segundo sumando del segundo miembro de la ecuación (4.184) es:

$$\mathbf{x}(t)_b = \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} u(\tau) d\tau = [\Phi(t)] \int_0^t \Phi(-\tau) \mathbf{B} u(\tau) d\tau \quad (9)$$

donde se cumple:

$$\Phi(-\tau) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} e^{\tau} \cos \sqrt{2}\tau & -\sqrt{2}e^{\tau} \sin \sqrt{2}\tau \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\tau} \sin \sqrt{2}\tau & e^{\tau} \cos \sqrt{2}\tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}e^{\tau} \sin \sqrt{2}\tau \\ e^{\tau} \cos \sqrt{2}\tau \end{bmatrix} \quad (10)$$

que corresponde al siguiente resultado:

$$\Phi(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) = \begin{bmatrix} -10\sqrt{2}e^{\tau}\sin\sqrt{2}\tau\cos\tau\,d\tau \\ 10e^{\tau}\cos\sqrt{2}\tau\cos\tau\,d\tau \end{bmatrix} \quad (11)$$

y teniendo en cuenta los resultados de las siguientes integrales (y *que debe resolver el lector con mucha paciencia, para no confundirse en los resultados*):

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^t e^{\tau}(\sin\sqrt{2}\tau)\cos\tau\,d\tau &= \frac{e^t}{4\sqrt{2}} [(\sqrt{2}+1)\sin(\sqrt{2}-1)t - \cos(\sqrt{2}-1)t] + \\ &+ [(\sqrt{2}-1)\sin(\sqrt{2}+1)t - \cos(\sqrt{2}+1)t] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^t e^{\tau}(\cos\sqrt{2}\tau)\cos\tau\,d\tau &= \frac{e^t}{4\sqrt{2}} [\sin(\sqrt{2}-1)t + (\sqrt{2}+1)\cos(\sqrt{2}-1)t] + \\ &+ [\sin(\sqrt{2}+1)t + (\sqrt{2}-1)\cos(\sqrt{2}+1)t] - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

la respuesta (9), es decir a estado inicial cero, es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t)_b &= \begin{bmatrix} e^{-t}\cos\sqrt{2}t & \sqrt{2}e^{-t}\sin\sqrt{2}t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t & e^{-t}\cos\sqrt{2}t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10\sqrt{2}I_1 \\ 10I_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -10\sqrt{2}I_1e^{-t}\cos\sqrt{2}t + 10I_2e^{-t}\sin\sqrt{2}t \\ 10I_1e^{-t}\sin\sqrt{2}t + 10I_2e^{-t}\cos\sqrt{2}t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

y sustituyendo en la ecuación anterior los resultados de las integrales (12) y (13), y simplificando a continuación la solución mediante transformaciones trigonométricas, se llega finalmente a una solución relativamente elegante y sencilla:

$$\mathbf{x}(t)_b = \begin{bmatrix} 5\cos t + 5\sin t - 5e^{-t}\cos\sqrt{2}t - 5\sqrt{2}e^{-t}\sin\sqrt{2}t \\ 5\cos t + \frac{5}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t - 5e^{-t}\cos\sqrt{2}t \end{bmatrix} \quad (15)$$

por lo que la respuesta completa del circuito, teniendo en cuenta la solución (8) a entrada cero, (que era la respuesta a las condiciones iniciales del circuito), es la suma de (8) y (15), que es:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t)_a + \mathbf{x}(t)_b = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2}\cos(t-45^\circ) - 4\sqrt{2}e^{-t}\sin\sqrt{2}t \\ 5\cos t - 4e^{-t}\cos\sqrt{2}t \end{bmatrix} \quad (16)$$

es decir las soluciones de las variables de estado son:

$$x_1(t) = 5\sqrt{2} \cos(t - 45^\circ) - 4\sqrt{2}e^{-t} \sin \sqrt{2}t \quad (17)$$

$$x_2(t) = 5 \cos t - 4e^{-t} \cos \sqrt{2}t \quad (18)$$

valores que coinciden con el resultado del Ejemplo de Aplicación 4.10, en el que la variable de estado actual $x_1(t)$ es la tensión en bornes del condensador, y la variable de estado actual $x_2(t)$ es la corriente que circula por la inductancia, que a su vez es igual a la corriente que suministra el generador de tensión. Existen procedimientos simplificados para llegar a los resultados anteriores, haciendo transformaciones vectoriales de las ecuaciones de estado que den lugar a matrices diagonales, ya que entonces se consigue que cada ecuación de estado sea función de una sola variable de estado, lo que permite resolver cada ecuación diferencial de una forma independiente a las otras. Se dice entonces que las **ecuaciones están desacopladas** y los nuevos vectores base que se requieren para la transformación se denominan **vectores propios o autovectores**. Aquí se ha preferido utilizar un método más pedestre, debido a su mayor valor didáctico, que sigue el desarrollo de la teoría anteriormente expuesta. En la actualidad, el problema se resuelve fácilmente utilizando una *toolbox de control* de la aplicación informática MATLAB, que permite trabajar directamente con variables estado e incluso se pueden dibujar las formas de onda de las soluciones (17) y (18). Es altamente aconsejable para los estudiantes que se familiaricen con estos programas informáticos, que facilitan enormemente los cálculos matemáticos de los circuitos eléctricos.



Problemas

- 4.1.** Se dispone de una resistencia $R = 10 \text{ k}\Omega$ en serie con un condensador de $1 \mu\text{F}$, cuya tensión inicial es $u_C(0^-) = 5 \text{ V}$. Si en el tiempo $t = 0$ se alimenta el circuito con una pila de 10 V , calcular la expresión $u(t)$ de tensión en bornes del condensador para $t > 0$.

[Res. $u_C = 10 - 5e^{-100t}$ voltios]

- 4.2.** En el circuito de la Figura P.4.1 el interruptor se abre en $t = 0$. Calcular $i_L(t)$ para $t > 0$.

[Res. $i_L(t) = 3e^{-6t/5}$]

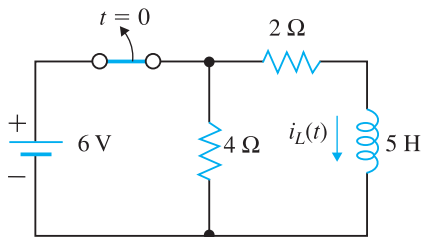


Figura P.4.1

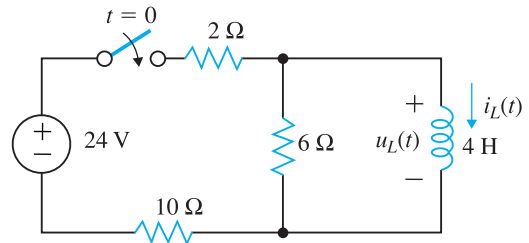


Figura P.4.2

- 4.4.** El condensador de la Figura P.4.3 se carga inicialmente a una tensión $u_C(0^-) = 2 \text{ V}$. En $t = 0$ se cierra el interruptor. Calcular $u(t)$ para $t > 0$.

[Res. $u(t) = 10 - 8e^{-t/75}$]

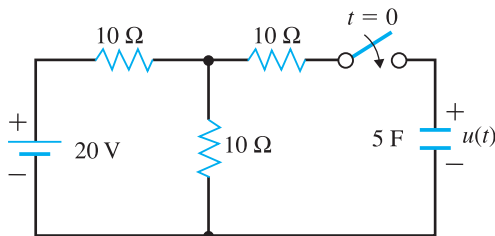


Figura P.4.3

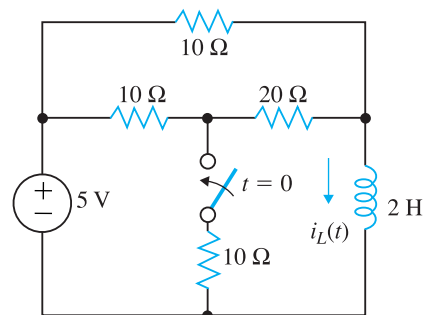


Figura P.4.4

- 4.5.** En la red de la Figura P.4.4 el interruptor está inicialmente abierto, alcanzando el régimen permanente. En $t = 0$ se cierra el interruptor. Calcular $i_L(t)$ para $t > 0$.

[Res. $i_L(t) = 0,6 + 0,067e^{-3,57t}$]

- 4.6. En el circuito de la Figura P.4.5, el interruptor ha estado abierto el tiempo suficiente para que la red haya alcanzado el régimen permanente. El interruptor se cierra en $t = 5$ ms y después se abre en $t = 15$ ms. Calcular $u(t)$ en los siguientes periodos de tiempo: a) $t < 5$ ms; b) $5 \text{ ms} < t < 15 \text{ ms}$; c) $t > 15$ ms.

[Res. a) 33,33 V; b) $12,5 - 9,47e^{-(t-5)/5,16}$; c) $33,33 + 89,21e^{-(t-15)/1,25}$ donde el tiempo se expresa en milisegundos]

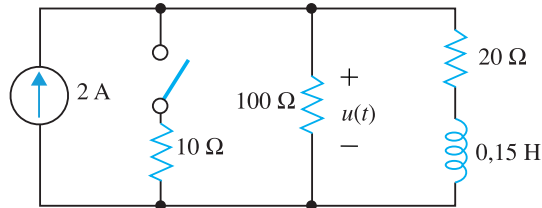


Figura P.4.5

- 4.7. El conmutador de la Figura P.4.6 se encuentra en la posición 1 hasta alcanzar su régimen permanente. En $t = 0$, el conmutador pasa a la posición 2. Calcular la corriente $i_L(t)$ para $t > 0$.

[Res. $i(t) = 6 \cdot 10^{-5} e^{-t/8}$ amperios]

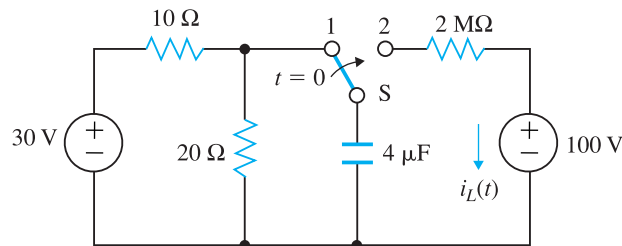


Figura P.4.6

- 4.8. El circuito mostrado en la Figura P.4.7 ha alcanzado el régimen permanente con el interruptor S abierto. En $t = 0$ el interruptor se cierra. Calcular la corriente $i(t)$ que circula por la inductancia.

[Res. $i(t) = 2,4 - 3,4e^{-t}$ amperios; $t > 0$]

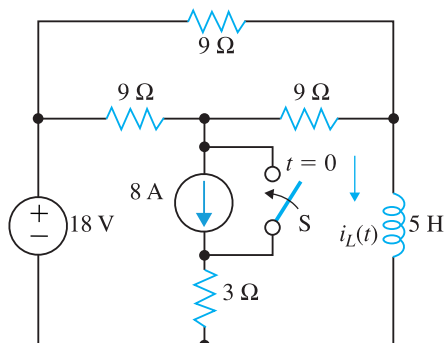


Figura P.4.7

- 4.9. En el circuito de la Figura P.4.8 el interruptor se cierra en $t = 0$. Calcular la $u_R(t)$ para $t > 0$.

[Res. $u_R(t) = 2,73 - 0,783e^{-20t} - 0,178e^{-110t}$]

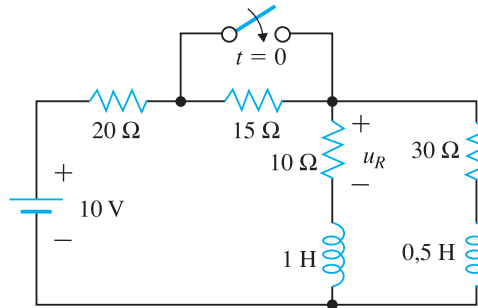


Figura P.4.8

- 4.10. En el circuito de la Figura P.4.9 las condiciones iniciales son nulas. En $t = 0$, se cierra el interruptor S. Calcular la $i_L(t)$ para $t > 0$. (Nota: El generador de tensión u_2 es una fuente controlada cuya tensión depende de la corriente $i(t)$ en la rama central).

[Res. $i_L(t) = 0,4(1 - e^{-1,25t})$ amperios]

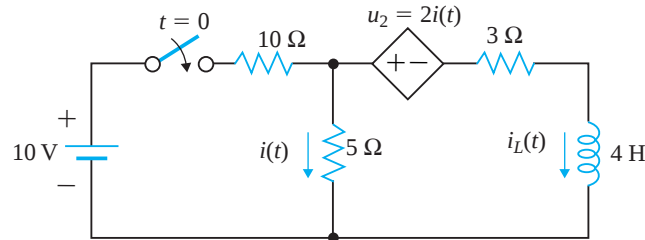


Figura P.4.9

- 4.11. El circuito de la Figura P.4.10 ha alcanzado el régimen permanente con los interruptores S_1 y S_2 cerrados. En $t = 0$, se abren ambos interruptores. Calcular las tensiones $u_{C1}(t)$ y $u_{C2}(t)$.

[Res. $u_{C1}(t) = 20 + 10e^{-10.000t}$; $u_{C2}(t) = 20 - 10e^{-10.000t}$]

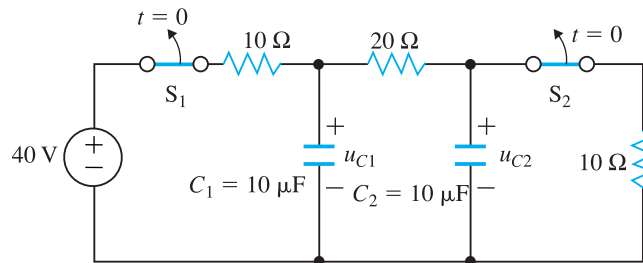


Figura P.4.10

- 4.12. Se dispone del circuito de la Figura P.4.11 que está excitado por un escalón de intensidad de 6 A y en el que se cumple inicialmente: $u_C(0) = 200$ V y $i_L(0) = 2$ A. Calcular la expresión de la intensidad en

la bobina y de la tensión en el condensador, resolviendo directamente las ecuaciones diferenciales del circuito.

[Res. a) $i_L(t) = 8,33e^{-10,32t} - 0,328e^{-323t} - 6$ A; $u_C(t) = 10[-85,94e^{-10,32t} + 105,9e^{-323t}]$ V]

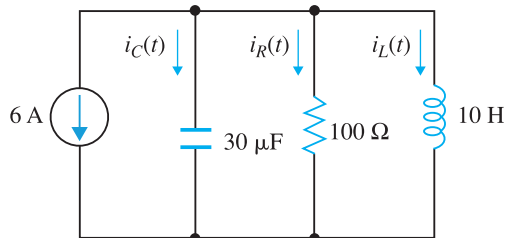


Figura P.4.11

- 4.13.** Se dispone del circuito de la Figura P.4.12 que se encuentra en régimen permanente y en el tiempo $t = 0$ se cierra el interruptor S. Calcular la expresión de la intensidad $i(t)$ para $t > 0$.

[Res. $i(t) = e^{-0,125t}(-6 \cos 0,216t - 3,47 \sin 0,216t) + 6$ amperios]

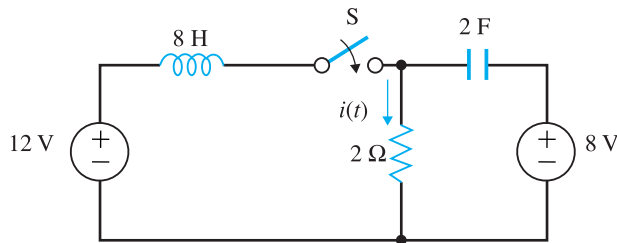


Figura P.4.12

- 4.14.** El circuito de la Figura P.4.13 se encuentra en régimen permanente. En el instante $t = 0$ se cierra el interruptor S. Calcular la tensión $u_C(t)$ para $t > 0$.

[Res. $u_C(t) = -4e^{-0,5t} + e^{-2t} + 5$ V]

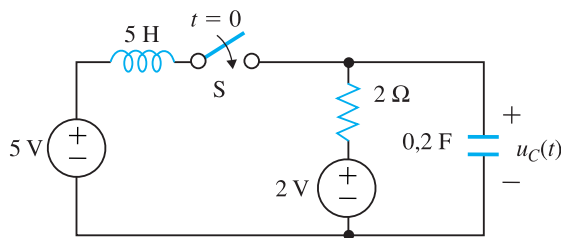


Figura P.4.13

- 4.15.** El circuito de la Figura P.4.14 se encuentra en régimen permanente. En el instante $t = 0$ se cierra el interruptor S_1 y se abre S_2 . Calcular la tensión $u_C(t)$ para $t > 0$.

[Res. $u_C(t) = -3 \cos t + 5$ V]

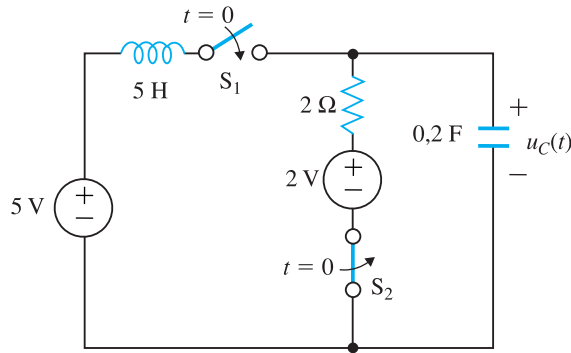


Figura P.4.14

- 4.16.** El circuito de la Figura P.4.15 se encuentra en régimen permanente. En un instante tomado como origen de tiempos se abre el interruptor S. Calcular la tensión $u_C(t)$ para $t > 0$.

[Res. $u_C(t) = (6 + 3t)e^{-t}$ V]

- 4.17.** Calcular la tensión $u_C(t)$ en el circuito de la Figura P.4.16 si la tensión del generador es una función delta de Dirac $\delta(t)$.

[Res. $u_C(t) = 2e^{-2t}$]

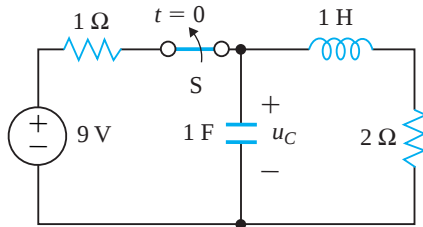


Figura P.4.15

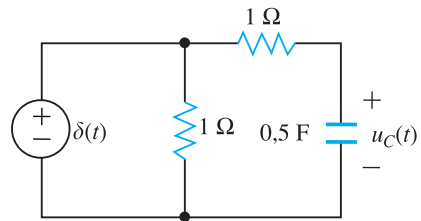


Figura P.4.16

- 4.18.** En el circuito de la Figura P.4.17 el conmutador ha estado conectado a la posición 1 hasta que el circuito ha alcanzado el régimen permanente. En $t = 0$, el conmutador pasa a la posición 2. Calcular $i_L(t)$ para $t > 0$.

[Res. $i(t) = 2 + 4e^{-2t}$]

- 4.19.** En el circuito de la Figura 4.18 que se supone en régimen estacionario sinusoidal se abre el interruptor S_1 y se cierra el interruptor S_2 para un instante que se considera como origen de tiempos ($t = 0$). Al cabo de $2\pi/10$ segundos se vuelve a cerrar el interruptor S_1 y abrir el interruptor S_2 . Tomando este instante como nuevo origen de tiempos, determinar la tensión que aparece desde ese momento en el condensador. (Nota: La apertura del interruptor S_1 introduce una discontinuidad en la corriente de la bobina).

[Res. $u_C(t') = e^{-0,5t'}(0,0342 \cos 1,5t' + 0,0030 \sin 1,5t') + 0,0088\sqrt{2} \cos(20t' - 177,12^\circ)$ V]

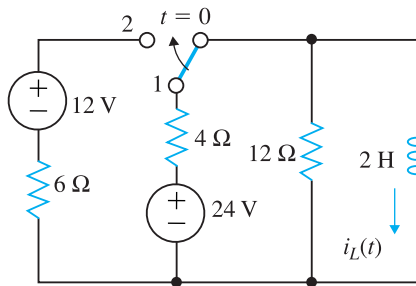


Figura P.4.17

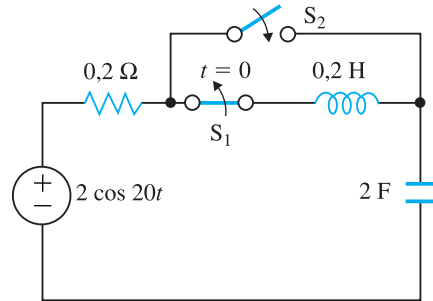


Figura P.4.18

- 4.20.** En el circuito de la Figura P.4.19 que se supone en régimen estacionario se cierra el interruptor S para un instante que se considera como origen de tiempos ($t = 0$). Al cabo de $8\pi/10$ segundos se vuelve a abrir el interruptor. Tomando este instante como nuevo origen de tiempos, determinar la tensión que aparece desde ese momento en el condensador. (Nota: El cierre del interruptor S introduce una discontinuidad en la tensión del condensador).

$$[\text{Res. } u_C(t') = e^{-0,5t'}(10,63 \cos 1,5t' + 1,943 \sin 1,5t') + 7,7\sqrt{2} \cos(5t' - 167,5^\circ) \text{ V}]$$

- 4.21.** En el circuito de la Figura P.4.20, la tensión inicial del condensador es $u_C(0^-) = 10 \text{ V}$. Calcular $u_C(t)$ para $t > 0$ aplicando la técnica de la transformada de Laplace.

$$[\text{Res. } u_C(t) = 20 - 10e^{-t} + 0,5e^{-t} \sin 2t]$$

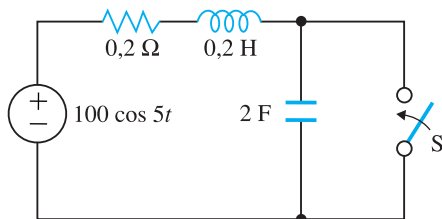


Figura P.4.19

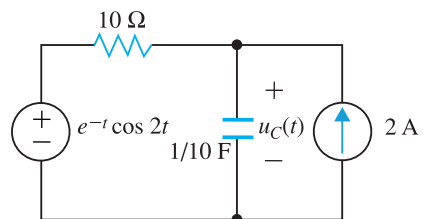


Figura P.4.20

- 4.22.** En el circuito de la Figura P.4.21, las condiciones iniciales son nulas. Calcular la corriente $i_2(t)$ para $t > 0$, si el interruptor se cierra en $t = 0$.

$$[\text{Res. } i_2(t) = 0,435(e^{-0,27t} - e^{-0,73t})]$$

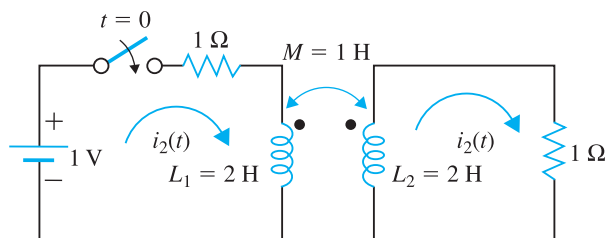


Figura P.4.21

- 4.23. En el circuito de la Figura P.4.22, las condiciones iniciales son: $i_{L1}(0^+) = 0,5$ A; $i_{L2}(0^+) = 0$ A. Calcular $u_R(t)$, para $t > 0$.

[Res. $u_R(t) = 1 - 0,8e^{-t/3} - 0,2e^{-2t}$]

- 4.24. En el circuito de la Figura P.4.23, las condiciones iniciales son: $u_C(0^+) = 1$ V; $i_1(0^+) = 0$ A; $i_2(0^+) = 0$ A. Calcular $u_R(t)$, para $t > 0$.

[Res. $u_R(t) = 0,5 - 0,5e^{-4t} - 2te^{-2t}$]

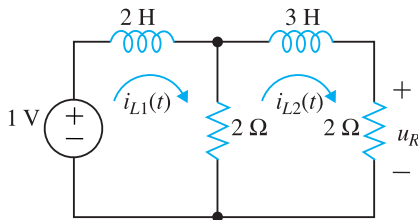


Figura P.4.22

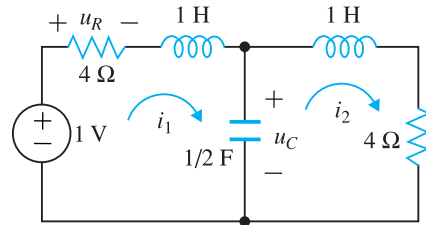


Figura P.4.23

- 4.25. En el circuito de la Figura P.4.24, el conmutador pasa en $t = 0$ de la posición 1 a la 2, habiéndose conseguido los siguientes valores iniciales: $i_L(0^-) = 2$ A; $u_C(0^-) = 4$ V. Calcular la corriente $i(t)$ para $t > 0$ si la capacidad C vale: a) $1/20$ faradio; b) $1/4$ faradio; c) $1/3$ faradio. (Nota: Supóngase que los valores iniciales son los mismos en las tres situaciones).

[Res. a) $2\sqrt{2}e^{-2t}(\cos 4t + 45^\circ)$; b) $(2 - 8t)e^{-2t}$; c) $-3e^{-t} + 5e^{-3t}$]

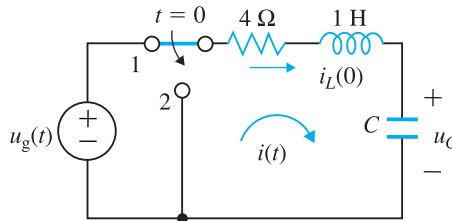


Figura P.4.24

- 4.26. En el circuito de la Figura P.4.25, el interruptor ha permanecido cerrado hasta conseguir el régimen permanente. En $t = 0$ el interruptor se abre. Calcular la tensión $u(t)$ para $t > 0$.

[Res. $u(t) = -1.200e^{-50t} \text{sen } 10^4 t$]

- 4.27. En el circuito de la Figura P.4.26, el interruptor se cierra en $t = 0$. Las condiciones iniciales son: $i_L(0^-) = 1$ A; $u_C(0^-) = 2$ V. Calcular $i_L(t)$ para $t > 0$.

[Res. $i_L(t) = 0,667 + 2,04e^{-1,25t} \cos(1,2t - 80,64^\circ)$]

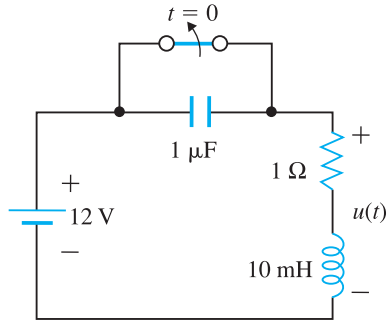


Figura P.4.25

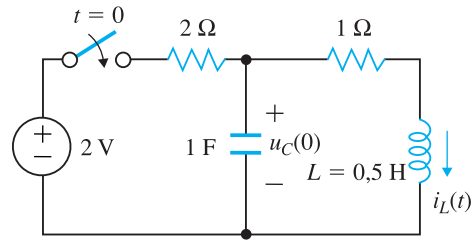


Figura P.4.26

- 4.28.** En el circuito de la Figura P.4.27, las condiciones iniciales son nulas. Calcular $u_R(t)$ para $t > 0$.

[Res. $u_R(t) = 1 + 1,41e^{-0,625t} \cos(0,33t + 111^\circ)$]

- 4.29.** En el circuito de la Figura P.4.28, el interruptor S_1 se abre en $t = 0$ mientras que S_2 se cierra en ese mismo instante. Calcular: a) corriente en la bobina para $t = 0^-$; b) tensión en la bobina para $t > 0$.

[Res. 1) -1 A; 2) $4e^{-3t}$]

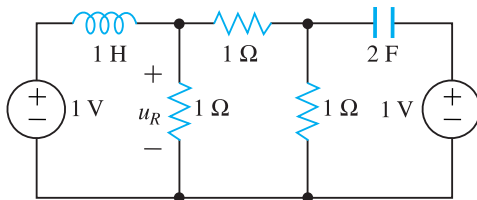


Figura P.4.27

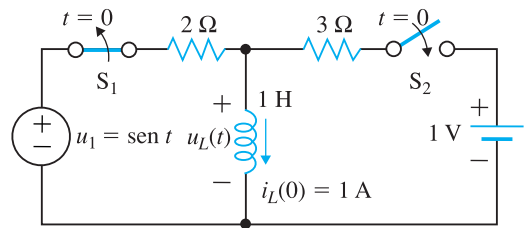


Figura P.4.28

- 4.30.** En el circuito de la Figura P.4.29 las condiciones iniciales son nulas. Calcular $u_C(t)$ para $t > 0$.

[Res. $u_C(t) = 1,25e^{-2t} - e^{-4t} + 0,5t - 0,25$]

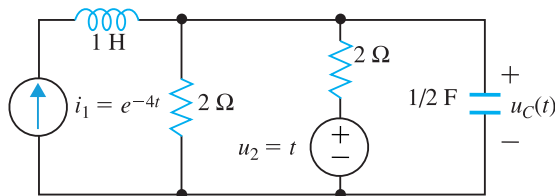


Figura P.4.29

- 4.31.** La red de la Figura P.4.30 funciona en régimen permanente con el conmutador en la posición 1. En $t = 0$, el conmutador pasa a la posición 2. Calcular $i_L(t)$ para $t > 0$.

[Res. $i_L(t) = 0,0697e^{-5,050t} - 0,0697e^{-495,000t}$ mA]

- 4.32.** La red de la Figura P.4.31 representa el circuito equivalente por fase de un motor asíncrono trifásico ($R = 30 \Omega$; $L = 60 \text{ mH}$), el condensador $C = 50 \mu\text{F}$ es el empleado para corregir el f.d.p. del motor. El interruptor S representa en realidad los contactos principales del contactor que acciona el motor. Si el $t = 0$ se abre S , determinar la tensión que aparece entre los contactos fijos y móviles del contactor. La red tiene una tensión simple de 220 V , 50 Hz .

[Res. $220\sqrt{2} \cos 314t + 340e^{-250t} \cos(520t - 156,4^\circ)$]

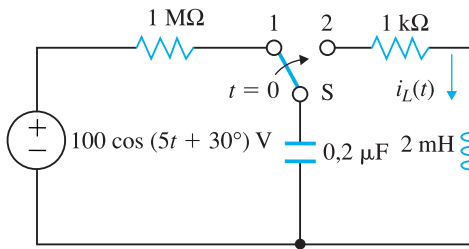


Figura P.4.30

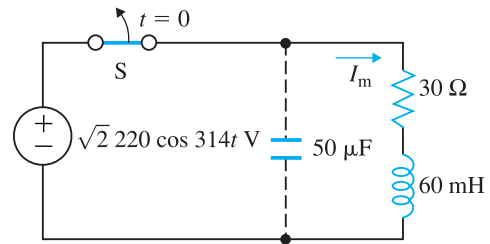


Figura P.4.31

- 4.33.** La red de la Figura P.4.32 se utiliza para producir *corrientes tipo impulso* de valor elevado; C representa un banco de condensadores conectados en paralelo que se cargan a una tensión U , mediante un circuito que no se muestra en la figura. A y B son dos esferas explosoras cuya distancia se gradúa para que salte un arco entre ellas cuando los condensadores se han cargado a la tensión especificada U_C ; R representa la resistencia del circuito y del equipo a ensayar; L es una inductancia con núcleo de aire con unas pocas espiras. Si los parámetros de la red son: $U_C = 25 \text{ kV}$; $C = 8 \mu\text{F}$; $L = 8 \mu\text{H}$; $R = 1 \Omega$. Calcular: a) expresión de la corriente instantánea $i(t)$ para $t > 0$ (el tiempo $t = 0$ se considera el instante en el que se produce el arco entre A y B); b) tiempo necesario para que se obtenga el máximo de corriente; c) corriente máxima o de pico para el tiempo anterior.

[Res. a) $i(t) = 28.865e^{-62.500t} \text{ sen } 108.300t$; b) $9,67 \mu\text{s}$; c) $13,66 \text{ kA}$]

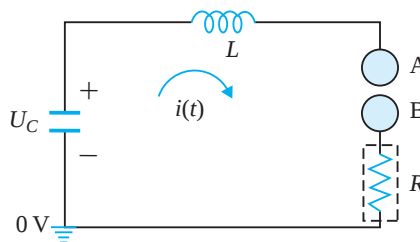


Figura P.4.32

- 4.34.** En el circuito de la Figura P.4.33, el interruptor se cierra para $t = 0$. Calcular $i(t)$ para $t > 0$.

[Res. $i(t) = 10^{-4}e^{-t}(\cos t - \text{sen } t)$]

- 4.35.** En el circuito de la Figura P.4.34, las condiciones iniciales son: $i_L(0^-) = 1 \text{ A}$; $u_C(0^-) = 1 \text{ V}$. En $t = 0$ se cierra el interruptor. Calcular la corriente $i(t)$ suministrada por la pila de 12 V para $t > 0$.

[Res. $i(t) = 7,5 - 4,5e^{-1,5t} + 13e^{-2t}$]

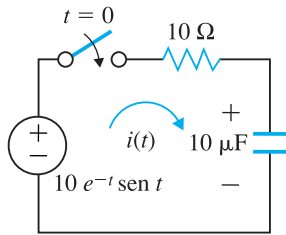


Figura P.4.33

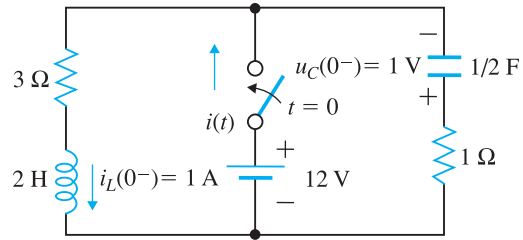


Figura P.4.34

- 4.36.** En el circuito de la Figura P.4.35, el interruptor se abre en $t = 0$, una vez que la red había alcanzado el régimen permanente. Calcular la corriente $i_L(t)$ para $t > 0$.

[Res. $i_L(t) = 0,252e^{-35t} \cos(281t + 6,3^\circ)$]

- 4.37.** En el circuito de la Figura P.4.36, el condensador se mantiene en la posición 1 hasta alcanzar el régimen permanente. En $t = 0$, el conmutador se pasa a la posición 2. Calcular $i_C(t)$ para $t > 0$.

[Res. $i_C(t) = -5 \cdot 10^{-5} \delta(t) + 2,5 \cdot 10^{-5} e^{-0,5t}$]

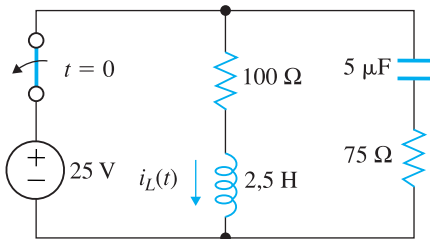


Figura P.4.35

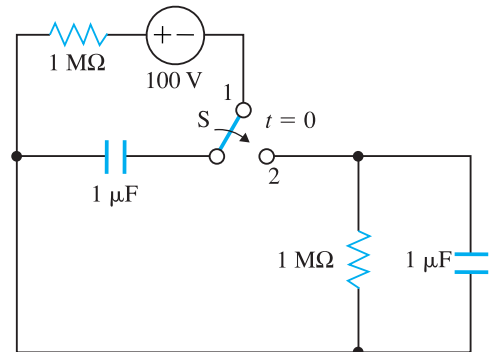


Figura P.4.36

- 4.38.** En el circuito de la Figura P.4.37, los interruptores S_1 y S_2 están cerrados y S_3 abierto, alcanzándose el régimen permanente en estas condiciones. En el tiempo $t = 0$, se abren los interruptores S_1 y S_2 y se cierra S_3 . Calcular las expresiones de $i(t)$ y de $u_L(t)$ para $t > 0$.

[Res. $i(t) = 5e^{-t}$; $u_L(t) = 15\delta(t) - 5e^{-t}$]

- 4.39.** BOBINA DE TESLA. En la Figura P.4.38, se muestra una bobina de Tesla, empleada en los laboratorios de ensayos de alta tensión, para producir tensiones elevadas y de alta frecuencia (del orden de un millón de voltios, entre 10 y 100 kHz). Se trata de un transformador con núcleo de aire doblemente resonante, que se alimenta por medio de una red de c.c. o de c.a. a través de un condensador C_1 . En la Figura P.4.38, A y B son dos esferas (que constituyen un aparato denominado espinterómetro) cuya separación se puede graduar mediante un mecanismo accionado por un motor eléctrico. Cuando el condensador C_1 adquiere una tensión U_1 , se acercan las esferas A y B entre sí hasta que se produce una

descarga en el aire existente entre ellas (U_1 se denomina tensión de disparo). Los devanados tienen inductancias propias L_1 y L_2 e inductancia mutua M . Si se desprecian las resistencias de los devanados y se considera que la descarga entre las esferas se puede representar como un cortocircuito brusco, calcular la tensión $u_2(t)$ que aparece en el condensador conectado en el secundario.

[Res. $u_2(t) = \frac{MU_1}{\sigma L_1 L_2 C_2} \frac{1}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} (\cos \gamma_1 t - \cos \gamma_2 t)$; donde se cumple: $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$; $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$; $\gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}{4} - \omega_1^2 \omega_2^2 (1 - k^2)} \right]$; $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$; $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$]

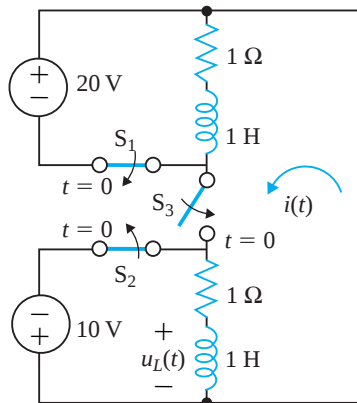


Figura P.4.37

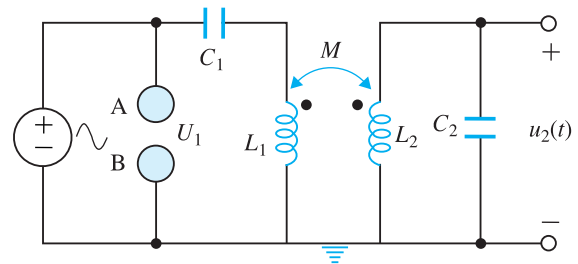


Figura P.4.38

4.40. GENERADOR DE ONDAS DE CHOQUE. La Figura P.4.39 representa el esquema simplificado de un generador de ondas de choque que permite simular una sobretensión atmosférica (tipo rayo). Este tipo de sobretensiones son de la forma mostrada en la parte derecha de la figura. El tiempo de elevación se define como $1,25 (t_2 - t_1)$ y es del orden de $0,5$ a $10 \mu s$, y el tiempo de caída t_3 representa el tiempo para el cual la onda ha bajado al 50 % del valor de pico U_p . Una onda estándar es por ejemplo: 1.000 kV ; $1,2/50 \mu s$, que significa un pico de 1.000 kV , con un tiempo de elevación de $1,2 \mu s$ y un tiempo de caída de $50 \mu s$. Estas ondas responden a la ecuación general:

$$u(t) = U_0(e^{\alpha t} - e^{\beta t})$$

donde para la señal normalizada anterior: $U_0 = 1,04U_p$; $\alpha = -0,0146$; $\beta = -2,467$. La Figura P.4.39 permite producir una onda de choque para ensayos dieléctricos: aisladores, máquinas eléctricas y otros. Un condensador C_1 se carga a una tensión U de c.c. mediante un circuito no dibujado en la figura y se descarga a continuación sobre la red $R_1 R_2 C_2$ al cerrar el interruptor S . Calcular la expresión de $u_0(t)$.

[Res. $u_0(t) = \frac{U}{R_1 C_2 (\alpha - \beta)} (e^{\alpha t} - e^{\beta t})$ donde α y β cumplen las relaciones siguientes: $\alpha + \beta = -\left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right]$; $\alpha \beta = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}$; en la práctica $1/R_1 C_1$ y $1/R_2 C_2$ son mucho menores que $1/R_1 C_2$ por lo que se cumple de un modo aproximado: $\alpha = -\frac{1}{R_1 C_2}$; $\beta = -\frac{1}{R_2 C_1}$]

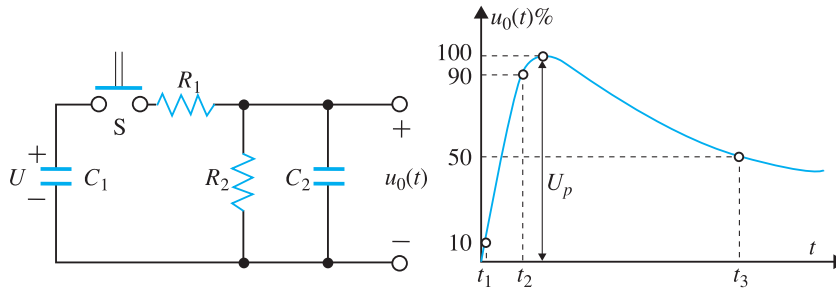


Figura P.4.39



Biografías

BELLMAN, Richard (1920-1984). Matemático americano. Estudió en el *Brooklyn College* (1941), en la Universidad de Wisconsin (1943), recibiendo el título de Doctor en la Universidad de Princeton (1946). Durante la Segunda Guerra Mundial fue miembro de la división de física teórica del equipo que desarrollaba la bomba atómica en Los Alamos. Más tarde trabajó en la preparación de la bomba de hidrógeno. Enseñó en las Universidades de Princeton y Stanford. En 1953 ingresó en la compañía de ordenadores Rand, donde permanecería hasta 1965, fecha en la que fue contratado como catedrático de Ingeniería Eléctrica por la Universidad Southern California en los Angeles, en la que enseñó también Ingeniería Biomédica y Matemáticas. Bellman es conocido mundialmente por su invención en 1953 de la programación dinámica, que tiene aplicaciones en ingeniería de control y también en economía y gestión. En 1979 recibió la Medalla de Honor del IEEE por sus contribuciones a los procesos de decisión y a la teoría de los sistemas de control, en particular a la creación y aplicación de la programación dinámica. Fue autor de más de 620 artículos científicos y 40 libros. Miembro de la Academia de Artes y Ciencias Americana (1975), Academia de Ingeniería (1977), y de la Academia Nacional de Ciencias (1983).

BUSH, Vannevar (1890-1974). Ingeniero eléctrico americano. Estudió en la región de Boston, fue a la Universidad de Tufts donde consiguió el título de ingeniero eléctrico en 1913 y obtuvo su doctorado en el *Massachusetts Institute of Technology* en 1916. Fue profesor de matemáticas en Tufts durante el curso 1914-15 y de ingeniería eléctrica el curso 1915-16. Durante la Primera Guerra Mundial trabajó en un equipo de investigación de la Armada de Estados Unidos para detección de submarinos. En 1919 aceptó el nombramiento de profesor de Transporte de Energía Eléctrica en el M.I.T., en 1923 pasaría a catedrático y nueve años más tarde llegaría a decano del centro. En 1920 desarrolló un analizador de redes para simular el comportamiento de grandes redes eléctricas. En 1930 Bush y sus compañeros del M.I.T. construyeron *el analizador diferencial*, una máquina capaz de resolver ecuaciones diferenciales. En realidad, Bush había inventado el primer ordenador analógico del mundo; en la década siguiente se construyeron versiones más elaboradas de dicha máquina. Durante la Segunda Guerra Mundial se realizaron importantes avances tanto en la teoría como en la práctica, merced a las teorías de Norbert Wiener y John von Neumann, de tal modo que en 1946 se construyó el ENIAC, un ordenador de tipo digital que permitía la programación de operaciones. En 1939 le nombraron presidente de la *Carnegie Institution* de Washington. En 1940 pasó a dirigir el Comité de Investigación para el Ministerio de Defensa americano, desde donde coordinó la investigación científica con la industria militar. A raíz de la carta que escribió Einstein al presidente Roosevelt, Bush apoyó el establecimiento del Proyecto Manhattan, que desarrolló más tarde la bomba atómica. Después de la guerra, recibe el nombramiento de director del Consejo Superior de Investigaciones Científicas americano, y ocupó diversos puestos políticos en relación con la investigación. Estaba en posesión de 17 doctorados Honoris Causa y de 13 medallas científicas: medalla Levy del Instituto Franklin (1928), medalla Lamme del AIEE (1935), medalla Edison (1943), medalla de los Servicios distinguidos de los EE.UU. (1945), y otras más.

CARSON, John Renshaw (1887-1940). Ingeniero americano. Se graduó en Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Princeton en 1909. Allí enseñó Física e Ingeniería Eléctrica entre 1912 y 1914. En 1915 ingresó en la AT&T donde estudió la radiocomunicación transoceánica. Cuando estudiaba la teoría de la modulación de señales de radio, propuso la transmisión en forma de banda lateral única con portadora suprimida SSB (*Single Side Band*). En 1919 publicó en la revista del IRE (*Institute of Radio Engineers*) un artículo de casi 80 páginas sobre teoría de las oscilaciones eléctricas de las redes eléctricas y sistemas de transmisión. En 1922 presentó un artículo en la misma revista en el que estudiaba con rigor la modulación de frecuencia y concluía que la FM no ofrecía ninguna ventaja respecto a la AM como un medio de conservación del espectro electromagnético. Las ideas de Carson eran correctas, sin embargo Edwin H. Armstrong demostraría unos años después que la FM con limitación de amplitud limitaba enormemente el ruido y la interferencia, lo que representaba una gran ventaja de la FM respecto de la AM. Carson publicó en 1926 su famoso libro: *Electrical Circuit Theory and the Operational Calculus*, en el que ampliaba el cálculo operacional de Oliver Heaviside y en el que se estudiaba con rigor el régimen transitorio de los circuitos eléctricos. Recibió el

premio Morris Liebmann del IRE en 1924 y la medalla Elliot Cresson del Instituto Franklin en 1939. Carson publicó 50 artículos técnicos y estaba en posesión de cerca de 25 patentes. La labor científica de Carson en electrónica y comunicaciones se la ha comparado a menudo con la que realizó Steinmetz en la Ingeniería Eléctrica.

GERARD, Eric (1857-1914). Ingeniero belga. Estudió la carrera de Ingeniero de Minas en Lieja (1879). Trabajó en la administración belga de telégrafos. Excelente profesor, gran pedagogo y magnífico autor de libros de electrotecnia. Director del Instituto Electrotécnico de Montefiore, anexo a la Universidad de Lieja. Este centro, primero en el mundo en la enseñanza de la Ingeniería Eléctrica fue fundado por el industrial y senador belga Georges Montefiore en 1882. Aquí se acuñó probablemente el nombre de la disciplina Electrotecnia. En 1890 publicó sus *Leçons sur l'Électricité y Mesures électriques*, que se tomaron como textos obligados en muchos centros de Ingeniería Superior e Ingeniería Técnica del mundo. Gerard fue premiado por el gobierno belga con la cruz de oficial de la orden de Leopoldo, como Caballero de la Legión de Honor francesa, Cruz de oficial de la Corona de Italia y comandante de la orden de San Estanislao de la Monarquía rusa. En sus últimos años fue elegido por el Rey Leopoldo II para investigar la posibilidad de tratamiento electrolítico de las minas de cobre de Katanga (que por entonces pertenecía al Congo Belga). Fue presidente de la Asociación de Ingenieros Eléctricos de Bélgica y representante belga ante la Comisión Electrotécnica Internacional. Miembro honorífico del IEE en 1911. Este Instituto fue la cuna de excelentes profesores españoles y que trajeron la enseñanza de esta materia a nuestro país. Destacamos entre otros a D. José Morillo y Farfán que fue catedrático de la E.T.S.I. Industriales de Madrid; D. José A. Pérez del Pulgar S.J., jesuita, fundador del I.C.A.I. y profesor de esta asignatura desde 1914 a 1939; D. Antonio Robert Rodríguez, catedrático de la E.T.S.I. Industriales de Barcelona, desde 1919 a 1950.

GONZÁLEZ ECHARTE, Antonio (1864-1942). Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos español. Se graduó como ingeniero de caminos en 1889. Fue alumno del ingeniero industrial Francisco de Paula Rojas en la Escuela Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos, quien le impartió las enseñanzas de Hidráulica. Su primer destino fue en la División de los Ferrocarriles del Norte. A principios del siglo XX se asocia con D. Joaquín Arteaga y Echagüe, marqués de Santillana, para dirigir las obras de la Compañía Hidráulica de Santillana. Fue el responsable de la construcción de las primeras centrales hidroeléctricas que suministraron electricidad a Madrid. A él se debe el proyecto y construcción del embalse de Santillana, del embalse de El Pardo y la central de Navallar en Colmenar Viejo. En 1904, funda con los ingenieros de caminos, Carlos Mendoza y Sáez de Argandaña y Alfredo Moreno Osorio, la Compañía Eléctrica Mengemor (acrónimo formado por las iniciales de los tres ingenieros), que construyeron centrales eléctricas en la región andaluza de Jaén. Fue delegado español del Congreso Internacional de Electricidad celebrado en San Luis en 1904 (junto con Miguel Otamendi y Leopoldo Brockman). Entre 1910 y 1915 fue catedrático de Electrotecnia II: Máquinas Eléctricas en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid. En 1915, funda con los ingenieros de caminos Carlos Mendoza y Miguel de Otamendi, la Compañía metropolitana de Madrid. Las obras del metro Alfonso XIII comenzaron en 1917, inaugurándose la línea Sol-Cuatro Caminos en Octubre de 1919.

HEAVISIDE, Oliver (1850-1925). Ingeniero eléctrico inglés. Heaviside no tenía una instrucción universitaria completa, pero con el estímulo de su tío Charles Wheatstone empezó un programa de autoeducación que resultó admirable. El primer trabajo científico que le dio notoriedad fue demostrar que las ecuaciones de Lord Kelvin sobre cables telegráficos eran incompletas y que debía tenerse en cuenta el efecto de la autoinducción; el reconocimiento del propio Kelvin (que era el científico inglés más brillante del siglo XIX) de esta mejora, le dio fama mundial. Escribió un excelente tratado en tres volúmenes sobre Teoría del Electromagnetismo, el primero lo publicó en 1893, el segundo en 1899 y el tercero en 1912 (en realidad los textos modernos de electromagnetismo se basan más en la nomenclatura de las ecuaciones de Maxwell que escribió Heaviside en forma racionalizada, que en la forma en que las escribió el propio Maxwell). Sus teorías permitieron comprender con exactitud el funcionamiento de las líneas telegráficas y telefónicas. Fue el primero en demostrar la variación de la resistencia eléctrica con la frecuencia. Predijo meses más tarde que Kennelly la existencia de la región E de la ionosfera en la que se reflejaban las ondas de radio. Realizó un trabajo muy importante al aplicar las matemáticas al análisis de los circuitos eléctricos. En particular introdujo el cálculo operacional que permitía de un modo muy simple, analizar el comportamiento de los circuitos eléctricos en régimen transitorio. También reconoció la analogía entre los circuitos eléctrico y magnético, dando el nombre de reluctancia a la *resistencia magnética*. *Fellow de la Royal Society* en 1891. Premiado con la medalla Faraday en 1921 y Doctor Honoris Causa por la Universidad de Gotinga.

KALMAN, Rudolf E. (1930-). Ingeniero húngaro americano. Hijo de un ingeniero eléctrico, decidió seguir los pasos de su padre. Emigró a los EE.UU. y se graduó en Ingeniería Eléctrica en el MIT en 1954. Obtuvo el título de Doctor en 1957, en la Universidad de Columbia, siendo su director el profesor J. R. Ragazzini. Desde el comienzo de su carrera, estuvo interesado por los sistemas de control y las representaciones en variables de estado. En el bienio 1957-58, ingresó como ingeniero en el laboratorio de investigación de la IBM, haciendo importantes contribuciones al diseño de sistemas de control con datos muestrados utilizando criterios de comportamiento de tipo cuadrático y aplicando la teoría de Lyapunov para el estudio de la estabilidad de sistemas de control. En 1958 se incorpora al Instituto de Investigación para Estudios Avanzados que dirigía el famoso matemático Solomon Lefschetz. Fue contratado inicialmente como matemático, llegando más tarde a director de investigación. En este centro, en el que permanecería entre los años 1958 y 1964, hizo grandes contribuciones a la teoría del control moderna. Sus conferencias y publicaciones en estos años reflejan su alta creatividad y su sólida base matemática. Unificó la teoría de los sistemas lineales de control, para sistemas continuos y discretos. Introdujo conceptos fundamentales

como controlabilidad y observabilidad. Aplicó la teoría de Caratheodory al control óptimo y clarificó las relaciones entre el principio del máximo de Pontryagin y la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, así como el cálculo variacional. En este centro hizo la contribución más importante y por la que es más conocido, que es el llamado *filtro de Kalman*, aplicado al principio de sistemas discretos, después a sistemas continuos y finalmente a sistemas no lineales. El filtro de Kalman es una gran contribución a la teoría del control moderno y se ha utilizado en controles espaciales (vehículos Apolo), en algoritmos de seguimiento de radar, en control de procesos e incluso en sistemas socio-económicos. En 1964, Kalman se trasladó a la Universidad de Stanford como profesor asociado del Departamento de Ingeniería Eléctrica, Mecánica e Investigación Operativa, haciendo contribuciones fundamentales en la teoría de sistemas algebraicos aplicados al control. En 1971 es contratado por la Universidad de Florida como profesor de investigación. Recibió en 1974 la Medalla de Honor del IEEE por sus grandes contribuciones a la teoría de sistemas y métodos modernos de la teoría del control.

LAPLACE, Pierre Simon (1749-1827). Astrónomo y matemático francés. Laplace descendía de una familia pobre, pero unos vecinos acomodados ayudaron a este joven prometedor a que recibiera una educación apropiada. Con 18 años le enviaron a París con una carta para D'Alembert quien se negó a recibirle. Laplace le envió un ensayo de mecánica tan bueno que D'Alembert se ofreció enseguida a protegerle, proporcionándole una cátedra de matemáticas en la Escuela Militar de París. Al principio de su carrera colaboró con Lavoisier en la determinación de calores específicos de numerosas sustancias; entre los dos demostraron en 1780 que la cantidad de calor que se requería para descomponer una sustancia es igual a la que se desprende al formar dicha sustancia a partir de sus elementos. Esto puede considerarse como el principio de la termoquímica y de la ley de conservación de la energía. En 1785 inicia sus estudios sobre las perturbaciones de los cuerpos del sistema solar y a la cuestión de la estabilidad general de dicho sistema que ya había iniciado Lagrange. Sus investigaciones astronómicas las recopiló en una monumental obra de cinco volúmenes llamada: *Mecánica Celeste* y que se editó en el intervalo de 1799 a 1825 (esta obra es famosa por la costumbre generalizada a lo largo de ella de decir que de la ecuación A se pasa fácilmente a la ecuación B, y a veces los estudiantes se pasan horas e incluso días en aclarar los pasos intermedios que se omiten). En matemáticas puras escribió un tratado de probabilidades (1820). También realizó estudios en teoría de series, integración de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, teoría de las ecuaciones, etc. En Física, trabajó en la teoría del potencial, altura barométrica de los montes, acerca de la velocidad del sonido, dilatación de los cuerpos sólidos, etc. Miembro de la Academia de Ciencias en 1785. Tuvo la habilidad para cambiar de actitud política según las circunstancias y así fue Ministro de Gobernación con Napoleón y cuando Luis XVIII subió al trono después de la caída de Napoleón, Laplace no sufrió persecución por su cargo anterior, incluso el rey le dio el título de marqués.

MADARIAGA Y CASADO, Jose María de (1853-1934). Ingeniero de Minas español. Al finalizar su carrera estuvo destinado en Almadén (1879-1886). Profesor en el Laboratorio de Química de la E.T.S. de Ingenieros de Minas de Madrid (1886-1891), y desde esta última fecha hasta su fallecimiento, desempeñó en la misma Escuela, la cátedra de Electrotecnia. Divulgó la electricidad en un curso de estudios superiores del Ateneo, dando 20 conferencias sobre electrostática, magnetismo y electromagnetismo (1897). En 1902 ingresó en la Academia de Ciencias. Fue representante español en la Comisión Internacional de Electrotecnia. Publicó diversos artículos sobre tranvías eléctricos, autoinducción en líneas aéreas, imágenes eléctricas y estudio de las redes de transporte.

PÉREZ DEL PULGAR, José Agustín (1875-1939). Jesuita, profesor, escritor científico español. Licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad de Madrid (1905). Amplió estudios en Bélgica, Holanda y Alemania. Fundador del Instituto Católico de Artes e Industrias (ICAI) en 1914. En el verano de 1917 fue a Suiza, pensionado por el ministerio de Instrucción Pública, con el encargo de escribir una memoria, que presentó en ese mismo año a la Junta de ampliación de estudios, sobre el estado de la construcción eléctrica en aquel país. Con ocasión de este viaje y de experiencias hechas en los laboratorios del ICAI hizo algunos trabajos sobre las causas y remedios del atraso en que se hallaba la construcción de material eléctrico en España, que expuso en el Congreso de Ingeniería de 1919. Profesor de Electrotecnia en este centro desde su creación hasta su fallecimiento en 1939. Su obra principal fue *Electrodinámica industrial* de la que se publicaron cuatro tomos. A propósito de la electrificación de los ferrocarriles españoles, dio el 9 de junio de 1919, en el Instituto de Ingenieros Civiles una conferencia sobre la adopción de un sistema único de tracción para los ferrocarriles españoles, en el que defendía la electrificación gradual con corriente continua. Fue el primero en proponer la construcción de la Red Nacional Eléctrica Española, bajo la forma de uno o dos polígonos concéntricos unidos por líneas radiales. Autor de numerosos trabajos de Ingeniería Eléctrica: teoría del potencial, observaciones sobre la teoría matemática de la electricidad, el diagrama general de los sistemas electromagnéticos de c.a., etc. que escribió en diversas revistas: Ibérica, Energía Eléctrica, Boletín Tecnológico, Anales de la Asociación de Ingenieros del ICAI, Las Ciencias, y otras.

ROJAS Y CABALLERO INFANTE, Francisco de Paula (1833-1909). Ingeniero industrial español de la primera promoción del Real Instituto Industrial (1856). Catedrático de Física Aplicada en la Escuela Industrial de Valencia y después en la E.T.S.I. Industriales de Barcelona; posteriormente pasó a Madrid (1887) a formar parte de la Escuela Politécnica. Fue también profesor de Física Matemática en la Universidad Central. Individuo de número de las Reales Academias de Ciencias de Madrid y Barcelona. Su obra principal fue *Electrodinámica Industrial* de la que se publicaron tres tomos. La Real Academia de Ciencias le premió por su Memoria: *Estudio de la máquina dinamoeléctrica* (1887). Dirigió la publicación de la Revista *La Electricidad*, primera en España que dio a conocer los adelantos de la ciencia eléctrica. En esta revista que, desgraciadamente duró unos

cinco años (1883-1888), existía una *Sección Doctrinal* desde la cual el profesor Rojas difundió, por primera vez en nuestro país, los fundamentos y aplicaciones de la electricidad. Se le considera el patriarca de la Electrotecnia española ya que fue el primer catedrático de esta materia en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona.

TERMAN, Frederick Emmons (1900-1983). Ingeniero americano. En 1910 su familia se trasladó a Stanford ya que su padre había sido nombrado director del Departamento de Psicología de la universidad. En 1920 se graduó en la Universidad de Stanford con un título en química industrial, pero entonces se cambió a Ingeniería Eléctrica, graduándose en la misma universidad en 1922. Doctor por el *Massachusetts Institute of Technology*, M.I.T. en 1924. Su tesis doctoral versó sobre transporte de energía eléctrica a gran distancia y fue dirigida por Vannevar Bush. En 1925 volvió a Stanford para enseñar comunicaciones y electrónica. En 1927 fue nombrado profesor de Ingeniería Eléctrica en Stanford. Fue catedrático, director del Departamento de Ingeniería Eléctrica y director de la Escuela de Ingeniería de esta universidad. Excelente profesor y educador. Terman fue el responsable de que este centro alcanzara gran fama mundial. Introdujo los estudios de telecomunicación e impulsó las enseñanzas de Laboratorio. Presidente del IRE en 1942. Entre 1943 y 1945 fue director del Laboratorio de radio de Harvard. En 1945 volvió a Stanford e impulsó la colaboración Universidad-Empresa. Muchos de sus alumnos fueron los responsables de la creación del valle del silicio en California; el ejemplo más conocido fue la compañía formada por W. R. Hewlet y David Packard, hoy una multinacional que lleva los apellidos de sus fundadores. Escribió varios libros de texto entre los que destacan: *Teoría de las Líneas de Transmisión e Ingeniería Electrónica y de Radio*. Recibió la Medalla de Honor del IRE en 1950 y fue la primera persona que recibió la Medalla de Educación del AIEE en 1956. Miembro fundador de la Academia de Ingeniería americana en 1964. Medalla Nacional de Ciencia en 1976. Presidente del IRE en 1941.

ZADEH, Lotfi A. (1921-). Ingeniero iraní-americano. Estudió en la Universidad de Teherán donde se graduó como ingeniero eléctrico en 1942. En 1944 se trasladó a los EE.UU. y obtuvo el máster en ingeniería eléctrica en el M.I.T. en 1946. Continuó los estudios de doctorado en la Universidad de Columbia, leyendo su Tesis Doctoral en 1949, que era un trabajo sobre el análisis frecuencial de redes con parámetros variables con el tiempo. Fue contratado a continuación en esta universidad como profesor ayudante, llegando a catedrático en 1957. En esta universidad dio clases de electromagnetismo, análisis de circuitos, teoría de la información y máquinas secuenciales. Colaboró con el catedrático J.R. Ragazzini en la extensión de la teoría de Wiener de la predicción y escribió con aquél, un libro pionero sobre los sistemas de control de datos muestreados. En 1959, Zadeh deja la Universidad de Columbia para integrarse en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de California, en Berkeley, donde fue nombrado director de departamento en 1963. En este Departamento, trabajó en sistemas lineales y teoría de autómatas, escribiendo junto con Charles Desoer un libro pionero sobre el espacio de estado, que sería el fundamento de la teoría del control moderno. En 1965, publicó un gran trabajo sobre conjuntos difusos (*fuzzy sets*), que sería el comienzo de un nuevo enfoque de los sistemas de control y que se ha aplicado desde entonces a numerosos campos científicos e industriales. Recibió en 1974 la Medalla de Educación del IEEE, la medalla del Centenario del IEEE en 1984 y en 1992 la Medalla Richard W. Hamming del IEEE. Es miembro de la Academia Nacional de Ingeniería de EE.UU. y miembro extranjero de la Academia de Ciencias Naturales de Rusia. *Fellow* de la Asociación Americana para Avance de la Ciencia, de la Asociación Americana de Inteligencia Artificial y otras más. En 1995 recibió la Medalla de Honor del IEEE por sus trabajos pioneros sobre lógica difusa. Dr. Honoris Causa por la Universidad Politécnica de Madrid en el año 2007.



Referencias

- APLEVICH, J. D.: *The Essentials of Linear State-Space Systems*. J. Wiley & Sons. Inc., New York, 2000.
- ASELTINE, J.: *Transform Method in Linear System Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1958.
- BALABANIAN, N.: *Electrical Network Theory*. J. Wiley & Sons, New York, 1969.
- BUDAK, A.: *Circuit Theory: Fundamentals and Applications*. Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, N.J., 1978.
- CLEMENT, P. R.; JOHNSON, W. C.: *Electrical Engineering Science*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1960.
- DESOER, C. A.; KUHL, E. S.: *Basic Circuit Theory*. McGraw-Hill Book Co.
- DIRECTOR, S. W.; ROHRER, R. A.: *Introduction to System Theory*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1972.
- EICHENAUER, C. J.: *Transient System Analysis on a Personal Computer*. J. Wiley & Sons, New York, 1988.
- GARDNER, M. F.; BARNES, J. L.: *Transients in Linear Systems*. J. Wiley & Sons, New York, 1942.
- GEREZ, V.; MURRAY-LASSO, M. A.: *Teoría de Sistemas y Circuitos. Tomo 1*. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., México, 1974.
- GLISSON, T. H.: *Introduction to System Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1985.
- GOLMAN, S.: *Laplace Transform Theory and Electric Transients*. Dover Pub., New York, 1966.

- GREENWOOD, A.: *Electrical Transients in Power Systems*. J. Wiley & Sons. Interscience, New York, 1971.
- HOSTETTER, G. H.: *Engineering Network Analysis*. Harper & Row Pub., New York, 1984.
- HUELSMAN, L.: *Basic Circuit Theory*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984.
- JIMÉNEZ GARZA, F.: *Análisis de Circuitos Eléctricos*. Ed. Limusa Wiley, México, 1980.
- JOHNSON, D.; HILBURN, J.; JOHNSON, J. R.: *Basic Electric Circuit Analysis*, 2ª ed, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- KARNI, S.: *Applied Circuit Analysis*. J. Wiley & Sons, New York, 1988.
- LAGO, G.; BENNINGFIELD, L. M.: *Circuit and System Theory*. J. Wiley & Sons, New York, 1979.
- MEADOWS, R. G.: *Electric Network Analysis*. Penguin Books, Middlesex, England, 1972.
- NAIDU M. S.; KAMARAJU, V.: *High Voltage Engineering*. Tata McGraw-Hill Book, New Delhi, 1982.
- PARRA, V.; PÉREZ, A.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.: *Circuitos Eléctricos. Volumen I*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid, 2003.
- PASTOR, A.; ORTEGA, J.: *Circuitos Eléctricos. Volumen II*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid, 2005.
- PETERSON, H. A.: *Transients in Power Systems*. Dover Pub, New York, 1951.
- RAS, E.: *Métodos en Teoría de Circuitos: Temporales, Frecuenciales, Operacionales*. Marcombo-Boixareu, Ed. Barcelona, 1971.
- SCOTT, D. E.: *Introducción al Análisis de Circuitos: Un enfoque sistémico*. McGraw-Hill/Interamericana de España S.A., Madrid, 1988.
- STANLEY, W. D.: *Transform Circuit Analysis for Engineering and Technology*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.
- STRUM, R. D.; WARD, J. R.: *Electric Circuits and Networks*. 2ª ed., Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- TRUXAL, J. G.: *Introductory System Engineering*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1972.
- VAN VALKENBURG, M. E.: *Análisis de Redes*. Ed. Limusa-Wiley, México, 1977.
- WARZANSKYJ, W.: *Análisis de Redes*. E.T.S.I. Telecomunicación, Madrid, 1973.
- ZEVEKE, G.; IONKIN, P.: *Analysis of Electric Circuits*. Mir Publisher, Moscú, 1973.

■ Apéndice 1

Circuitos eléctricos: Aspectos históricos

- A.1.1 Ley de Ohm y lemas de Kirchhoff
- A.1.2 Algunos teoremas de los circuitos eléctricos
- A.1.3 Circuitos de corriente alterna. El cálculo simbólico
- A.1.4 La potencia en corriente alterna
- A.1.5 Los sistemas polifásicos y el método de las componentes simétricas
- A.1.6 El cálculo operacional de Heaviside
- A.1.7 Los filtros eléctricos. La síntesis de los circuitos eléctricos
- A.1.8 La realimentación y otras contribuciones en circuitos
- A.1.9 Las innovaciones electrónicas y los circuitos activos
- A.1.10 De la teoría de circuitos a la teoría de sistemas
- A.1.11 El estudio de los circuitos eléctricos con ayuda de ordenador

■ A.1.1. Ley de Ohm y lemas de Kirchhoff

Desde el punto de vista de la historia de la electricidad, la teoría de los circuitos eléctricos comenzó su desarrollo como una rama independiente del electromagnetismo, con conceptos y métodos originales y propios¹. A mitad de la década de 1820, los científicos empezaban a distinguir los conceptos independientes de tensión e intensidad, pero sin embargo se carecía de la idea precisa de *resistencia eléctrica* y la de una relación posible entre la f.e.m. de una pila, la intensidad de la corriente que produce en un conductor y la naturaleza de este. George Simon Ohm (1789-1854) empezó sus experimentos sobre corrientes eléctricas en 1825. Inicialmente se sirvió de pilas de Volta, pero más tarde las sustituyó por elementos termoeléctricos de cobre-bismuto que había inventado T. J. Seebeck en 1823, y que daban una f.e.m. mucho más estable, lo que le permitió establecer su célebre ley: $i = E/(R + r)$ en la que i representa la intensidad de la corriente (que hasta casi el final del siglo XIX se simbolizaba realmente con la letra C de corriente), medida o registrada por la desviación de la aguja de un galvanómetro; E , la f.e.m. de la pila, proporcional al número de sus elementos en serie; R , su resistencia interna, también proporcional a ese número; y r , la resistencia del circuito exterior, dependiente, como había establecido Davy, de su naturaleza y dimensiones. Los conceptos de resistencia y de resistividad se determinan experimentalmente con precisión y lo mismo puede decirse de la medición de las tensiones de las pilas (lo que llamamos hoy fuerzas electromotrices). En su memoria de 1827 sobre tratamiento matemático de la cadena Galvánica, Ohm vuelve a expresar su ley por vía de cálculo, partiendo de unas hipótesis que son una simple traducción a la electricidad de los estudios realizados en 1822 por Fourier en su *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoría analítica del calor); la intensidad de la corriente, o flujo de electricidad, es el análogo del flujo de calor, y es constante en régimen permanente; el análogo de la temperatura es lo que Ohm llama la *fuerza electroscópica* en un punto dado. Todo queda claro desde el punto de vista de la teoría de los circuitos eléctricos. Lo único que falta es el vínculo exacto con la electricidad estática. Ohm da, sin duda, una definición electrostática de la fuerza electroscópica, o mejor dicho, describe su medición con ayuda de un electroscopio. La ley de Ohm se verificó cuantitativamente por Fechner en 1829 y luego por Pouillet en 1837, el cual utilizó para ello la brújula de tangentes que acababa de inventar y que permitía una medición muy precisa de las intensidades, al comparar el campo de un circuito eléctrico, de geometría bien definida, con el campo magnético terrestre.

En el año 1845, Gustav Kirchhoff (1824-1887), cuando solamente era estudiante universitario, amplió la teoría de Ohm, el cual no había tratado más que el caso lineal, a los conductores de dos dimensiones, es decir, las placas o láminas, y demostró sus clásicos lemas de los circuitos eléctricos. En 1848 y basándose, como Ohm, en la obra de Fourier, estableció la teoría del paso de la electricidad en los conductores de tres dimensiones. En ninguno de esos trabajos se trataba aún más que de tensión o fuerza electroscópica. Pero tras los experimentos de Kohlrausch, el cual midió en 1848 la tensión con un electrómetro, Kirchhoff identificó esta magnitud con el potencial electrostático de Poisson y Green, y

¹ La relación entre las teorías del electromagnetismo y los circuitos eléctricos se inicia con las publicaciones de O. Heaviside a finales del siglo XIX, y se consolidará en los años 1920 con los trabajos de J. R. Carson, un ingenieromatemático de los laboratorios de la Bell Telephone. Teniendo en cuenta que la ley de Ohm es de 1825, ambas especialidades de la ingeniería eléctrica avanzaron, por así decirlo, de un modo independiente durante casi 75 años.

enseguida se vio, teniendo también en cuenta la ley de Joule, descubierta en 1841 por el inglés James Prescott Joule (1818-1889), que esa era la única definición energética correcta del mismo. William Thomson (Lord Kelvin) (1824-1907) escribió en el año 1851 la Memoria titulada *On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium* (Sobre la teoría matemática de la electricidad en equilibrio). En este último trabajo subrayó la completa analogía de las ecuaciones de la electrostática con las de la conducción térmica estacionaria, lo cual supone una identidad de propiedades entre superficies equipotenciales y superficies isotermas: en los dos casos, la ecuación básica es la de Laplace, aunque en uno admite una acción a distancia, y en el otro una propagación paso a paso.

Con los trabajos mencionados se asentaron en el siglo XIX las bases científicas de lo que hoy día se conoce como *análisis de circuitos de corriente continua*, es decir el cálculo de la respuesta de un circuito cuando se somete a excitaciones con fuentes de c.c. La concepción de un circuito como un sistema de elementos concentrados ideales en los que se representaban botellas de Leyden (condensadores), inductancias (bobinas) y reóstatos fue desapareciendo gradualmente en favor de los símbolos gráficos que hoy nos son tan familiares. Esto supone la simplificación de que una resistencia es una *caja negra* con dos terminales (dipolo) en la que se define la relación $v = Ri$, en vez de considerar un dispositivo físico real fabricado con metal o película de carbón y de un modo semejante se definían las relaciones para las inductancias y condensadores.

■ A.1.2. Algunos teoremas de los circuitos eléctricos

El principio de superposición de los circuitos eléctricos fue claramente establecido por Hermann von Helmholtz (1821-1894), en un trabajo publicado en 1853, en la Revista *Annalen der Physik und Chemie* de Poggendorf; en este mismo trabajo se señalaba también que una parte de una red eléctrica se podía sustituir por una fuente de tensión en serie con una resistencia. Treinta años más tarde, en el año 1883, Léon Charles Thévenin (1857-1926), un ingeniero de telégrafos francés, indicaría este mismo hecho mediante el teorema que lleva su nombre y que publicó en la revista francesa *Annales Télégraphiques*. Este teorema aparece mencionado por primera vez en un libro de texto, en la página 153 del primer tomo del *Traité d'Électricité et de Magnétisme* (Tratado de Electricidad y Magnetismo) de A. Vaschy publicado en 1890, sin embargo no se utilizó prácticamente hasta la década de 1920, para estudiar los circuitos equivalentes de las válvulas de vacío en la naciente nueva rama de la electrónica. Debe señalarse que fue Hans Ferdinand Mayer (1895-1980) el que señaló esta coincidencia en el año 1950, en la Revista *Electrical Engineering* (Revista Ingeniería Eléctrica, equivalente a la publicación actual denominada *Spectrum* del IEEE), y demostró claramente que el teorema de Thévenin estaba descrito con anterioridad por Helmholtz y es por ello que debería llamarse teorema de Helmholtz-Thévenin.

Como ya se ha indicado en la primera parte de esta síntesis histórica, el régimen transitorio en c.c. de redes *RC* y *RL*, era ya conocido en 1853 por William Thomson, Lord Kelvin (1824-1907), al resolver las ecuaciones diferenciales correspondientes de circuitos *RLC*. En la página 400 de la Revista *Philosophical Magazine* de 1853 describe la teoría matemática de las descargas oscilatorias y calcula la respuesta de un circuito *RLC*, señalando las condiciones en las que la corriente resultante adquiere un carácter oscilatorio. Thomson desarrolla en 1854 una primitiva ecuación de los telegrafistas, es decir la

ecuación resultante que cumple una línea telegráfica con parámetros distribuidos con resistencia y capacidad a lo largo de su longitud, lo que era necesario para comprender el comportamiento de las redes telegráficas submarinas. También debe señalarse que en el libro *A Treatise on Electricity and Magnetism* escrito por Maxwell en 1873, en las secciones 282b y 347 del volumen 1, el autor amplía los lemas de Kirchhoff a circuitos con nudos interconectados, simplificando el análisis de los circuitos al introducir en su estudio el método de las *corrientes de malla* y que en su honor reciben también el nombre de corrientes de Maxwell.

■ A.1.3. Circuitos de corriente alterna. El cálculo simbólico

En el momento que llega la corriente alterna para sustituir a la corriente continua (años 1885-86) con objeto de hacer posible el transporte de energía eléctrica a gran distancia, ya se conocía en el mundo científico el comportamiento en régimen permanente de los elementos R , L y C a la corriente sinusoidal. En corriente alterna (c.a.) se observó que los elementos pasivos como eran las inductancias y los condensadores tenían un comportamiento distinto a las resistencias que aparecían en los circuitos de c.c. Fue Maxwell el que se dio cuenta en 1868, al describir la ecuación diferencial de un circuito RLC en c.a., que la corriente en régimen permanente alcanzaba un máximo cuando se cumplía la condición $L\omega = 1/C\omega$, pero a esta igualdad no se le dio demasiada importancia hasta que Hertz en 1887 la empleó en la producción de ondas electromagnéticas. Hertz bautizó a la condición anterior como *efecto de resonancia*, aunque más tarde Sir Oliver Joseph Lodge (1851-1940) en 1890 le daría el nombre de *efecto de sintonía* y que iba a tener grandes aplicaciones en la incipiente industria de la radio. A partir de 1880 se realizan desarrollos analíticos para conocer la respuesta de los elementos R , L y C a la corriente alterna; se debe a Heaviside (año 1884) la expresión genérica de *inductancia* para denominar tanto a los coeficientes de autoinducción como a los de inducción mutua. En la década de 1880 se calcularon los desfases que se obtenían entre la tensión y la corriente en cada uno de ellos y en combinaciones o asociaciones de los mismos. A principios de 1890 ya se dominaban estas teorías en el plano temporal y se explicaban los circuitos de c.a. mediante complejos diagramas vectoriales. Se habían introducido previamente los conceptos de valores eficaces y valores medios de funciones periódicas (década 1880-1890), y se calcularon los desfases entre tensiones y corrientes en los circuitos de c.a. en régimen permanente.

Sin embargo el desarrollo más importante de la teoría de la corriente alterna se produjo el año 1893, cuando se celebró el Congreso Internacional de Electricidad en Chicago. En este Congreso el eminente Charles Proteus Steinmetz (1865-1923), investigador principal de la recién creada *General Electric*, presentó un artículo titulado *Complex Quantities and their Use in Electrical Engineering*, (Magnitudes complejas y su aplicación en ingeniería eléctrica) en el que introducía lo que él denominaba operador simbólico «j» para indicar una rotación de 90° en sentido antihorario. Con este operador, Steinmetz propuso un estudio analítico de la corriente alterna (lo que hoy se denomina método fasorial o dominio de la frecuencia compleja) que simplificaba enormemente la teoría de la c.a., evitando construir los tediosos diagramas vectoriales empleados hasta ese momento.

En ese mismo año Arthur Edwin Kennelly (1861-1939), catedrático de Ingeniería Eléctrica de Harvard, utilizó también magnitudes complejas para el análisis de los circui-

tos de c.a. en su artículo *Impedance* (impedancia) publicado en los *Transactions of American Institute of Electrical Engineers* del año 1893; es por ello que a partir de entonces se dio el nombre de impedancia a lo que hasta ese momento se denominaba resistencia aparente y por iniciativa de Steinmetz se designó como *reactancia* a lo que se denominaba hasta entonces *resistencia no vatada*, que son los nombres que conservan actualmente. La expresión $\underline{Z} = R + jX$, es decir la forma binómica de designar a la impedancia se debe a Steinmetz, mientras que la forma polar o módulo argumental se debe a Kennelly; el propio Steinmetz demostró en ese mismo año 1893 que ambas notaciones eran equivalentes. De todos modos la aceptación de este método de escritura compleja (que se denominaba por aquel entonces método simbólico) no se decidió hasta el Congreso Internacional de Electricidad celebrado en Turín en 1911.

El año 1899, Kennelly estableció la equivalencia de la transformación estrella-triángulo y viceversa (que los ingenieros electrónicos definen como cambio de red T a π y de π a T); años después A. Rosen escribió el artículo *A New Network Theorem* (Un nuevo teorema de redes), en la revista *Institute of Electrical Engineers Journal* del año 1924, en el que generalizaba la equivalencia de Kennelly para transformar redes pasivas en estrella de n ramas a redes en polígono de $n(n-1)/2$ ramas. Menos conocido es el artículo publicado por A.T. Starr en la revista anterior pero del año 1933 y que lleva por título *A New Theorem for Active Networks* (Un nuevo teorema para redes activas) y que establece que cualquier red activa con tres terminales accesibles se puede sustituir por tres generadores reales de tensión conectados en estrella o en triángulo, lo que representa una generalización de los teoremas de Thévenin y Kennelly. Este teorema es muy útil en el estudio de los sistemas trifásicos para transformar redes activas en estrella en un triángulo equivalente y viceversa.

Hay que indicar también que unos años antes, en mayo de 1901, el ingeniero francés H. Sire de Vilar escribió un artículo titulado *La Dualité en Électrotechnique* (La dualidad en Electrotecnia) que publicó en la revista francesa *L'Éclairage Électrique* (La Iluminación Eléctrica, predecesora de la actual *Revue Générale d'Électricité*, Revista General de Electricidad). Este artículo recibió la atención del profesor Alexander Russell que incluyó este término en el último capítulo del primer tomo de su libro *A Treatise on the Theory of Alternating Currents* (Tratado sobre la Teoría de las Corrientes Alternas), publicado en 1904, y es por ello que se atribuye a Russell (que fue presidente del IEE londinense en el bienio 1923-24), la introducción del término dualidad en el estudio de los circuitos eléctricos. Hablando de dualidad, debe señalarse que el dual del generador de tensión es el generador de corriente, sin embargo la introducción de este concepto de elemento activo en los circuitos eléctricos no fue inmediata, ya que no representaba ningún generador real, pero fue muy útil para analizar los circuitos equivalentes de las válvulas de vacío, en particular para representar el comportamiento del triodo, descubierto en 1906 por Lee De Forest (1873-1961) y que denominó audión, haciendo posible la amplificación de señales de radio y de telefonía. Se debe a Edward Lawry Norton (1898-1983), ingeniero de la *Bell Telephone*, la introducción de este nuevo concepto de generador de corriente en 1926, y a la representación de un dipolo activo por un generador de corriente en paralelo con una admitancia (teorema de Norton), aunque en el mismo año Hans Ferdinand Mayer llegó al mismo resultado, (y por eso debiera llamarse teorema de Norton-Mayer). El teorema de Norton es equivalente o dual al teorema de Thévenin y es muy útil para el análisis de los circuitos eléctricos por el denominado método de los nudos.

■ A.1.4. La potencia en corriente alterna

Una magnitud importante en la Ingeniería Eléctrica es el concepto de potencia. Alrededor de 1880 ya se sabía que la potencia en c.a. de una resistencia era el producto de los valores eficaces de la tensión aplicada por la corriente absorbida (UI). Sin embargo en un circuito tipo RL o RC en régimen permanente de c.a. el profesor Galileo Ferraris de la Universidad de Turín demostró que la potencia media absorbida era el producto $UI \cos \varphi$ (y que al igual que la potencia en c.c. se medía también en vatios) que también recibió inicialmente el nombre de *potencia real o vatada*. Por ello los ingenieros y científicos denominaron al producto de la tensión por la corriente como *potencia ficticia* y también como *potencia aparente* o voltiamperios del circuito (alrededor de 1910 ya se distinguió el nombre de la magnitud potencia aparente de su unidad de medida el voltioamperio). Se debe a Sir John Ambrose Fleming (1849-1945), consultor de la *Edison General Electric* en el Reino Unido y también catedrático de Ingeniería Eléctrica en el *University College* de Londres (y que en 1904 descubrió la válvula diodo, con la que se iniciaría el desarrollo espectacular de la electrónica en el siglo XX), el designar al $\cos \varphi$ como factor de potencia y que se definía como el cociente entre la potencia vatada y la potencia aparente. A principios del siglo XX a la potencia vatada se le dio el nombre actual de potencia activa. Al producto de $UI \sin \varphi$ se le empezó a designar generalmente como potencia magnetizante y también potencia devatada, incluso algunos autores como Dugald C. Jackson (1865-1951), catedrático de Ingeniería Eléctrica en el M.I.T., le daba en 1910 el nombre de potencia en cuadratura (ya que se debía a la componente de la corriente en cuadratura con la tensión); esta potencia recibiría el nombre actual de *potencia reactiva* por decisión del Congreso Internacional de Electricidad celebrado en Turín en 1911, aunque su unidad, el voltio amperio reactivo, llegaría algo más tarde.

Debe señalarse también que el ingeniero francés Paul Boucherot (1869-1943) demostró, en los primeros años del siglo XX, el principio de la conservación de la potencia devatada, hoy potencia reactiva, y su aplicación a las redes eléctricas (y que por ello se conoce actualmente como teorema de Boucherot), aunque la demostración rigurosa de este teorema se debe al físico P. Langevin (1872-1946). En la década 1910-20 se publicaron muchos artículos monográficos sobre potencia eléctrica en c.a. tanto en régimen sinusoidal como no sinusoidal, en virtud de la importancia que tenían estos conceptos en la economía del transporte de energía eléctrica. Recientemente y a partir de 1980, la repercusión de la electrónica de potencia en la calidad de onda de las redes eléctricas ha demandado conceptos más rigurosos de los tres tipos de potencia mencionados para redes con señales no sinusoidales y esta es la explicación del gran número de artículos que se incluyen desde entonces en las principales revistas de Ingeniería Eléctrica del mundo.

■ A.1.5. Los sistemas polifásicos y el método de las componentes simétricas

A partir de las experiencias de la primera red trifásica experimental entre Lauffen y Frankfurt en 1891 y de la construcción de la primera central de c.a. bifásica en las cataratas del Niágara en los EE.UU. en 1895-96, se hizo un desarrollo de los sistemas polifásicos, esta-

bleciendo las relaciones entre las tensiones y corrientes de fase y de línea, tanto en módulo como en fase, y para conexiones en estrella y polígono (triángulo en el caso trifásico), las potencias aparentes, activas y reactivas en sistemas polifásicos, medida de la potencia, etc. De hecho la medida de la potencia trifásica por el método de los dos vatímetros se debe al ingeniero alemán Hermann Aron, aunque André Blondel, catedrático de Electrotecnia de la Escuela de Caminos de París, había presentado una comunicación en el Congreso Internacional de Chicago de 1893, en el que demostraba que para medir la potencia activa en una red de n fases era suficiente emplear $n - 1$ vatímetros.

El método de las componentes simétricas se fue gestando alrededor de 1895, cuando Galileo Ferraris (1847-1897), Benjamin J. Lamme (1864-1924), Maurice Leblanc (1857-1923) y otros, estudiaban el comportamiento eléctrico del motor asíncrono monofásico. Como resumen de estos trabajos se llegó a la conclusión de que el campo magnético en el entrehierro de un motor asíncrono monofásico era equivalente a dos campos magnéticos giratorios que se movían en sentidos contrarios. Unos años más tarde se demostró también que las corrientes desequilibradas de máquinas trifásicas se podían resolver en dos componentes, que en la nomenclatura actual equivalen respectivamente a las componentes de secuencia positiva y negativa y sus efectos se explicaban en función de los campos magnéticos giratorios directos (positivos) e inversos (negativos) que producían las componentes de secuencia positiva y negativa de la máquina. Esta teoría fue utilizada en 1913 por E. F. W. Alexanderson (1878-1975) para estudiar los equilibradores de fase de cargas monofásicas en sistemas trifásicos y también por L. G. Stokvis que la empleó para la determinación de la regulación de tensión de un generador trifásico en función de sus corrientes de fase en un estudio matemático que publicó en la revista *Electrical World* de mayo de 1915. Stokvis resolvía el problema desde el punto de vista de la máquina eléctrica, descomponiendo un sistema de corrientes trifásicas en tres componentes que producían ciertos efectos en la máquina y elegidos para este fin, a saber: 1) un sistema de corrientes trifásicas que producía un campo magnético giratorio positivo, 2) un sistema de corrientes trifásicas que producía un campo magnético giratorio negativo y 3) un sistema de corrientes trifásicas que producía un campo magnético pulsatorio. Su error fue no darse cuenta que necesitaba un nuevo tipo de componente (la de secuencia cero u homopolar) que no debía producir ni campo magnético giratorio, ni campo magnético pulsatorio en una máquina eléctrica trifásica simétrica.

Iba a ser el ingeniero Charles LeGeyt Fortescue (1876-1936) el que iba a tener el honor de resolver el problema desde un punto de vista más general y que sería aplicable a todos los tipos de sistemas polifásicos. Fortescue y un grupo de ingenieros de la compañía Westinghouse estaban estudiando, a mitad de la década de 1910, el comportamiento de motores polifásicos alimentados con tensiones desequilibradas, y también el funcionamiento de los motores de c.a. monofásicos empleados en tracción eléctrica. Como consecuencia de ello, Fortescue presentó en el 34º Congreso Anual del AIEE (*American Institute of Electrical Engineering*), celebrado el 28 de junio de 1918 en Atlantic City, un artículo titulado *Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks* (Método de las coordenadas simétricas aplicado a la solución de redes polifásicas). En este trabajo se demostraba que un sistema desequilibrado trifásico se podía estudiar con más sencillez, si se sustituía por un sistema trifásico de secuencia directa o positiva, otro de secuencia inversa o negativa y un tercero de secuencia cero u homopolar. Este artículo se publicó, por su importancia en ese mismo año, en los *AIEE Transactions, Volume 37, Parte II, páginas 1027-1140*; el artículo en sí tenía 89 páginas, pero incluía 25 páginas adicionales en las que

se incorporaban las opiniones y discusiones de seis grandes personalidades de la Ingeniería Eléctrica de aquella época, a saber: J. Slepian, C. P. Steinmetz, V. Karapetoff, A. M. Dudley, Charles F. Scott y C. O. Mailloux. Debe destacarse que el término componentes simétricas en vez de coordenadas simétricas, como las denominaba Fortescue en su trabajo, fue sugerido por Vladimir Karapetoff (1876-1948), ingeniero ruso-americano que fue catedrático de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Cornell, y es el nombre que se adoptaría desde entonces.

A partir de la publicación de Fortescue muchos ingenieros comenzaron a aplicar este método a la solución de problemas en sistemas eléctricos, el más importante de ellos era, en aquel momento, determinar las corrientes y tensiones de una red eléctrica cuando se producían faltas desequilibradas. El estudio se simplificaba utilizando los conceptos de redes de secuencia y empleando circuitos equivalentes conectando estas redes para representar las condiciones de la falta o fallo. La primera aplicación que utilizaba este método para el estudio de cortocircuitos fue descrita por R. D. Evans (1883-1959) en 1925. El método se aplicó a continuación en el análisis de la estabilidad de sistemas eléctricos por R. D. Evans y C. F. Wagner en 1926. También es este mismo año, A. P. Mackerras publicó dos artículos utilizando las componentes simétricas para la determinación de las corrientes de cortocircuito monofásico en sistemas trifásicos.

Otra fase importante en la aplicación de las componentes simétricas fue la determinación por cálculo y comprobación posterior con ensayos detallados, de las impedancias que ofrecían las líneas y máquinas eléctricas a las corrientes de las diferentes secuencias, es decir las denominadas impedancias de secuencia directa, inversa y homopolar. Se realizaron después estudios específicos para estudiar el comportamiento de la máquina síncrona ante cortocircuitos y que investigaron: Bekku, Wagner, Dovjidov, Park, Doherty y Nickle, Kilgore y Wright. Se hizo también un estudio muy amplio sobre las impedancias de secuencia de líneas de transporte y cables, que tenía una gran importancia en relación con el problema de coordinación inductiva.

La aplicación práctica de las componentes simétricas al estudio de cortocircuitos y perturbaciones de sistemas eléctricos se debe a C. F. Wagner (1895-1970) y R. D. Evans. Ellos escribieron una serie de diez artículos en la revista *The Electrical Journal* de la compañía Westinghouse, en el periodo que va de marzo de 1928 hasta noviembre de 1931. Este trabajo fue ampliado más tarde por los mismos autores que publicaron el año 1933 su célebre y famoso libro *Symmetrical Components* (Componentes Simétricas) editado por McGraw-Hill Book Company que fue realmente el texto básico que sobre este tema se estudiaría en una gran parte de las Escuelas de Ingeniería Eléctrica del mundo. Mientras este libro estaba en imprenta, otro ingeniero de la Westinghouse, W. A. Lewis, desarrolló el concepto de partición o división de la reactancia de una línea eléctrica en varias componentes: una primera se refería a la reactancia propia del conductor, otra estaba asociada a la separación con el/los conductor/es de retorno y otra se debía a la profundidad del retorno por tierra. Estos conceptos se añadieron al libro y se incluyeron como parte de uno de sus apéndices.

■ A.1.6. El cálculo operacional de Heaviside

Otra contribución importante a considerar en el desarrollo de la teoría de los circuitos eléctricos es la debida al ingeniero inglés Oliver Heaviside (1850-1925) quien, dotado de una gran intuición física y agudeza matemática, introdujo entre los años 1890 y 1910 lo que él

denominó *cálculo operacional* para analizar el comportamiento transitorio de las redes eléctricas. El concepto de impedancia fue utilizado ampliamente por él utilizando el operador derivada (que denominaba p) tanto como operador diferencial como integral y como una variable algebraica. El uso de los valores complejos para p fue justificado más tarde en 1911 por Campbell y la relación entre el cálculo operacional de Heaviside y la integración en el campo complejo se demostró en 1916 y se debe a J. R. Carson (1887-1940) de los laboratorios Bell y a B. Van der Pol (1889-1959) del Centro de Investigación de Philips en Eindhoven (Holanda). Sus fundamentos matemáticos se encontraron en los trabajos de Laplace y este procedimiento sistemático tiene la ventaja de incluir en forma directa las condiciones iniciales que son muy importantes en los estudios del régimen transitorio de los circuitos eléctricos. A Heaviside se le debe el estudio riguroso de las redes de transmisión que analiza como un circuito eléctrico con parámetros distribuidos. Este enfoque fue esencial para comprender el funcionamiento de las redes telegráficas y telefónicas y él destacó las condiciones que debían cumplirse entre los parámetros de conductancia, capacitancia, inductancia y resistencia para transmitir las señales sin distorsión a cualquier frecuencia. Heaviside demostró en 1876 lo que hoy día se conoce como *ecuación de los telegrafistas* y que era una ecuación más general que la obtenida por Lord Kelvin en 1854, ya que Heaviside incluía todos los efectos de los parámetros distribuidos en la línea, a saber: resistencia, inductancia, capacidad y conductancia. Justificó de este modo la necesidad de colocar bobinas de carga en las líneas telefónicas para mejorar la transmisión de la voz a gran distancia, aspecto práctico que fue propuesto en 1901 por el ingeniero yugoslavo-americano: Michael Idvorsky Pupin (1858-1935), que fue catedrático de Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Columbia. Las teorías de las líneas de transmisión de Heaviside se aplicaron posteriormente a las líneas eléctricas largas, es decir a las redes de transporte de energía eléctrica, en las que debe tenerse en cuenta esta teoría de parámetros distribuidos para longitudes superiores a 300 km. El cálculo operacional fue esencial para analizar el efecto de las sobretensiones en las redes de energía eléctrica y para el diseño de interruptores automáticos o disyuntores.

■ A.1.7. Los filtros eléctricos. La síntesis de los circuitos eléctricos

En el periodo 1920-40 ya se trabaja con conceptos topológicos y teoría de grafos para el estudio de los circuitos eléctricos (en los que se incluyen conceptos de mallas, lazos, eslabones, grupo de corte, etc.) y se conocen los teoremas de compensación y reciprocidad. En estos años tuvieron una gran importancia las aportaciones que hicieron científicos e ingenieros de los laboratorios de investigación de la *Bell Telephone* como consecuencia de la necesidad de diseñar filtros de onda (denominados hoy filtros eléctricos) para hacer posible la telefonía a gran distancia. Téngase en cuenta que la clave para el aprovechamiento eficaz del ancho de banda para la telegrafía por portadoras y para la nueva telefonía, era emplear el multiplexado por división de la frecuencia, pero para que este multiplexado fuera eficaz, se requerían filtros paso-banda muy exigentes, para seleccionar el canal deseado sin demasiada distorsión. El filtro eléctrico fue inventado independientemente por George Campbell (1870-1954) de la *Bell Telephone* en los EE.UU. en 1909 y por Karl Willy Wagner (1883-1953) de la Universidad Técnica de Berlín unos años después. El desarrollo

matemático para el diseño de filtros se efectuó en la década de 1920 con los trabajos en el año 1924 de Ronald Martin Foster (1896-1998) de los Laboratorios Bell (ATT) y en 1926 de Wilhelm Cauer (1900-1945), catedrático en Gotinga. Foster desarrollaba una determinada función racional en una suma de fracciones parciales que podían identificarse fácilmente como una conexión en serie de impedancias y una conexión en paralelo de admitancias. Cauer desarrollaba la función racional en una fracción continua que representaba una red en escalera. Cada método dio lugar a dos tipos de redes distintas que se bautizaron después como formas canónicas y que podían obtenerse a partir de una *función inmitancia* (impedancia o admitancia de entrada), utilizando un número mínimo de elementos pasivos.

Con la teoría del diseño de filtros comienza la denominada *síntesis de circuitos* que tiene grandes aplicaciones en la ingeniería de telecomunicación. La síntesis de circuitos consiste en la determinación física de una red en la que se conocen tanto la excitación de entrada como la respuesta que produce o debe producir. En este periodo de tiempo que cubre los años 1925 a 1950, se realizan grandes aportaciones matemáticas para demostrar fundamentalmente en qué condiciones se podía construir una red definida por una función *inmitancia* (acrónimo de los términos impedancia y admitancia) y las relaciones que debían cumplirse entre las partes real e imaginaria de la misma, análisis que se facilita con la inclusión de los términos *polos y ceros* de un circuito (se introducen también las redes en escalera y los conceptos de parámetros imagen en las líneas de transmisión telefónica que se aplicarán más tarde a las líneas largas de potencia). Fue el gran pedagogo de los circuitos eléctricos, Ernst Guillemin (1898-1970), (que enseñó en el *Massachusetts Institute of Technology* desde 1930 hasta 1970), quien al analizar en 1935 el teorema de la reactancia de Foster, demostró que la inmitancia de un circuito se puede especificar simplemente por la localización de los ceros y de los polos. Este nuevo enfoque en la síntesis de circuitos se utilizará a partir de esta fecha, no solamente en el campo de las redes eléctricas, sino también en el de la regulación automática o ingeniería de control.

El cuadripolo y sus representaciones matriciales aparecen en Europa a comienzos de los años 1920 y más tarde se dan las reglas para calcular las matrices equivalentes de cuatripolos conectados en serie, paralelo y en cascada. El decibelio como unidad de transmisión telefónica se introduce en 1924. Los avances en teoría de circuitos se deben también a la necesidad de fabricar amplificadores con respuesta plana en la parte correspondiente a su ancho de banda y bajada abrupta (fuerte atenuación) a partir de la frecuencia de corte, haciendo grandes contribuciones al diseño de filtros con técnicas de aproximación específicas en el año 1930, el ingeniero-matemático Stephen Butterworth (1885-1958), de los laboratorios de investigación de la Armada británica. Cauer resolvió este problema en 1931 por medio de aproximaciones basadas en los trabajos del matemático ruso Pafnuti Lvóvich Chebyshev (1821-1894) y que fueron justificadas poco después por el matemático ruso-americano Sergei Schelkunoff (1897-1992), que trabajó durante 35 años en los Laboratorios Bell como experto en electromagnetismo y que también fue catedrático de Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Columbia.

■ A.1.8. La realimentación y otras contribuciones en circuitos

El desarrollo de la telefonía y de la radiodifusión dio un posterior avance al diseño matemático de redes con la invención en 1927 del amplificador con realimentación negativa debido a Harold Black (1898-1983), investigador de los Laboratorios Bell. Este descubri-

miento obligó a un análisis más profundo de las atenuaciones y desfases de los circuitos y al estudio de la estabilidad de los sistemas dinámicos. Heindrik Wade Bode (1905-1982) y Harry Nyquist (1889-1976), científicos también de los laboratorios Bell, se distinguieron por sus trabajos sobre estabilidad de circuitos al comienzo de los años 30. A mitad de esta década, se habían construido amplificadores realimentados eficientes que se utilizaron en repetidores telefónicos en los primeros cables coaxiales. La teoría de la estabilidad de Black y Nyquist tuvo también una gran influencia en la ingeniería de control. También deben destacarse los grandes progresos en la síntesis de circuitos debidos a las investigaciones de Sydney Darlington (1906-1997) en 1939 y de Cauer en 1940, aunque tendrían que pasar más de diez años para que las teorías de Cauer-Darlington empezaran a aplicarse con la ayuda de los primitivos ordenadores a principios de 1950. Otro aspecto de la realimentación fue el estudio de los osciladores que eran necesarios en la incipiente industria de la radio; se debe a Balthasar van der Pol (1889-1959) de los Laboratorios Philips de Holanda el inicio en 1934 del estudio de los circuitos eléctricos no lineales; de hecho existe un circuito oscilador que lleva su nombre. Los circuitos no lineales adquieren tal complejidad en su análisis que se requiere mucha simulación por ordenador para poder abordar su estudio con la eficiencia necesaria, por lo que los trabajos más profundos sobre este tipo de circuitos aparecen en las revistas especializadas a partir de 1960, cuando se extiende el uso de los ordenadores en los centros de investigación.

La teoría de los circuitos eléctricos llegaría a su punto más álgido cuando el ingenieromatemático de la General Electric, Gabriel Kron (1901-1968) publicó en 1939 su gran obra *Tensor for Circuits* (Tensores para Circuitos) en la que aplicaba el cálculo matricial y tensorial en el estudio de las redes eléctricas. En este trabajo se demostró de un modo convincente la enorme potencia de la notación tensorial en la teoría de circuitos. Kron destacó no solamente la elegancia conceptual de esta notación sino también su modo automático para manejar las complicadas matrices que aparecen en el estudio de las redes eléctricas y su resolución mediante ordenadores. Sus trabajos sobre sistemas eléctricos interconectados le llevaron a buscar métodos generales de subdivisión de grandes sistemas para hacer los cálculos más simples; su forma de análisis constituye la base de los métodos que se utilizan para determinar las pérdidas de un sistema eléctrico en relación con el despacho económico; este procedimiento que bautizó con el nombre de *diakoptics* tiene grandes aplicaciones en otras ramas de la ingeniería como: estructuras, aerodinámica y sistemas de control. Kron utilizó también los tensores para estudiar las máquinas eléctricas, y demostró que cuando se aplicaba una transformación tensorial a una máquina eléctrica se obtenía la ecuación de otra máquina distinta; este análisis generalizado se obtenía a partir de una máquina ideal que Kron denominó *máquina primitiva*, definida por una serie de ecuaciones diferenciales que relacionaban las tensiones y corrientes de todos los devanados de la máquina, y así se lograba deducir las ecuaciones de cualquier máquina real por medio de una transformación tensorial específica.

El gran desarrollo de la industria de la radio en el periodo 1920-40 influyó en el estudio riguroso de los circuitos equivalentes de las válvulas de radio que hacían uso de los conocidos teoremas de Thévenin y Norton. Para analizar el comportamiento de los amplificadores de tubos electrónicos resultó de gran utilidad el artículo publicado por Jacob Millman, catedrático de la Universidad de Columbia en la revista IRE (*Institute of Radio Engineers*) en septiembre de 1950, con el título *A Useful Network Theorem* (Un teorema útil de redes) y que desde entonces lleva el nombre de su autor. Este teorema permite calcular la diferencia

de potencial entre dos nudos A y B , conociendo las impedancias que concurren en B y las tensiones entre el nudo A y los otros extremos de las citadas impedancias. Un caso particular de este teorema se utiliza para determinar la tensión entre el centro de una carga en estrella desequilibrada y el neutro de la red, lo que facilita el análisis de los sistemas trifásicos desequilibrados.

Con el transcurso de los años los ingenieros electrónicos introdujeron nuevos elementos ideales de circuitos como es el caso del *girador* inventado en 1948 por el holandés Bernard D. H. Tellegen (1900-1990), catedrático de circuitos eléctricos en la Universidad de Delft entre los años 1946 y 1966 e investigador principal de la compañía holandesa Phillips, en Eindhoven. También se debe a Tellegen la invención de un nuevo teorema de circuitos y que pese a su importancia es un descubrimiento relativamente tardío, ya que data del año 1952. Este teorema lo desarrolló en el siguiente artículo *A General Network Theorem with Applications* (Un teorema general de redes, con aplicaciones) en la Revista *Philips Research Reports*, vol. 7, págs. 259-269, del año 1952. De acuerdo con este teorema, en una red eléctrica cuyas tensiones de rama son v_i y las corrientes correspondientes son de la forma i_i (habiéndose elegido los sentidos de referencia arbitrariamente, pero de tal modo que las tensiones cumplan el segundo lema de Kirchhoff y las corrientes el primer lema de Kirchhoff), se cumple para todo grupo de corte que $\sum_{i=1}^r u_i i_i = 0$, en el que r repre-

senta todas las ramas del grafo o gráfico del circuito. El teorema de Tellegen es una generalización del principio de conservación de la potencia en un circuito eléctrico.

El componente eléctrico más moderno que se ha descubierto ha sido el *memristor* que fue postulado teóricamente en 1971 por Leon Ong Chua (nacido en 1936), catedrático de Ingeniería Eléctrica en la Universidad de California-Kerkeley, cuando escribió el artículo *Memristor-The Missing Circuit Element*, en la revista *IEEE Transactions on Circuit Theory*, de septiembre de 1971. El memristor es una resistencia eléctrica con memoria y representa el cuarto elemento fundamental pasivo (el elemento perdido) que debía encontrarse para completar la relación de los tres clásicos: resistencia, inductancia y capacidad. El memristor procede de la contracción de las palabras inglesas *memory resistor* (resistencia con memoria). En el año 2008, unos investigadores de la empresa americana Hewlett Packard (HP), especialistas en nanotecnología, dirigidos por Stanley Williams, anunciaron en la revista *Nature* el primer memristor que se construyó en el mundo, basado en una película delgada de dióxido de titanio, al que se le auguran muchas aplicaciones en nanoelectrónica para construir memorias no volátiles en ordenadores, con una mayor densidad de datos que los discos duros y que se estima en 100 gigabits/cm². L. Chua también es muy conocido en el área de las redes eléctricas, pues se le considera el padre de los circuitos eléctricos no lineales, ya que en el año 1983 inventó un oscilador que lleva su nombre para comprobar el comportamiento de la teoría del caos.

■ A.1.9. Las innovaciones electrónicas y los circuitos activos

La relación excitación-respuesta (entrada-salida) utilizada en la síntesis de los circuitos eléctricos desde 1930, se ordena en la década siguiente, empleando las denominadas *funciones de transferencia* y los *diagramas de bloque*, y además se extiende este nuevo len-

guaje a otras ramas de la Ingeniería Eléctrica como es el caso de la electrónica y de la regulación automática. Con la invención del transistor en diciembre de 1947, comienza la época de la síntesis de circuitos con elementos activos que va a aprovechar el concepto de función de transferencia para el diseño de filtros activos analógicos. Téngase en cuenta que un problema de los filtros pasivos paso-banda desarrollados en el periodo 1930-50 era que incluían inductancias, lo cual era indeseable para los ingenieros de comunicaciones debido a su comportamiento no lineal, y por su elevado precio y volumen. Afortunadamente la invención del girador por Tellegen y la aparición en el mercado del transistor en 1948, van a tener gran influencia en los nuevos diseños de filtros, puesto que se demuestra enseguida que un girador que alimenta un condensador se comporta como una inductancia. Aparecen entonces los circuitos RC activos que eliminan las inductancias en los filtros. La investigación dedicada a la síntesis de circuitos activos se hace más sofisticada ya que deben incluirse los modelos de pequeña señal de los transistores. El número de publicaciones sobre este tema crece tan rápidamente en la década de 1950, que su número es cuatro veces superior a la de todos los artículos publicados sobre circuitos en los cincuenta años anteriores. Se construyen convertidores de impedancia negativa, fuentes de tensión controladas, se simulan las inductancias con redes activas, etc. La síntesis sigue evolucionando con la aparición en el mercado del amplificador operacional a finales de la década de 1960 y con el desarrollo de circuitos integrados en la misma fecha, minimizando de este modo el tamaño de los circuitos electrónicos. A mitad de la década de 1970 se extiende el uso de filtros RC activos en los campos de la electrónica y de las comunicaciones. Con el desarrollo de los circuitos integrados MOS se construyen redes activas con condensadores conmutados y emergen a finales de 1970 las técnicas del filtrado digital. Esta nueva síntesis de circuitos requiere un estudio riguroso de la sensibilidad de los circuitos activos que utilizan además realimentaciones internas, para ello son importantes los progresos teóricos que se realizan en esa época, como el trabajo publicado en 1948 por W. R. Evans en el que describe el lugar de raíces y el debido a S. J. Mason en 1956 sobre diagramas de flujo, herramientas teóricas que enseguida utilizarán los ingenieros dedicados a la automática y control.

■ A.1.10. De la teoría de circuitos a la teoría de sistemas

En 1928 el alemán Karl Küpfmüller (1897-1977), que por aquel entonces trabajaba en la compañía Siemens y que había colaborado con el profesor Wagner en el diseño de filtros eléctricos, sugirió que todo el potencial de la teoría de circuitos podía aplicarse a otras áreas tecnológicas, en las que se utilizaban conceptos de respuesta de un sistema a una determinada entrada. En los años treinta del siglo XX los ingenieros de comunicaciones establecen una teoría de sistemas al analizar sus problemas de filtros y este es el enfoque que se aprecia en el libro *Communications Networks* de E. Guillemin. Sin embargo se considera que la teoría general de sistemas nace en 1954 y se debe fundamentalmente a la obra del biólogo Ludwig von Bertalanffy, intentando aplicar el desarrollo de la teoría de circuitos y de la ingeniería de control a otros campos científicos y sociales. Es por consiguiente un campo interdisciplinar, que analiza los sistemas en su conjunto, observando las relaciones entre sus componentes más que el comportamiento específico de cada uno de ellos. La teoría del caos y la dinámica social son ejemplos de la dinámica de sistemas complejos.

Un método importante en el estudio de los circuitos eléctricos y de los sistemas en general, es el uso de las denominadas *variables de estado*, un término que introdujo en 1936 el gran matemático inglés Alan Turing para la definición de sus autómatas finitos. Durante la época 1940-1960, ingenieros y matemáticos rusos como A. I. Lurie, M. A. Aizerman, A. M. Letov, V. I. Zubov, L. S. Pontryaguin y otros, utilizan la técnica de las variables de estado para hacer grandes aportaciones teóricas a la ingeniería de control. También Richard Bellman (1920-1984) cuando trabajaba como investigador en la compañía de ordenadores Rand, utilizó en 1953 las variables de estado para realizar sus célebres estudios sobre programación dinámica y R. E. Kalman (nacido en 1930) catedrático en la Universidad de Princeton, las manejaba con soltura en sus estudios de controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales y no lineales. La aplicación de las variables de estado en el estudio de los circuitos eléctricos se inicia a finales de la década de 1950 con el artículo de T.R. Bashkow, que propone un método general para escribir las ecuaciones de estado de una red eléctrica. En 1965 aparece un artículo clásico sobre la aplicación de las variables de estado al análisis de redes y que se debe a E. S. Kuh y R. A. Rohrer. El año 1965, P. M. Russo y R. J. Roy publicaron un libro sobre variables de estado para ingenieros que fue un texto clásico en todas las universidades del mundo. Aparecen trabajos sobre control digital, para los que se desarrolla en 1952 la técnica de la *transformada en Z* que sirve para el tratamiento matemático de los circuitos eléctricos muestreados y que se debe a J. R. Ragazzini (1912-1988), catedrático de la Universidad de Columbia y su ayudante Lotfi A. Zadeh. Para los sistemas no lineales se introduce la técnica del plano de fase cuyo origen y denominación se debe a los trabajos desarrollados por W. Gibbs en 1928 sobre reacciones de equilibrio químico.

Deben destacarse también las grandes contribuciones que realiza en el periodo 1935-55 el gran matemático Norbert Wiener (1894-1964) en relación con la teoría de la señal y análisis estadístico de sistemas lineales y no lineales y la publicación en 1948 de su gran obra *Cybernetics: or Control and Communication in the Animal and the Machine*, (Cibernética o control y comunicación en el animal y en la máquina) en la que juega un papel esencial el concepto de realimentación. También en el año 1948 debe destacarse por su gran importancia la publicación del artículo de C. E. Shannon (1916-2001) titulado *The Mathematical Theory of Communication* (La Teoría Matemática de la Comunicación) en la revista *Bell System Technical Journal*, vol. 27, páginas 379-423, julio y páginas 623-656, octubre del año 1948, con el que se desarrolla la teoría matemática de la comunicación. El trabajo de Shannon responde a una ampliación de un artículo sobre transmisión de información escrito por Ralph Hartley (1888-1970) de los Laboratorios Bell en 1928.

La Ingeniería de Sistemas es una materia interdisciplinar que incluye conceptos de teoría de circuitos, modelos físicos o sociales con sus relaciones entrada-salida, teoría de la identificación, control adaptativo, optimización, teoría del filtrado en sentido amplio, procesamiento de la señal, estabilidad, teoría del control y hasta simulación por ordenador. Los campos separados de la teoría de circuitos se acercan a la teoría del control, teoría de sistemas, procesamiento de la señal, etc. y las investigaciones de R. E. Kalman, L. A. Zadeh, J. A. Aseltine, L. S. Pontryaguin,... sobre dinámica de sistemas lineales, filtrado, optimización, control adaptativo, identificación, control óptimo, estabilidad, etc. tienen aplicaciones a muchas áreas científicas. Es interesante señalar aquí los trabajos de L. A. Zadeh (nacido en 1921) que inventa la lógica difusa (*fuzzy logic*) en 1965, cuando era catedrático en la Universidad de California-Berkeley, al publicar un artículo titulado *Fuzzy Sets* (Conjuntos di-

fusos) en la revista *Information and Control*, vol. 8, n.º 3 de junio de 1965, páginas 338-353. La lógica difusa o borrosa es un método matemático para obtener conclusiones a partir de datos imprecisos.

■ A.1.11. El estudio de circuitos eléctricos con ayuda de ordenador

Al comienzo de 1950 la síntesis de filtros pasivos se hacía en dos etapas; en la primera de ellas se obtenía una función de transferencia aproximada que se adaptase a las especificaciones de diseño; la segunda consistía en realizar la función de transferencia mediante una conexión de elementos pasivos ideales. Cuando se procedía posteriormente a la construcción práctica del filtro con elementos reales se comprobaba que el comportamiento del filtro se desviaba bastante de las predicciones teóricas. En 1956 M. R. Aaron sugirió que el ordenador podía ayudar a resolver este problema, para lo cual propuso un método de optimización empleando los mínimos cuadrados para mejorar el diseño en cada paso del proceso de la síntesis clásica. Desoer y Mitra, utilizando la filosofía de Aaron, propusieron en 1961 un método de optimización iterativa para ajustar los valores de los elementos pasivos reales de los filtros en escalera, reduciendo el error entre las funciones de transferencia real e ideal. Calahan empleó en 1965 un procedimiento topológico que se abandonaría poco después debido a la limitación inherente del tamaño de la red que podía manejarse. Al mismo tiempo que se buscan procedimientos de síntesis de circuitos por ordenador, se estudian también métodos de simulación de circuitos eléctricos, que se implementan con métodos de análisis clásicos. Al comienzo de 1960, se hace ya muy popular el análisis de redes mediante variables de estado, lo cual sirve de base a los primeros programas de análisis de circuitos, como el TAP debido a Frank Branin que lo diseña en 1962, el CORNAP desarrollado por Pottle en 1965, el AEDNET que prepara Katzenelson en 1966 y otros. De todos modos, el problema más grave de estos primitivos programas era que consumían mucho tiempo de ordenador. Es por ello que se hace un gran esfuerzo para conseguir algoritmos de cálculo que permitan trabajar con un gran número de ecuaciones algebraicas simultáneas de una forma rápida, pero que tienen la ventaja de que dan lugar a matrices altamente dispersas. También existen problemas de estabilidad y convergencia al realizar integraciones numéricas, debido a la elección de los pasos de integración con relación a las constantes de tiempo de los circuitos analizados. Es por ello que Gear propone en 1968 un paso de integración variable, que evitaba los problemas de convergencia. Entre los años 1965 y 1970 se publican muchos trabajos sobre programación matemática para el estudio de los circuitos eléctricos.

En el curso 1969-70, el profesor Ronald Rohrer de la Universidad de California-Berkeley, acomete el problema de resolución de circuitos eléctricos con la ayuda de ordenadores, y desarrolla con alguno de sus alumnos el programa *CANCER* (acrónimo de *Computer Analysis of Nonlinear Circuits, Excluding Radiation*, Análisis por ordenador de circuitos no lineales, excluyendo la radiación). Este primitivo programa permitía resolver circuitos de corriente continua y alterna tanto en régimen permanente como transitorio, incorporaba las ecuaciones de Shockley para la simulación de los diodos y las de Ebers-Moll para los transistores bipolares, incluía técnicas matemáticas de linealización, integración, uso de matrices dispersas, eliminación gaussiana, técnicas de pivoteo, etc. Cuando Rohrer dejó la

Universidad de Berkeley a principios de 1970, el programa fue escrito nuevamente por Larry W. Nagel y Donald Pederson, recibiendo el nombre de SPICE versión 1, mayo de 1972 (SPICE es un acrónimo de *Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*, Programa de simulación, con énfasis en los circuitos integrados); en esta versión, el modelo del transistor obedecía a las ecuaciones de Gummel-Poon y se añadieron otros componentes electrónicos como el JFET y el MOSFET, utilizaba en su diseño el análisis nodal y se escribió en lenguaje FORTRAN, funcionando el programa en grandes ordenadores (tipo *main-frame*). La versión 2 de SPICE apareció en 1975 en la que Larry Nagel hizo grandes mejoras utilizando el análisis nodal modificado, lo que permitió incluir fuentes de tensión, también se ampliaron los modelos de transistores y se incluyeron más componentes electrónicos; esta versión sale de la Universidad y se extiende al dominio público, debido a las recomendaciones del profesor Donald Pederson (1925-2004), catedrático de la Universidad de California-Berkeley. En 1983 se prepara la versión SPICE2G.6 escrita todavía en Fortran; en 1985 llega la versión SPICE3 que se escribe en código C y que incorpora interfaces gráficas para poder ver las respuestas de los circuitos, se incluyen fuentes controladas de tensión y más modelos de componentes semiconductores, también se eliminan problemas de convergencia numérica de los algoritmos de cálculo. A partir del año 1985 aparecen versiones comerciales del programa que reciben nombres distintos como: HSPICE, IS_SPICE y MICROCAP. La compañía MicroSim realiza en este mismo año la primera versión de SPICE para ordenadores personales, que se denomina PSPICE, la cual incluye interfaces gráficas muy intuitivas para facilitar el estudio de un circuito y que se han ido ampliando en cada nueva versión. El programa PSPICE no solamente tiene una utilidad didáctica para los estudiantes ya que facilita el estudio de los circuitos eléctricos. Su aplicación práctica más importante ha sido y es en la industria de la electrónica para el diseño de circuitos integrados de muy alta escala de integración (VLSI), facilitando la forma en que se va a comportar un circuito antes de proceder a su fabricación, ya que incluye hasta el modelado térmico para analizar las temperaturas que pueden alcanzar en las diversas partes del circuito e incluso el ruido producido por los elementos activos y pasivos.

Desde el punto de vista pedagógico, PSPICE facilita el análisis de los circuitos eléctricos y existen en la actualidad otros paquetes informáticos como MATLAB (que distribuye la compañía MathWorks Inc.) que también se están empleando para la simulación de circuitos eléctricos. Es por ello que la mayoría de los libros de texto sobre circuitos eléctricos que se editan desde mediados de 1990 tienen ejemplos totalmente resueltos con estos dos tipos de programas informáticos que facilitan el aprendizaje de los estudiantes en esta materia.



Referencias

a) Libros

- ATHERTON, W. A.: *From Compass to Computer. A History of Electrical and Electronics Engineering*. Mac-Millan Publishers Ltd. San Francisco Press, San Francisco, 1984.
- BELLMAN, R.: *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
- BERKSON, W.: *La Teoría de los Campos de Fuerza. Desde Faraday hasta Einstein*. Alianza Universidad, Madrid, 1985.
- BERTALANFFY, L. VON: *Tendencias en la teoría general de sistemas*. Alianza Universidad, Madrid, 1978.
- BLACKBURN, J. L.: *Symmetrical Components for Power Systems Engineering*, Marcel Dekker, New Cork, 1993.

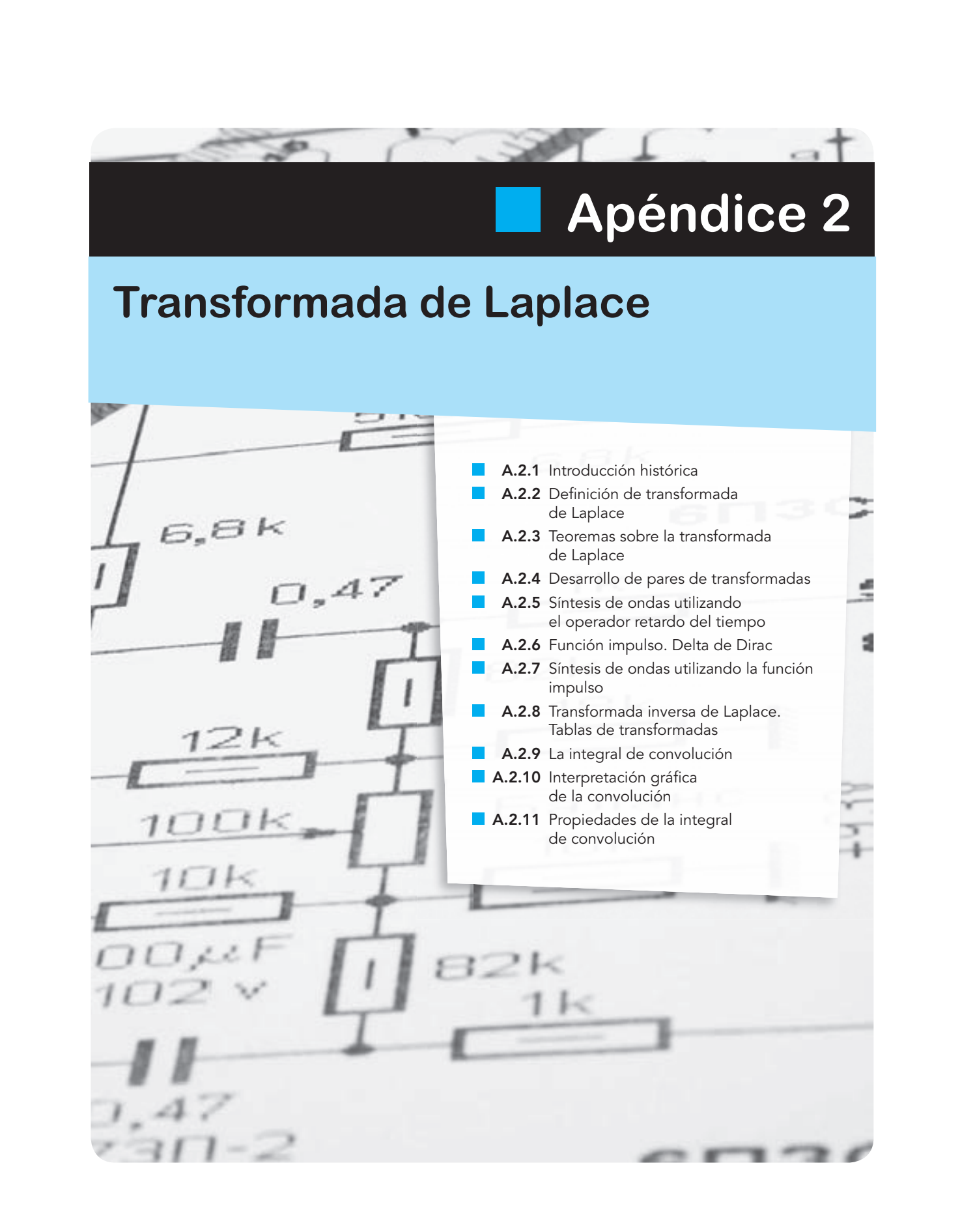
- BODE, H. W.: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand Co., Princeton, N.J., 1945.
- CLARKE, E.: *Circuit Analysis of A.C. Power Systems*. Chapman Hall, Ltd, New York, 1943.
- DERUSSO P. M.; Roy, R. J.; Close, C. M.: *State Variables for Engineers*. J. Wiley & Sons, New York, 1965.
- DUNSHEATH, P.: *A History of Electrical Engineering*. Faber and Faber, London, 1962.
- ELLIOT, R. B.: *Electromagnetics*. McGraw-Hill Book, New York, 1966.
- FIGUEIRAS, A. R. Editor: *Una panorámica de las Telecomunicaciones*. Prentice Hall, Madrid, 2002.
- GARDNER, M. F.; BARNES, J. L.: *Transients in Linear Systems*. J. Wiley & Sons, New York, 1942.
- GUILLEMIN, E. A.: *Introductory Circuit Theory*. John Wiley & Sons Inc, New York, 1953.
- GUILLEMIN, E. A.: *The Mathematical of Circuit Theory*. John Wiley & Sons Inc, New York, 1949.
- HEAVISIDE, O.: *Electromagnetic Theory*. Vol. I, II y III, Chelsea Publishing Co., New York, 1971.
- HUMPHERYS, D. V.: *The Analysis, Design, and Synthesis of Electrical Filters*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.
- HURDEMAN, A. A.: *The Worldwide History of Telecommunications*. Wiley Interscience, New Jersey, 2003.
- JURY, E.: *Sampled-Data Control Systems*. J. Wiley & Sons, New York, 1958.
- KRON, G.: *Tensors for Circuits*. Second Ed. Dover Publications, New York, 1959.
- KU, Y. H.: *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. The Ronald Press. Co., New York, 1958.
- LYON, W. V.: *Application of the Method of Symmetrical Components*. McGraw-Hill Book, New York, 1937.
- MAXWELL, J. C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol I, II, Dover Publications, New York, 1954 (republicación de la tercera edición realizada por Clarendon Press, London, en 1891).
- PAPOULIS, A.: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGra-Hill, New York, 1965.
- PIERCE J. R; NOLL, A. M.: *La Ciencia de las Telecomunicaciones*. Editorial Reverté S.A., Barcelona, 1995.
- PONTRYAGUIN, L. S.: *The Mathematical of Optimal Process*. J. Wiley, New York, 1962.
- RYDER, J. D.; FINK, D. G.: *Engineers & Electrons*. IEEE Press, New York, 1984.
- SHEA, R. E.: *Transmission Networks and Wave Filters*. Chapman Hall, 1929.
- TATON, R.: *Historia General de las Ciencias*. Ediciones Orbis, S.A., Barcelona, 1988.
- TUTTLE, D. F.: *Network Synthesis*. John Wiley & Sons Inc, New York, 1958.
- WAGNER, C. F.; EVANS, R. D.: *Symmetrical Components*. McGraw-Hill Publishing Co, New York, 1933.
- WHITTAKER, E.: *A History of the Theories of Aether and Electricity*. Vol I: *The Classical Theories*. Vol II: *The Modern Theories*. Tomash Publishers, American Institute of Physics, New York, 1987.
- WIENER, N.: *Cybernetics: or Control and Communication in the Animal and the Machine*. MIT. Press, Cambridge, 1948.
- WIENER, N.: *Times Series*. MIT Press, paperback ed., 1964.

b) Artículos

- AKAGI, H.; NABAE, A.: *The p-q Theory in Three-Phase Systems under Non-Sinusoidal Conditions*. ETEP Eur. Trans. on Electric Power, vol. 3, n.º 1, pp. 27-31, 1993.
- BASHKOW, T. R.: *The A Matrix, New Network Description*. IRE Trans. Circuit Theory, vol. CT-4, pp. 117-120, september, 1957.
- BELEVICH, V.: *Summary of the History of Circuit Theory*. Proceedings of the IRE, pp. 848-855, may, 1962.
- BERTALANFFY, L. VON: *A Quantitative Theory of Organic Growth*. Human Bilology, vol. 10, pp. 181-213, 1938.
- BLACK, H. S.: *Stabilized Feedback Amplifiers*. Bell System Technical Journal, vol. XIII, pp. 1-18; january, 1934.
- BRITAIN, J. E.: *Scanning the Past, Charles L.G. Fortescue and the Method of Symmetrical Components*. Proceedings of the IEEE, vol. 86, n.º 5, pp. 1020-1021, may, 1998.
- CAMPBELL, G. A.: *Physical Theory of the Electric Wave-Filter*. The Bell System Technical Journal, vol. I, pp. 1-32, november 1922.
- CARSON, J. R.: *A Generalization of the Reciprocal Theorem*. Bell System Technical Journal, vol. III, pp. 393-399, july, 1924.

- CARSON, J. R.: *Electric Circuit Theory and the Operational Calculus*. Bell System Technical Journal, vol. IV, pp. 685, october, 1925, pp 50-95, vol V, january, 1926, pp. 336, vol V, april, 1926.
- CARSON, J. R.: *Electromagnetic Theory and the Foundations of Electric Circuit Theory*. Bell System Technical Journal, vol. VI, pp. 1-17, vol. VI, january, 1927.
- CEDERBAUM, I.: *Some Applications of Graph Theory to Network Analysis and Synthesis*. IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-31, n.º 1, pp. 133-138, january, 1984.
- CEI: *Décisions de la Commission Électrotechnique Internationale* (Réunion de Turin, 1911). *Symboles, Diagrammes pour Courants Alternatifs; Spécifications des Machines*. La Lumière Électrique, 17, février, 1912, pp. 195-196.
- CHUA, L.: «*Memristor-The Missing Circuit Element*». IEEE Transactions on Circuit Theory, CT-18 (5), pp. 507-519, september, 1971.
- DARLINGTON, S.: *A History of Network Synthesis and Filter Theory for Circuits Composed of Resistors, Inductors, and Capacitors*. IEEE Trans. On Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, vol. 46, n.º 1, pp. 4-13, january, 1999.
- DIETZOLD, R. L.: *Network Theory Comes of Age*. Electrical Engineering, pp. 895-899, september, 1948.
- EMANUEL, A. E.: *Apparent and Reactive Power in Three-Phase Systems: In Search of a Physical Meaning and a Better Resolution*. ETEP Eur. Trans. on Electric Power, vol. 3, n.º 1, pp. 7-14. january/february, 1993.
- EVANS, W. R.: *Graphical Analysis of Control Systems*. Transactions AIEE, vol. 67, pp. 547-551, 1948.
- FERRERO, A.; SUPERTI FURGA, G.: *A New Approach to the definition of Power Components in Three-Phase Systems under Non-Sinusoidal Conditions*. IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, IM-40, pp. 568-577, 1991.
- FORTESCUE, C. L.: *Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks*. Transactions AIEE, vol 37, part. II, pp. 1027-1140, 1918.
- FOSTER, R.: *A Reactance Theorem*. Bell System Technical Journal, vol. III, pp. 259-267, april, 1924.
- GHAUSI, M. S.: *Analog Active Filters*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-31, n.º 1, pp. 13 a 31, january, 1984.
- HARTLEY, R. V. L.: *Transmission of Information*. Bell System Technical Journal, vol. VII, pp. 535-563; july, 1928.
- HIGGINS, T. J.: *Operational Calculus as Used in Electrical Circuit Analysis*. Electrical Engineering, vol. 68, pp. 42-45, january, 1949.
- JACKSON, L. B.; KAISER, J. F.; McDONALD, H. S.: *A Approach to the Implementation of Digital Filters*. IEEE Transac. Audio Electro-acustics, vol. AU-16, pp. 413-421, september, 1968.
- JOHNSON, DON H.: *Scanning Our Past. Origins of the Equivalent Circuit Concept: The Voltage-Source Equivalent*. Proceedings of the IEEE, vol. 91, n.º 4, pp. 636-640, april, 2003.
- JOHNSON, DON H.: *Scanning Our Past. Origins of the Equivalent Circuit Concept: The Current-Source Equivalent*. Proceedings of the IEEE, vol. 91, n.º 5, pp. 817-821, may, 2003.
- KALMAN, R. E.; HO, Y. C.; NARANDA, K. S.: *Controllability of Linear Dynamical Systems. Contributions to Differential Equations*. Vol. I, pp. 189-213, Univ. Maryland, 1962.
- KALMAN, R. E.: *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, ASME J. Basic Eng., vol. 82, pp. 34-45, 1960.
- KENNELLY, A. E.: *The Equivalent of Triangles and Three-Pointed Stars in Conducting Networks*. Electrical World, XXXIV, pp. 413-414, 1899.
- KENNELLY, A. E.: *Impedance*, AIEE Trans, X, 1893, pp. 175-216.
- KUH, E. S.; ROHRER, R. A.: *State-variables Approach to Network Analysis*. Proc. IEEE, vol. 53. pp 672-686, july, 1965.
- LIENARD, A.: *Puissance Réactive en Courants non Sinusoidaux*. Revue Générale de l'électricité, tome X, n.º 16, pp. 547-549, 22 octobre, 1921.
- LYON, W. V.: *Reactive and Power Factor*. AIEE Trans. pp. 763-770, 1933.
- MARTIN, W. H.: *The Transmission Unit and Telephone Transmission Reference Systems*. Bell System Technical Journal, vol. III, pp. 400-408; july, 1924.
- MATSUMOTO, T.: *A Chaotic Attractor from Chua's Circuit*. IEEE Transactions on Circuit and Systems, vol. CAS-31, n.º 12, pp. 1055-1058, decembrer, 1984.
- MASON, S. J.: *Feedback Theory: Some Properties of Signal Flow Graphs*. Proc. IRE, vol. 41, pp. 1144-1156, 1953.

- MILLMAN, J.: *A Useful Network Theorem*. Proceedings of the IRE, vol. 28, pp. 413-417, september, 1940.
- NYQUIST, H.: *Regeneration Theory*. Bell System Technical Journal, vol. XI, pp. 126-147, 1932.
- PEDERSON, D.: *A Historical Review of Circuit Simulation*. IEEE Trans. On Circuits and Systems, vol. CAS-31, n.º 1, pp. 103-111, january, 1984.
- POMEY, J. B.: *Puissance Active et Puissance Réactive*. Revue Générale de l'électricité, tome II, n.º 9, pp. 315-319, 2 mars 1918.
- POPOV, V. M.: *Absolute Stability of Nonlinear Systems of Automatic Control*. Automatic Remote Control, vol. 22, n.º 8, pp. 857-875, 1961.
- RAGAZZINI, J. R.; ZADEH, L. A.: *The Analysis of Sampled Data Servo Systems*. Trans. AIEE, vol. 71, part. 2, pp. 225-234, 1952.
- ROSEN, A.: *A New Network Theorem*. Journal of IEE, vol. 62, pp. 916-918, 1924.
- SANDBERG, I. W.: *A Perspective on System Theory*. IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-31, n.º 1, pp. 88-103, january, 1984.
- SHANNON, C. E.: *The Mathematical Theory of Communication*. Bell System Technical Journal, vol. XXVII, july, pp. 379-423; october, pp. 623-656, 1948.
- STARR, A. T.: *A New Theorem for Active Networks*. Journal of IEE, september, 1933.
- STARR, A. T.: *Electric Circuits and Wave Filters*. Sir Isaac Pitman & Sons, London, 1948.
- STEINMETZ, C. P.: *Reactance*. Transactions of American Institute of Electrical Engineers, tome XI, pp. 640-648, 1894.
- STOCKMAN, H. E.: *Mayer's and Norton's Theorems*. IEEE Circuits and Systems Magazine, pp. 14-15, december, 1982.
- STOUT, T. M.: *A Block Diagram Approach to Modern Analysis*. Transactions AIEE, vol 71, pp. 250-260, 1952.
- STRUŠKOV, D.; SNIDER, G. S.; STEWART, D.; WILLIAMS, R. S.: *The Missing Memristor Found*. Nature 453, pp. 80-83, 1 may 2008.
- SÜSSKIND, C.: *The Early History of Electronics I: Electromagnetics before Hertz*. IEEE Spectrum, august, 1968, pp. 90-98.
- TELLEGEN, B. D. H.: *A General Network Theorem with Applications*. Phillips Research Reports, vol. 7, pp. 259-269, 1952.
- TELLEGEN, B. D. H.: *The Gyrdor. A New Electric Network Element*. Phillips Research Reports, vol. 3, pp. 81-101, 1948.
- VAN VALKENBURG, M. E.: *Teaching Circuit Theory: 1934-1984*. IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-31, n.º 1, pp. 64-68, january, 1984.
- WATANABE, E. H.; STEPHAN, R. M.; AREDES, M.: *New Concepts of Instantaneous Active and Reactive Powers in Electrical Systems with Generic Loads*. IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 8, n.º 2, pp-697-703, april, 1993.
- WILLEMS, J. L.: *Mathematical Foundations of the Instantaneous Power Concepts: A Geometrical Approach*. ETEP Eur. Trans. on Electric Power, vol. 6, n.º 5, pp. 299-304, september/october, 1996.
- ZADEH, L. A.: *From Circuit Theory to System Theory*. Proceedings of the IRE, pp. 855-865, may, 1962.
- ZADEH, L. A.: *Fuzzy Sets*. Information and Control, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- ZADEH, L. A.; DESOER, C. A.: *Linear System Theory. The State Space Approach*. McGraw-Hill, New York, 1963.
- ZOBEL, O. J.: *Theory and Design of Uniform and Composite Electric Wave-Filters*. The Bell System Technical Journal, vol. II, pp. 1-46, january, 1923.
- ZVEREV, A. I.: *The Golden Anniversary of Electric Wave Filters*. IEEE Spectrum, march 1966, pp. 129-131.



■ Apéndice 2

Transformada de Laplace

- A.2.1 Introducción histórica
- A.2.2 Definición de transformada de Laplace
- A.2.3 Teoremas sobre la transformada de Laplace
- A.2.4 Desarrollo de pares de transformadas
- A.2.5 Síntesis de ondas utilizando el operador retardo del tiempo
- A.2.6 Función impulso. Delta de Dirac
- A.2.7 Síntesis de ondas utilizando la función impulso
- A.2.8 Transformada inversa de Laplace. Tablas de transformadas
- A.2.9 La integral de convolución
- A.2.10 Interpretación gráfica de la convolución
- A.2.11 Propiedades de la integral de convolución

■ A.2.1. Introducción histórica

El empleo de la transformada de Laplace en la Ingeniería Eléctrica data de finales del siglo XIX. Se debe al ingeniero inglés Oliver Heaviside (1850-1925) la invención de lo que él denominó **cálculo operacional**, y que empleó con frecuencia en la resolución práctica de transitorios en circuitos eléctricos. En 1893 publicó un trabajo con el título *On operators in mathematical physics* donde desarrollaba sus teorías y aplicaciones del cálculo operacional. Realmente el texto carecía de base matemática sólida y rigurosa por lo que fue duramente criticado por científicos de su tiempo entre los que destacaba Lord Rayleigh, catedrático de la Universidad de Cambridge. La defensa del autor residía, principalmente, en el valor práctico del procedimiento, que permitía resolver con sencillez circuitos complicados, contrastados fielmente por los resultados obtenidos.

El primitivo método operacional (o simbólico) de Heaviside, se basaba en considerar el operador D , en las derivadas de una función $y = y(t)$: Dy , D^2y , D^3y , ..., como un número ordinario (Heaviside usaba el operador p en vez de D para no confundirlo con el símbolo de la inducción o desplazamiento eléctrico). Al aplicar este operador a un circuito eléctrico se obtiene una *ecuación operacional* que debe operarse algebraicamente para obtener la solución final. El éxito creciente en las aplicaciones del cálculo operacional indujo a los matemáticos a buscar justificaciones teóricas por diversos caminos. El primero en lograr un principio de justificación de los métodos de Heaviside fue J. R. Carson, matemático de la compañía americana ATT, que lo hizo en 1917, basándose en ecuaciones integrales, al año siguiente Bromwich obtiene resultados similares utilizando la teoría de las funciones de variable compleja. De cualquier modo, la base de ambos trabajos se encontró en los escritos de Laplace de 1780. Con el paso de los años el primitivo cálculo operacional de Heaviside ha sido sustituido por el de la transformación de Laplace. Esta transformación proporcionó la sustentación rigurosa de los métodos operacionales y no se encontraron errores importantes en los resultados de Heaviside.

De forma similar al cálculo operacional, la transformación de Laplace permite transformar una ecuación diferencial en otra algebraica de relativa sencillez, la cual puede ser expresada en la forma deseada. A partir de esta última y mediante otra transformación inversa se obtiene la solución completa de la ecuación diferencial de partida, siendo otra de sus ventajas, la posibilidad de permitir la inclusión de condiciones iniciales o límites. Esencialmente, la transformada de Laplace elimina la variable independiente en las ecuaciones diferenciales (la cual es generalmente el tiempo t), sustituyendo en su lugar el operador s . Este operador, como se verá más tarde, es una cantidad compleja, que puede algebraicamente ser tratada en forma similar al operador D o p de Heaviside. De hecho, si todas las condiciones iniciales son nulas, los operadores p y s son prácticamente idénticos.

■ A.2.2. Definición de transformada de Laplace

Si $f(t)$ es una función del tiempo, su transformada de Laplace, se define como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \quad (1)$$

El símbolo $\mathcal{L}$ representa el proceso de transformación y se lee con las palabras «la transformada de Laplace de...»; s es el símbolo de la frecuencia compleja y es igual a:

$$s = \sigma + j\omega \quad (\text{segundos}^{-1}) \quad (2)$$

donde j indica el complejo $\sqrt{-1}$.

La implicación del uso de 0^- como el límite inferior de integración en la ecuación (1) requiere algunas aclaraciones. Al estudiar los circuitos eléctricos hemos visto que se acostumbra a subdividir el tiempo $t = 0$ en tres partes: « 0^- » indica el tiempo inmediatamente anterior al de referencia, « 0 » indica el tiempo exacto de referencia y « 0^+ » el tiempo inmediatamente posterior a $t = 0$. Cuando se cumple la condición de continuidad $f(0^-) = f(0^+)$, la elección de 0^- o 0^+ no es importante; sin embargo, si se tiene una función impulso unidad (ver Epígrafe A.2.6) en el instante $t = 0$, entonces se debe usar $t = 0^-$, de tal modo que se incluya la función impulso. En vez de hacer una excepción para redes con señales impulso, se utilizará $t = 0^-$, como límite inferior de la transformación (1). De acuerdo con la expresión (1) la obtención de la transformada de Laplace de una función de t se realiza en dos pasos:

- a) Se multiplica $f(t)$ por el término exponencial e^{-st} , con $s = \sigma + j\omega$. Debe notarse que tanto el exponente $-st$ como e^{-st} no tienen dimensiones.
- b) Se realiza la integral definida de la función resultante del apartado anterior, respecto de t , desde el límite inferior $t = 0^-$ hasta el superior $t = \infty$. Al resolver la integral definida, la variable independiente t no aparece en el resultado, llegando a una función única de s , denominada $F(s)$.

$F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$. Nótese el uso de la misma letra para $f(t)$ y su transformada $F(s)$, en un caso con minúscula para las funciones del tiempo y en el otro con mayúsculas para sus transformadas. De esta forma la transformada de $i(t)$ será $I(s)$, la de $u(t)$ será $U(s)$, etc., constituyendo cada grupo, un par de transformación.

■ A.2.3. Teoremas sobre la transformada de Laplace

Antes de calcular las transformadas de Laplace de diversas funciones es conveniente desarrollar una serie de teoremas que representan propiedades útiles para calcular más tarde con rapidez, tablas de transformadas.

a) Linealidad

Si A es una constante y $f(t)$ es transformable, de tal modo que $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, entonces se cumple:

$$\mathcal{L}[Af(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} A f(t) dt = A \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = A F(s) \quad (3)$$

b) Superposición

Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son transformables, de tal modo que se tenga $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ el principio de superposición establece:

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} [f_1(t) + f_2(t)] dt = F_1(s) + F_2(s) \quad (4)$$

c) Traslación real o en el dominio del tiempo

Una función desplazada en el tiempo, tiene una transformada de Laplace que se relaciona fácilmente con la transformada de la función no desplazada, únicamente bajo circunstancias especiales. En la Figura A.2.1 se muestra una función $f(t)$ a la izquierda y otra función $f(t-a)$ a la derecha, que representa un desplazamiento o traslación real de la función $f(t)$ de valor a .

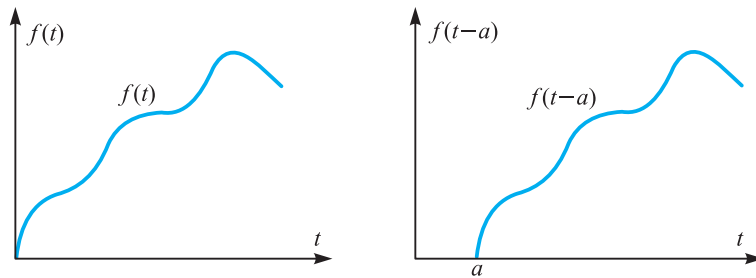


Figura A.2.1 Función $f(t)$ y función trasladada $f(t-a)$

Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$, la transformada de Laplace de $f(t-a)$ donde a es una constante será:

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt \quad (5)$$

Si realizamos el cambio de variable $\tau = t - a$; $t = \tau + a$, $dt = d\tau$, resulta:

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = \int_{0^- - a}^{\infty} e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau = e^{-sa} \int_{0^- - a}^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \quad (6)$$

si se supone que $f(t)$ es cero en el tiempo anterior a $t = 0$, se obtiene:

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-sa} \left[\int_{0^- - a}^{0^-} e^{-s\tau} (0) d\tau + \int_{0^-}^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right] = e^{-sa} F(s) \quad (7)$$

Téngase en cuenta, por consiguiente, que la relación anterior únicamente será válida, siempre que la función original $f(t)$ sea nula en el tiempo anterior a $t = 0$. En caso contrario puede haber una contribución de la parte de la integral cuyos límites varían entre $0^- - a$ y 0^- .

d) Traslación en el dominio de la frecuencia compleja

Supóngase que la transformada de Laplace de una función $f(t)$ es $F(s)$, vamos a calcular la transformada de Laplace de la función $e^{-at}f(t)$, que representa una ponderación exponencial de la función $f(t)$. Aplicando la definición (1) de transformada de Laplace se cumple:

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} e^{-at} f(t) dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t} f(t) dt = F(s+a) \quad (8)$$

lo que indica que la multiplicación de una función $f(t)$ por e^{-at} en el dominio del tiempo, produce una traslación a de la transformada, en el dominio de la frecuencia.

e) Cambio de escala en el dominio del tiempo

Cuando se modifica la escala del tiempo, la transformada de Laplace de la función a la cual se aplica este cambio de escala, está relacionada muy directamente con la función original. Si a es una constante positiva se tiene:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(at) dt \quad (9)$$

si se realiza el cambio $\tau = at$; $d\tau = a dt$ resulta:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{0^-}^{\infty} e^{-\tau s/a} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (10)$$

f) Derivación real o en el dominio del tiempo

Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$, la transformada de $f'(t)$, que expresa la derivada $\frac{df(t)}{dt}$, será:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \quad (11)$$

que integrando por partes, haciendo:

$$\begin{aligned} u &= e^{-st} & du &= -se^{-st} dt \\ dv &= f'(t) dt & v &= f(t) \end{aligned}$$

nos da:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = [uv]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} v du = [f(t)e^{-st}]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} se^{-st} f(t) dt \quad (12)$$

el cálculo del primer sumando del último miembro de la ecuación anterior para el límite superior es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0 \quad \text{si } |f(t)| \text{ está acotada para } t \rightarrow \infty$$

para el límite inferior resulta:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)e^{-st} = f(0^-) \quad (13)$$

y en consecuencia la expresión (12) se convierte en:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-) = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0^-) \quad (14)$$

que indica que la transformada de la derivada es s veces la transformada de la función original menos el valor inicial de la función temporal. La transformada de Laplace de derivadas de orden más elevado se obtiene aplicando sucesivamente el resultado (14). Así se tiene:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f'(t)\right] = s \mathcal{L}[f'(t)] - f'(0^-) \quad (15)$$

es decir:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s[sF(s) - f(0^-)] - f'(0^-) = s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-) \quad (16)$$

de un modo similar, para una derivada de tercer orden resulta:

$$\mathcal{L}[f'''(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f''(t)\right] = s \mathcal{L}[f''(t)] - f''(0^-) \quad (17)$$

y teniendo en cuenta (16) se obtiene:

$$\mathcal{L}[f'''(t)] = s[s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)] - f''(0^-) \quad (18)$$

es decir:

$$\mathcal{L}[f'''(t)] = s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-) \quad (19)$$

en general, para una derivada de orden n se obtiene:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-) \quad (20)$$

Obsérvese que en cualquier caso, las transformadas incluyen las condiciones iniciales de un modo directo, lo que representa una ventaja en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales por el método de Laplace. Téngase en cuenta que con el método clásico, es preciso evaluar las condiciones iniciales de un modo separado y no directamente como aquí se obtiene. Hay que hacer notar que si se prescinde de las condiciones iniciales, la transformada de Laplace de una derivada, consiste en sustituir el operador $D \equiv d/dt$ por la variable de Laplace s .

g) Derivación en el dominio de la frecuencia

Si la transformada de Laplace de una función $f(t)$ es $F(s)$, de acuerdo con la definición (1) se tendrá:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \quad (21)$$

si derivamos respecto a s cada miembro de la ecuación anterior resulta:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_{0^-}^{\infty} -te^{-st} f(t) dt = -\mathcal{L}[tf(t)] \quad (22)$$

lo que indica que la derivada respecto de s de la transformada $F(s)$ de una función $f(t)$, nos da con signo menos la transformada de Laplace de la función $tf(t)$. Si se deriva la ecuación (22) nuevamente resulta:

$$\frac{d^2 F(s)}{ds^2} = \int_{0^-}^{\infty} t^2 e^{-st} f(t) dt = +\mathcal{L}[t^2 f(t)] \quad (23)$$

y en un caso general de derivada n -ésima, se tendrá:

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)] \quad (24)$$

que corresponde a la relación inversa:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad (25)$$

expresión que nos indica un modo simple de calcular la transformada de Laplace de $t^n f(t)$ conociendo $F(s)$ que es la transformada de Laplace de $f(t)$.

h) Integración real en el dominio del tiempo

Supóngase que la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$. Consideremos la función integral indefinida:

$$f^{(-1)}(t) = \int f(t) dt \quad (26)$$

la transformada de Laplace de la integral indefinida anterior será:

$$\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int f(t) dt \right] e^{-st} dt \quad (27)$$

que al integrar por partes haciendo:

$$\begin{aligned} u &= \int f(t) dt & du &= f(t) \\ dv &= e^{-st} dt & v &= -\frac{1}{s} e^{-st} \end{aligned} \quad (28)$$

nos da:

$$\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \int f(t) dt \right]_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (29)$$

operando la ecuación anterior resulta:

$$\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s} \quad (30)$$

donde:

$$f^{(-1)}(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} f(t) dt \quad (31)$$

Al aplicar repetidamente la ecuación (30) resulta:

$$\mathcal{L}[f^{(-n)}(t)] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{i=1}^n \frac{f^{(-i)}(0^-)}{s^{n-i+1}} \quad (32)$$

Hay que hacer notar que si prescindimos de las condiciones iniciales, la transformada de Laplace de una integral consiste en sustituir el operador $1/D \equiv \int$, por la variable de Laplace $1/s$.



Comentarios prácticos

1) Existe un procedimiento más ingenioso e informal para obtener la transformada de Laplace de una integral indefinida, basada en la transformación de Laplace de la derivada señalada en (14) y que era:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0^-) \quad (a)$$

si se sustituye en la ecuación anterior $f(t)$ por $f^{(-1)}(t)$, $f(0)$ por $f^{(-1)}(0^-)$ y $f'(t)$ por $f(t)$, la ecuación anterior se convierte en:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = s\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] - f^{(-1)}(0^-) \quad (b)$$

que esencialmente representa la integración de la ecuación (a). De la ecuación (b) se obtiene:

$$\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s} \quad (c)$$

que coincide con el resultado (30).

2) Siguiendo un procedimiento similar al que se expone en el Apartado h), el lector puede demostrar que la transformada de Laplace de la integral definida:

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt \quad (d)$$

viene expresada por:

$$\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s} \quad (e)$$

el resultado anterior no solamente es válido cuando el límite inferior de la integral (d) es $-\infty$, sino para cualquier tiempo genérico t_0 siempre que este sea inferior a 0^- . En el caso específico de que el límite inferior sea 0^- , entonces se obtiene:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (f)$$

por lo que no interviene el valor inicial de la integral en el resultado de la transformación.

i) Funciones periódicas

Si se conoce la transformada de Laplace del primer ciclo de una función periódica, se puede determinar fácilmente la transformada de la función completa. Considérese la función periódica mostrada en la Figura A.2.2, que tiene un periodo T . Se han denominado $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., las diferentes funciones en cada periodo de tiempo. Supóngase que la transformada de Laplace de $f_1(t)$ es $F_1(s)$. Las transformadas de Laplace de otros tramos, teniendo en cuenta (7) son:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_2(t)] &= \mathcal{L}[f_1(t - T)] = e^{-Ts}F_1(s) \\ \mathcal{L}[f_3(t)] &= \mathcal{L}[f_1(t - 2T)] = e^{-2Ts}F_1(s) \dots \\ \mathcal{L}[f_n(t)] &= \mathcal{L}[f_1(t - (n-1)T)] = e^{-(n-1)Ts}F_1(s)\end{aligned}\quad (33)$$

en consecuencia la transformada de la función periódica completa $f(t)$ será:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)] = F_1(s)[1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots] = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} \quad (34)$$

que permite calcular la transformada de una función periódica en función de la transformada del primer ciclo.

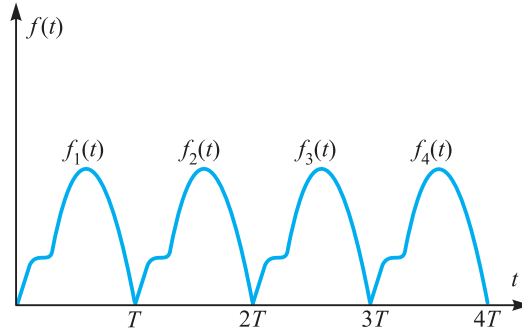


Figura A.2.2 Función periódica

j) Teorema del valor inicial

Si la función $f(t)$ y su primera derivada son transformables y si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, existiendo el límite:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (35)$$

entonces se puede determinar fácilmente el valor de $f(0^-)$ de acuerdo con la ecuación:

$$f(0^-) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (36)$$

La demostración de la igualdad anterior parte de la transformada de Laplace de una derivada (ecuación (14)):

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-) \quad (37)$$

Tomando límites cuando $s \rightarrow \infty$ en ambos miembros de la ecuación anterior resulta:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^-)] \quad (38)$$

y teniendo en cuenta que el primer miembro se hace cero cuando $s \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^-)] \quad (39)$$

que se puede escribir:

$$f(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (40)$$

k) Teorema del valor final

El teorema del valor final permite calcular el valor final o de régimen permanente de una función temporal $f(\infty)$, cuando se conoce su transformada. Su definición es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (41)$$

la demostración de la igualdad anterior, parte al igual que antes de la ecuación (14), tomando límites cuando $s \rightarrow 0$, resultando:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \right] = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^-)] \quad (42)$$

el primer miembro, en el límite, se convierte en:

$$\left[\int_{0^-}^{\infty} f'(t) dt \right] = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^-)] \quad (43)$$

que se puede escribir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{0^-}^t f'(t) dt \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^-)] \quad (44)$$

es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (45)$$

En la Tabla A.2.1 se resumen los resultados de los teoremas anteriores.

Tabla A.2.1. Teoremas sobre la transformada de Laplace

Linealidad	$\mathcal{L}[A f(t)] = A F(s)$
Superposición	$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$
Traslación real	$\mathcal{L}[f(t - a)] = e^{-sa} F(s)$
Traslación compleja	$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$
Cambio de escala	$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Derivación real	$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$
Derivación compleja	$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
Integración real	$\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s}$
Funciones periódicas	$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}}$, $F_1(s)$ es la transformada de Laplace del primer ciclo
Valores inicial y final	$f(0^-) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$; $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

■ A.2.4. Desarrollo de pares de transformadas

Vamos a desarrollar a continuación pares de transformadas de Laplace utilizando la definición general (1) y empleando las propiedades demostradas en el epígrafe anterior. Se obtendrán las transformadas de las funciones más comunes que se emplean en la ingeniería.

a) Función escalón unidad $\varepsilon(t)$

Esta función se denomina también **función escalón de Heaviside** y se define por las siguientes ecuaciones¹:

$$\varepsilon(t) = 1 \quad \text{para } t \geq 0 \quad ; \quad \varepsilon(t) = 0 \quad \text{para } t < 0 \quad (46)$$

en la Figura A.2.3a se representa la función anterior. Dicha notación es conveniente para representar la conexión en una batería de *f.e.m.* U_0 a una red en $t = 0$. La función de excitación se representa entonces como $U_0 \varepsilon(t)$.

¹ La función escalón se suele representar todavía en muchos textos por el símbolo $u(t)$, sin embargo de acuerdo con la Norma UNE-EN 60026-6:2009 (*Símbolos literales utilizados en electrotecnia. Parte 6: Control Automático*), que está de acuerdo con la IEC 20027-6:2006, la función escalón se representa por el símbolo $\varepsilon(t)$ para no confundirla con la tensión $u(t)$.

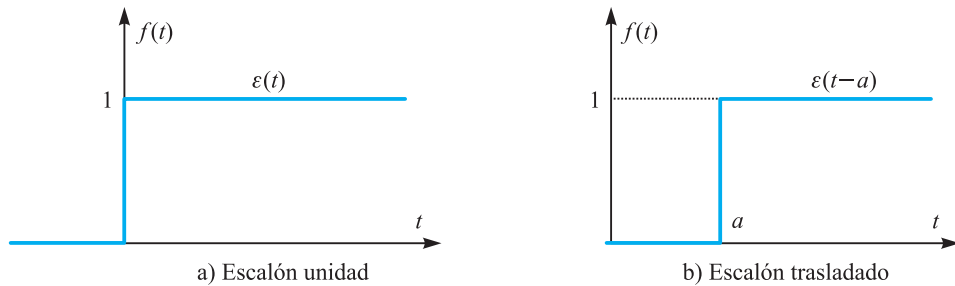


Figura A.2.3 Funciones escalón

En el caso de que $U_0 = 1$, se obtiene el escalón unidad, para el cual cumple:

$$\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \cdot dt = \frac{1}{s} \quad (47)$$

de igual forma para $U_0\varepsilon(t)$ se tendrá por el teorema de linealidad:

$$\mathcal{L}[U_0\varepsilon(t)] = \frac{U_0}{s} \quad (48)$$

Si se tiene un escalón unidad con una traslación real a como se indica en la Figura A.2.3b, se representará por $\varepsilon(t - a)$ cuyo valor será cero para $t < a$, e igual a 1 para $t \geq a$. De acuerdo con la propiedad de traslación real (7) se cumple:

$$\mathcal{L}[\varepsilon(t - a)] = e^{-as} \mathcal{L}[\varepsilon(t)] = e^{-as} \frac{1}{s} \quad (49)$$

b) Función exponencial e^{-at}

La transformada de la función exponencial se obtiene por aplicación directa de (1) resultando:

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \cdot e^{-at} \cdot dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} \quad (50)$$

el resultado anterior se podría haber obtenido también teniendo en cuenta la expresión (47) y la propiedad de traslación compleja (8). Téngase en cuenta que:

$$\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \frac{1}{s} \quad ; \quad \mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a) \quad (51)$$

y por consiguiente:

$$\mathcal{L}[e^{-at}\varepsilon(t)] = \frac{1}{s+a} \quad (52)$$

c) Funciones trigonométricas ($\cos \omega t$; $\sen \omega t$)

Teniendo en cuenta la identidad de Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sen \omega t \quad (53)$$

y conociendo la transformada de la exponencial (50) se pueden obtener las transformadas de las funciones trigonométricas:

$$\mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \frac{1}{s - j\omega} = \frac{s + j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (54)$$

y por consiguiente:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad ; \quad \mathcal{L}[\sen \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (55)$$

En el caso de querer obtener la transformada de un **solo ciclo** de una onda sinusoidal, por ejemplo del primero, el teorema aplicable a las funciones periódicas nos daría:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} \quad (56)$$

donde $F_1(s)$ representa la transformada del primer ciclo siendo T el periodo de la onda. Para una onda $\sen \omega t$ se obtendría:

$$\mathcal{L}[\sen \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} \quad (57)$$

y por consiguiente resulta:

$$F_1(s) = (1 - e^{-Ts}) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (58)$$

d) Función rampa $r(t)$

Esta función se define por las ecuaciones:

$$r(t) = t \quad \text{para } t \geq 0 \quad ; \quad r(t) = 0 \quad \text{para } t < 0 \quad (59)$$

En la Figura A.2.4a se muestra la representación de esta función. La transformada correspondiente sería:

$$\mathcal{L}[r(t)] = \int_{0^-}^{\infty} t e^{-st} dt \quad (60)$$

que al integrar por partes, haciendo:

$$\begin{aligned} u &= t \quad ; \quad du = dt \\ dv &= e^{-st} dt \quad ; \quad v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{aligned} \quad (61)$$

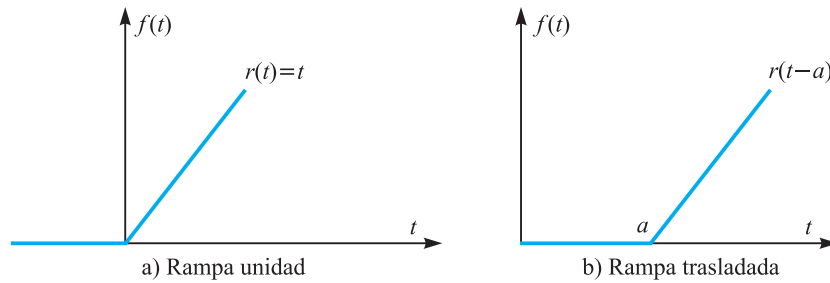


Figura A.2.4 Funciones rampa

se obtiene:

$$\mathcal{L}[r(t)] = \left[t \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \quad (62)$$

en el caso de que se tenga una rampa trasladada como en la Figura A.2.4b, la función se escribirá $r(t - a)$ y teniendo en cuenta el teorema de traslación resultará:

$$\mathcal{L}[\varepsilon(t - a)] = e^{-as}F(s) = e^{-as} \frac{1}{s^2} \quad (63)$$

en el caso de tener una rampa con otra pendiente k , su transformada sería:

$$\mathcal{L}[kr(t)] = k \mathcal{L}[r(t)] = \frac{k}{s^2} \quad (64)$$

En la Tabla A.2.2 se muestra una relación de transformadas de Laplace que resume el estudio aquí realizado.

Tabla A.2.2. Tabla de transformadas de Laplace

$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$ impulso unidad	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}(e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{1}{s}$	$\varepsilon(t)$ escalón unidad	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}(ae^{-at} - be^{-bt})$
$\frac{1}{s^2}$	$r(t) = t\varepsilon(t)$ rampa unidad	$\frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$-\frac{1}{(b-a)}[(\alpha-a)e^{-at} - (\alpha-b)e^{-bt}]$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$ (n entero positivo)	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{1}{s} e^{-as}$	$u(t - a)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$

(continúa)

(continuación)

$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t e^{-at}$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$\text{Sh } \omega t$
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2 + b^2}$	$\frac{1}{b} e^{-at} \text{sen } bt$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} \left(1 - \frac{b}{b-a} e^{-at} + \frac{a}{b-a} e^{-bt} \right)$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2} (1 - e^{-at} - ate^{-at})$

■ A.2.5. Síntesis de ondas utilizando el operador retardo del tiempo

Existen otros tipos de funciones no comentadas en el epígrafe anterior y que son de gran interés en la Ingeniería Eléctrica para determinar respuestas de circuitos eléctricos. En este epígrafe se van a calcular las transformadas de Laplace de algunas funciones que pueden utilizarse a partir de funciones más simples y que utilizan para ello las propiedades del traslado en el tiempo.

a) Pulso rectangular

Este pulso está representado en la Figura A.2.5a, es una onda rectangular de anchura a y amplitud K . En la Figura A.2.5b se muestran dos señales en escalón, que son las necesarias para sintetizar o construir la onda original. Para adaptar estas dos últimas señales al pulso original, se toma un escalón de altura K que comienza en $t = 0$ y que se ha denominado $f_a(t)$. Sin embargo esta función escalón es incorrecta para $t > a$ y nosotros debemos añadir un escalón negativo de magnitud K retardado a segundos y que se ha denominado $f_b(t)$ en la Figura A.2.5b.

En términos de estas dos funciones se puede escribir

$$f(t) = f_a(t) + f_b(t) = K\varepsilon(t) - K\varepsilon(t - a) \quad (65)$$

cuya transformada se obtiene a partir de la función escalón y de la propiedad de traslado en el tiempo, resultando:

$$F(s) = \frac{K}{s} - \frac{K}{s} e^{-as} = \frac{K(1 - e^{-as})}{s} \quad (66)$$

b) Pulso triangular

Este pulso está representado en la Figura A.2.6a. En la Figura A.2.6b se han dibujado las componentes necesarias para reconstruir el pulso original. Para *adaptar* estas componentes al pulso triangular desde 0 a T debemos tener una función rampa con una pendiente K/T

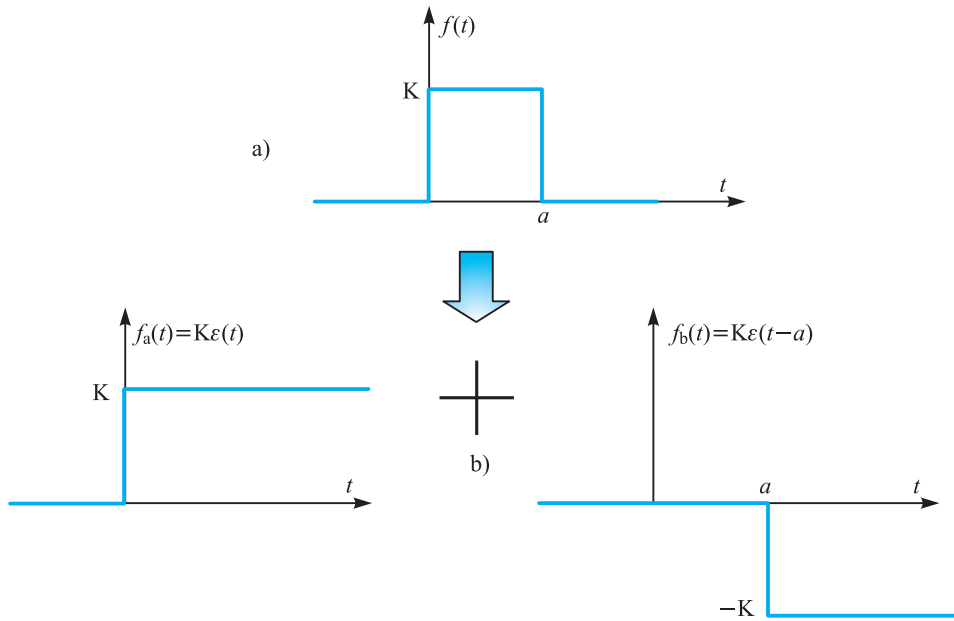


Figura A.2.5 Síntesis del pulso rectangular mediante dos escalones trasladados

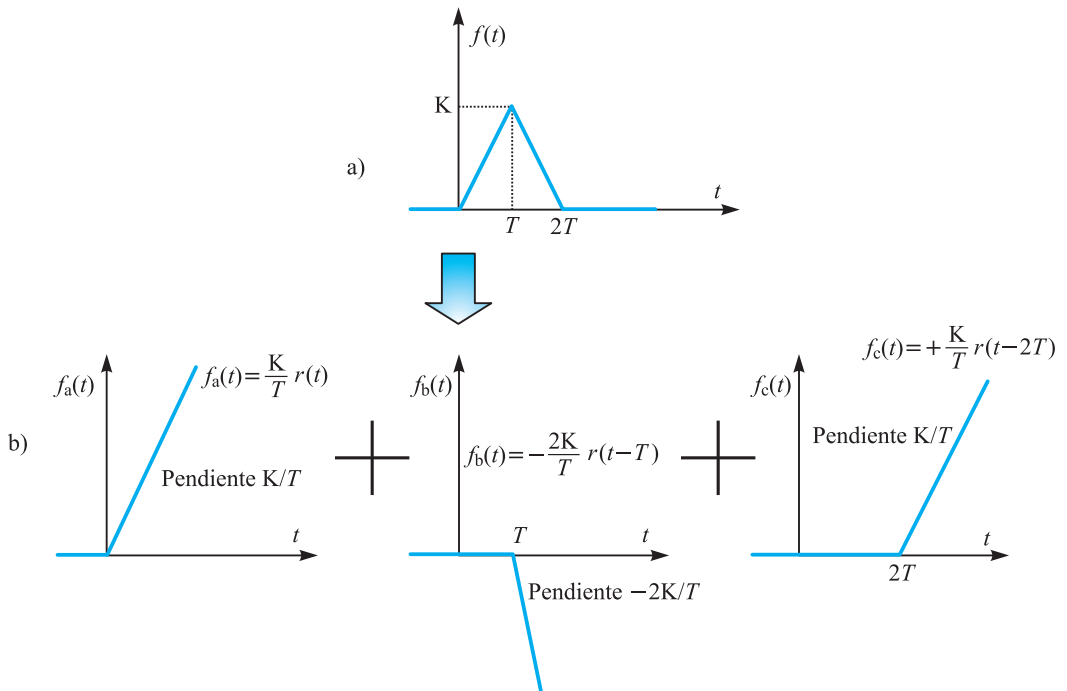


Figura A.2.6 Síntesis de un pulso triangular

que corresponde a la onda $f_a(t)$ de la Figura A.2.6b. Esta función no es válida después de $t = T$ y debemos añadir una rampa con una pendiente $-2K/T$, retrasada T segundos (fun-

ción $f_b(t)$). La suma de $f_a(t)$ y $f_b(t)$ tiene una pendiente de $-K/T$ para $t > T$, por ello es necesario añadir una rampa $f_c(t)$ de pendiente K/T para anular la señal para $t > T$.

De este modo resulta:

$$f(t) = f_a(t) + f_b(t) + f_c(t) = \frac{K}{T} r(t) - \frac{2K}{T} r(t - T) + \frac{K}{T} r(t - 2T) \quad (67)$$

cuya transformada de Laplace es:

$$F(s) = \frac{K}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{2K}{T} \frac{1}{s^2} e^{-Ts} + \frac{K}{T} \frac{1}{s^2} e^{-2Ts} = \frac{K(1 - e^{-Ts})^2}{Ts^2} \quad (68)$$

c) Pulso de barrido

Este pulso está representado en la Figura A.2.7a. En la Figura A.2.7b se han dibujado las señales necesarias para componer el pulso original. Para adaptar estas señales al pulso original de 0 a T , se debe utilizar una rampa de pendiente K/T que corresponde a la señal $f_a(t)$ de la Figura A.2.7b. Esta función no es válida para $t > T$ y por ello es preciso añadir dos señales $f_b(t)$ y $f_c(t)$, la primera de ellas es una rampa que comienza en T y pendiente $-K/T$, con esta función se anularía la pendiente de $f_a(t)$ a partir de $t = T$, quedando una respuesta plana $f_a(t) + f_b(t) = K$ para $t > T$. Para eliminar esta es preciso añadir un escalón negativo de amplitud $-K$ en $t = T$, resultando:

$$f(t) = \frac{K}{T} r(t) - \frac{K}{T} r(t - T) - K\varepsilon(t - T) \quad (69)$$

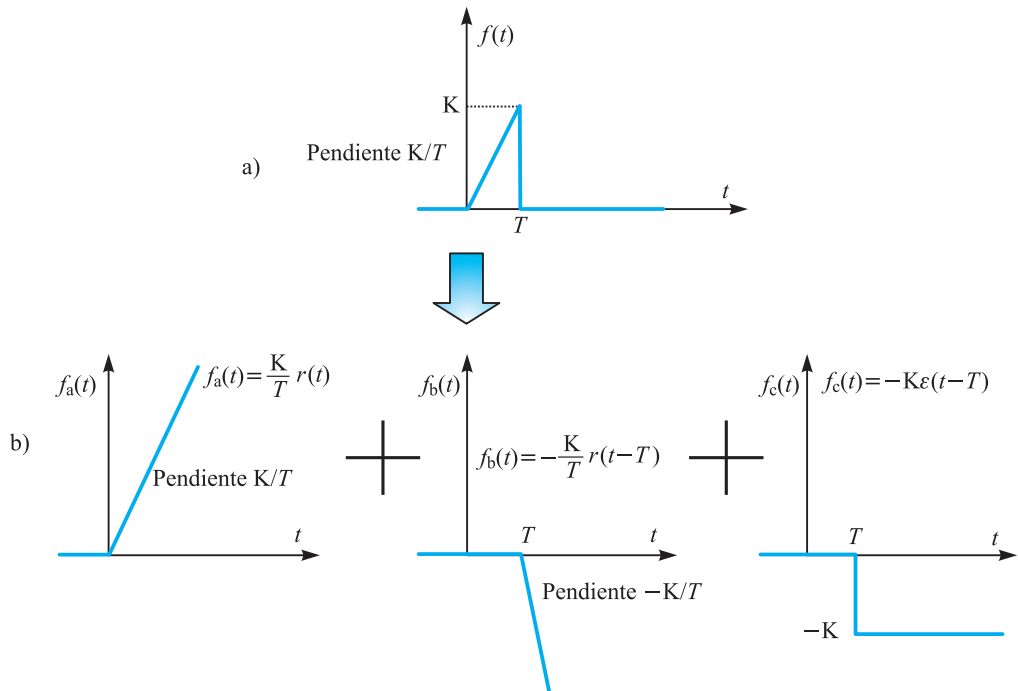


Figura A.2.7 Síntesis de un pulso de barrido

cuya transformada de Laplace es:

$$F(s) = \frac{K}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{K}{T} \frac{1}{s^2} e^{-Ts} - \frac{K}{s} e^{-Ts} = \frac{K}{Ts^2} [1 - e^{-Ts}(1 + Ts)] \quad (70)$$

De un modo similar se pueden obtener multitud de transformadas de ondas recurriendo a transformadas de funciones más simples.

■ A.2.6. Función impulso. Delta de Dirac

La función impulso no es una función matemática en el sentido estricto de la palabra y fue introducida en 1926 por Paul Dirac en sus estudios de mecánica cuántica. Para ver la génesis de este tipo de señal, vamos a considerar la onda rectangular mostrada en la Figura A.2.8. Es un pulso finito de anchura T_0 y altura $1/T_0$ definido por las ecuaciones:

$$f(t) = \frac{1}{T_0} \quad ; \quad 0 < t < T_0$$

$$f(t) = 0 \quad \text{para cualquier otro tiempo} \quad (71)$$

el área bajo el impulso es igual a 1 y permanece fija, sea cual sea el valor de T_0 . Si T_0 se va reduciendo, la base del pulso se estrecha y la altura aumenta, manteniéndose el área constante en la unidad. Si en el límite $T_0 \rightarrow 0$, la altura tiende a infinito y se produce en $t = 0$, pero conservando el área unidad. Esta función obtenida se denomina impulso unidad o impulso de Dirac y se simboliza por $\delta(t)$. Gráficamente se representa por una línea vertical con una flecha (Figura A.2.9a) para sugerir que es infinitamente alta en $t = 0$. Una función más general es $\delta(t - a)$ que es un impulso que se produce en $t = a$ (Figura A.2.9b). Matemáticamente la $\delta(t)$ se define:

$$\delta(t) = 0 \quad ; \quad \forall t \neq 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (72)$$

o más generalmente:

$$\delta(t - a) = 0 \quad \text{para} \quad \forall t \neq a \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t - a) dt = 1 \quad (73)$$

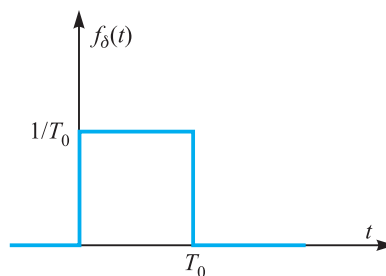


Figura A.2.8 Impulso rectangular

Por consiguiente el impulso es cero en todos los puntos, excepto en su punto de discontinuidad, en el que se concentra el área unidad. El área de impulso define la **intensidad** del mismo y se puede generalizar la delta de Dirac para áreas diferentes de la unidad. Así la función $5\delta(t)$ representa un impulso que sucede en $t = 0$ y de área 5. Este valor del área suele colocarse entre paréntesis al lado de la flecha que representa el impulso de la Figura A.2.9a, el impulso tiene una intensidad 1, mientras que el impulso de la Figura A.2.9b tiene una intensidad 5.

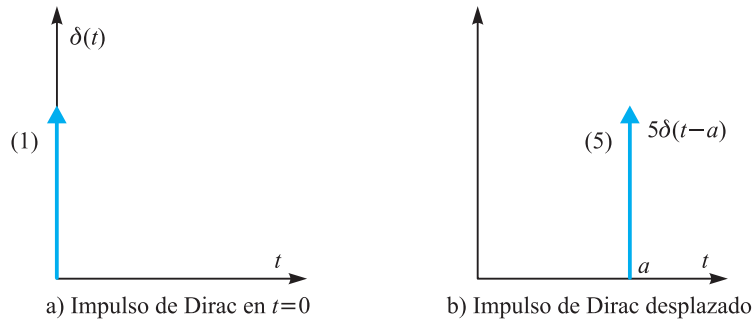


Figura A.2.9 Funciones delta de Dirac

La función $\delta(t)$ se puede definir también en términos de las propiedades de sus integrales solamente. Si se supone que la función $f(t)$, llamada **función de prueba** es una función continua, que se anula fuera de algún intervalo finito, entonces la función $\delta(t)$ se define como una función simbólica por la relación:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad (74)$$

la expresión anterior no tiene el significado común de una integral definida, sino que la integral, así como la función $\delta(t)$, están definidas por el número $f(0)$ asignado a la función $f(t)$. Con la interpretación anterior, resulta que $\delta(t)$ se puede tratar como si fuera una función ordinaria, excepto que nunca se hablará de $\delta(t)$, pero sí de los valores de las integrales en que aparece $\delta(t)$. Aunque con falta de rigor matemático en sentido estricto, se puede dar una interpretación geométrica de (74) e incluso demostrar esa expresión, tomando como punto de partida la definición (72). En la Figura A.2.10a se muestra una señal $f(t)$ y una función impulso en $t = 0$. El valor de la integral (74) será:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \delta(t) f(t) dt \quad (75)$$

la igualdad anterior se ha hecho en base a que $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$, lo que ha permitido reducir los límites de la integral, a valores separados un infinitésimo del punto $t = 0$ donde actúa $\delta(t)$.

Si ε es suficientemente pequeño, al ser $f(t)$ continua en $t = 0$, entonces $f(t)$ es aproximadamente $f(0)$ entre $0 - \varepsilon$ y $0 + \varepsilon$, de este modo se puede extraer $f(0)$ fuera de la integral para obtener:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) dt = f(0) \quad (76)$$

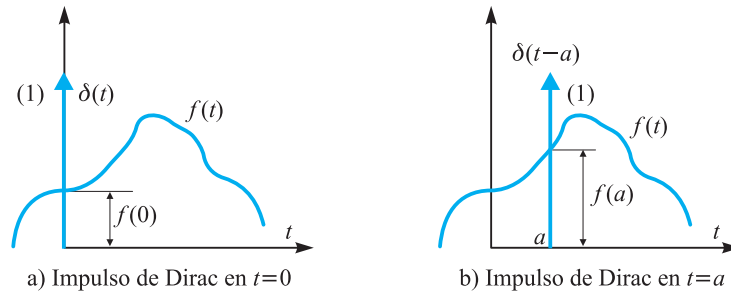


Figura A.2.10 El impulso de Dirac como función de muestreo

ya que por la definición (72) la segunda integral vale la unidad. Esta idea geométrica se puede aplicar a la Figura A.2.10b de tal forma que de un modo análogo a (68) se cumplirá ahora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) f(t) dt = f(a) \quad (77)$$

la demostración de la ecuación es obvia, ya que si se realiza el cambio $t-a = \tau$, $dt = d\tau$, resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) f(a+\tau) d\tau = [f(a+\tau)]_{\tau=0} = f(a) \quad (78)$$

Las propiedades integrales de la función impulso expresadas en (76) y (77) permiten identificar a la delta de Dirac como una **función de muestreo** ya que al variar el parámetro a se va desplazando el impulso reproduciendo en cada momento el valor de la función $f(t)$ en cada punto. Una vez conocidas la definición y propiedades de la delta de Dirac vamos a calcular la transformada de Laplace de la misma. Si se parte de la función $f_g(t)$ rectangular de la Figura A.2.8, se puede observar fácilmente que esta señal se puede considerar la superposición de dos escalones de acuerdo con la ecuación:

$$f_g(t) = \frac{1}{T_0} \varepsilon(t) - \frac{1}{T_0} \varepsilon(t-T_0) \quad (79)$$

la transformada de Laplace de la función anterior vale:

$$\mathcal{L}[f_g(t)] = \frac{1}{T_0} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-T_0 s}}{s} \right] = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{T_0 s} \quad (80)$$

al tender $T_0 \rightarrow 0$, aplicando la regla de L'Hôpital para encontrar el límite, se obtiene:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-T_0 s}}{T_0 s} = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \frac{-se^{-T_0 s}}{s} = 1 \quad (81)$$

ya que al tender T_0 a cero la función $f_g(t)$ se convierte en la δ de Dirac. En consecuencia la transformada de Laplace del impulso es la unidad. Teniendo en cuenta que las transformadas de las funciones $r(t)$, $\varepsilon(t)$ y $\delta(t)$ son respectivamente:

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{1}{s^2} \quad ; \quad \mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \frac{1}{s} \quad ; \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (82)$$

y recordando el teorema de derivación con condiciones iniciales nulas:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) \quad (83)$$

resulta:

$$\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \frac{1}{s} \rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \varepsilon(t)\right] = s \mathcal{L}[\varepsilon(t)] = s \frac{1}{s} = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (84)$$

y por consiguiente:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t) \quad (85)$$

si se parte ahora de $\mathcal{L}[r(t)]$ resulta:

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{1}{s^2} \rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} r(t)\right] = s \mathcal{L}[r(t)] = s \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} = \mathcal{L}[\varepsilon(t)] \quad (86)$$

y por ello se cumple:

$$\frac{dr(t)}{dt} = \varepsilon(t) \quad (87)$$

Las identidades (85) y (87) se observan mejor en el esquema de la Figura A.2.11. Hacia la derecha se relacionan por derivación y hacia la izquierda por integración. Debe destacarse un hecho que para el lector puede sorprender. La derivada de $u(t)$ se observa en la Figura A.2.11 que es cero para $t < 0$ y $t > 0$, sin embargo en $t = 0$ se obtiene precisamente $\delta(t)$.

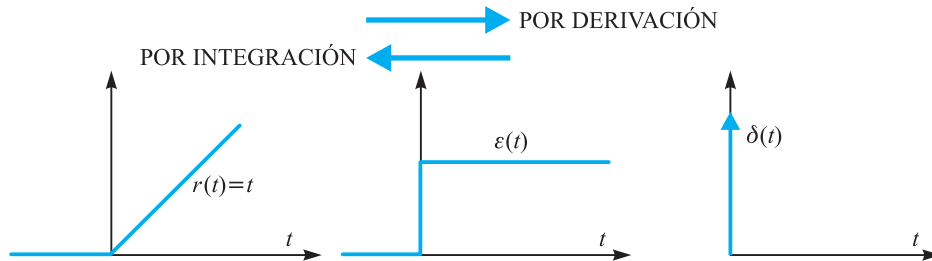


Figura A.2.11 Relaciones entre las funciones rampa, escalón e impulso de Dirac

Si se aplica la regla de derivación a la delta de Dirac, se obtiene la transformada de Laplace de $\delta'(t)$.

$$\mathcal{L}[\delta'(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \delta(t)\right] = s \mathcal{L}[\delta(t)] = s \quad (88)$$

y así sucesivamente con las demás derivadas. En general se tendrá:

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n \quad (89)$$

Las funciones $\delta'(t)$, $\delta''(t)$, etc. son **funciones singulares** que reciben respectivamente los nombres de: doblete, triplete, etc.

■ A.2.7. Síntesis de ondas utilizando la función impulso

La derivación e integración de impulsos se puede emplear para calcular con eficacia y rapidez la transformada de Laplace de funciones que pueden representarse a tramos como potencias del tiempo. Esta posibilidad hace que, con relativamente poco esfuerzo, el ingeniero pueda determinar con sencillez la transformada de Laplace de cualquier función. La idea básica consiste en aproximar la función original por trozos de rectas (o en general por curvas potencias de t , como parábolas, etc.) y proceder a una derivación repetida hasta que se obtengan únicamente funciones delta o sus derivadas. A continuación, aplicando el teorema de derivación real (ver Tabla A.2.1), con condiciones iniciales nulas, ya que se supone que la función de partida comienza en $t = 0$, se podrá calcular la transformada de Laplace de la función original.

Para ver un ejemplo de aplicación de estas ideas, se va a considerar la función $f(t)$ representada en la Figura A.2.12a, en las Figuras A.2.12b y c se han dibujado $f'(t)$ y $f''(t)$, que se han deducido directamente a partir de la función original. Se tiene por consiguiente:

$$f''(t) = \delta'(t) + \delta(t) - \delta(t-2) - 2\delta(t-2) - 0,5\delta(t-5) + 0,5\delta(t-7)$$

cuya transformada de Laplace, teniendo en cuenta las expresiones (82), (88) y (89), es:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = +s + 1 - e^{-2s} - 2se^{-2s} - 0,5 \cdot e^{-5s} + 0,5 \cdot e^{-7s}$$

y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s)$ se obtiene:

$$F(s) = \frac{s + 1 - e^{-2s} - 2se^{-2s} - 0,5e^{-5s} + 0,5e^{-7s}}{s^2}$$

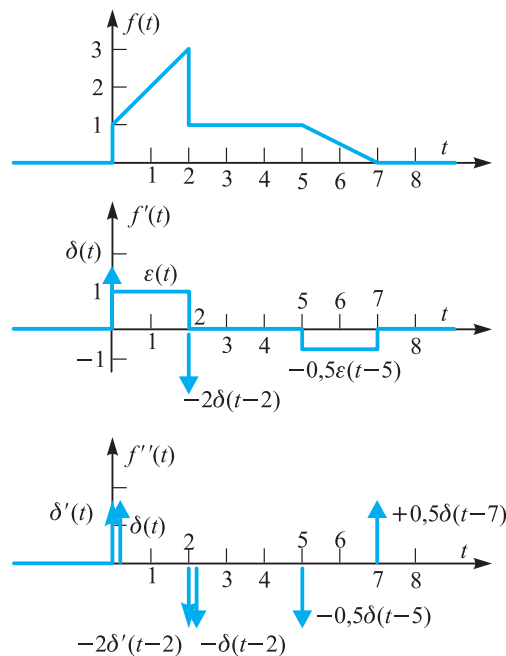


Figura A.2.12 Representación gráfica de las funciones $f(t)$, $f'(t)$ y $f''(t)$

que sería la transformada de Laplace de la función de partida $f(t)$, y que se ha obtenido de un modo muy simple. Hay que aconsejar al lector que es conveniente proceder a la obtención de las derivadas sucesivas de la función original, directamente del gráfico en el que se dibuja $f(t)$. Este procedimiento es más rápido que determinar $f(t)$ por vía analítica, calculando después las derivadas. En nuestro ejemplo es fácil comprobar que la expresión matemática de $f(t)$ es:

$$f(t) = \varepsilon(t) + r(t) - r(t-2) - 2\varepsilon(t-2) - 0,5r(t-5) + 0,5r(t-7)$$

y las derivadas primera y segunda son:

$$f'(t) = \delta(t) + \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2) - 2\delta(t-2) - 0,5\varepsilon(t-5) + 0,5\varepsilon(t-7)$$

$$f''(t) = \delta'(t) + \delta'(t) - \delta(t-2) - 2\delta'(t-2) - 0,5\delta(t-5) + 0,5\delta(t-7)$$

este último resultado coincide con el valor que se expuso al principio de este epígrafe y que se determinó directamente del gráfico.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 1

Calcular las transformadas de Laplace de las funciones dibujadas en la parte superior de la Figura A.2.13 utilizando las funciones impulso. Compruébense los resultados con los valores obtenidos en el Epígrafe A.2.5.

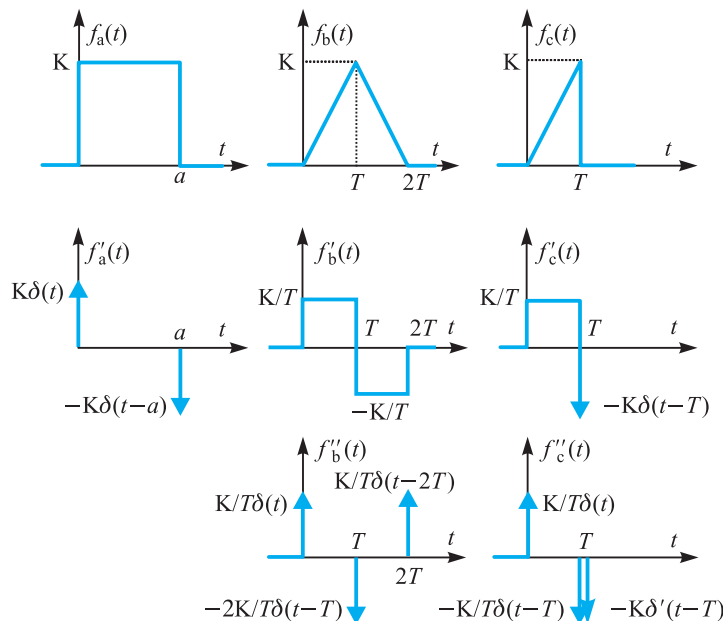


Figura A.2.13 Síntesis de funciones utilizando la función impulso de Dirac

Solución

a) La función $f_a(t)$ consigue con una sola derivación una representación con las funciones impulso, resultando:

$$f'_a(t) = K\delta(t) - K\delta(t-a)$$

y por consiguiente la transformada de Laplace de la función derivada anterior es:

$$\mathcal{L}[f'_a(t)] = K - Ke^{-as} = K(1 - e^{-as}) = sF(s)$$

de este modo el valor de $F(s)$ vale:

$$F(s) = K \frac{1 - e^{-as}}{s}$$

que coincide con el obtenido en (66) empleando allí una sintetización, basada en el *operador retraso de tiempo*.

b) La función $f_b(t)$ requiere dos derivadas para que se pueda expresar en función de impulsos y así se tiene:

$$f''_b(t) = \frac{K}{T} \delta(t) - \frac{2K}{T} \delta(t - T) + \frac{K}{T} \delta(t - 2T)$$

cuya transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}[f''_b(t)] = \frac{K}{T} - \frac{2K}{T} e^{-Ts} + \frac{K}{T} e^{-2Ts} = s^2 F(s)$$

de donde resulta:

$$F(s) = \frac{K}{T} \frac{1 - 2e^{-Ts} + e^{-2Ts}}{s^2} = \frac{K}{T} \frac{(1 - e^{-Ts})^2}{s^2}$$

que coincide con el obtenido en (68).

c) La función $f_c(t)$ requiere dos derivadas para que quede expresada en función de impulsos. En la Figura A.2.13 se observan las derivadas. Se tiene:

$$f''_c(t) = \frac{K}{T} \delta(t) - \frac{K}{T} \delta(t - T) - K\delta'(t - T)$$

cuya transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}[f''_c(t)] = \frac{K}{T} - \frac{K}{T} e^{-Ts} - Kse^{-Ts} = s^2 F(s)$$

y por consiguiente:

$$F(s) = \frac{K}{Ts^2} [1 - e^{-Ts} - Tse^{-Ts}]$$

que coincide con el obtenido en (70).

■ A.2.8. Transformada inversa de Laplace. Tablas de transformadas

La aplicación de la transformada de Laplace a una ecuación diferencial la convierte en otra algebraica. De esta ecuación algebraica se obtiene fácilmente la respuesta en el dominio de la frecuencia compleja y posteriormente se determina la solución temporal haciendo la

transformación inversa. La transformación inversa o antitransformada de la función $F(s)$ se define de la siguiente forma:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad (90)$$

Existe una expresión analítica similar a la ecuación (1) que definía la transformada de Laplace y que se emplea para determinar analíticamente $\mathcal{L}^{-1}$ que es:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s)e^{st} ds \quad ; \quad t > 0 \quad (91)$$

La integral anterior se denomina de Bromwich, y para su determinación es preciso conocer la teoría de la variable compleja. La integral se realiza en el plano complejo s , a lo largo de una paralela al eje imaginario, situada a una distancia σ adecuada (positiva) de tal eje, desde $\omega = -\infty$ hasta $\omega = +\infty$ (las singularidades de $F(s)e^{-st}$ deben quedar a la izquierda de esa recta). La integración anterior puede ofrecer dificultades y, en cualquier caso, reduce o anula las ventajas de haber pasado a operar en el dominio de la frecuencia compleja. En la práctica el problema se resuelve mediante tablas de transformadas, aprovechando la correspondencia biunívoca entre una $F(s)$ y la $f(t)$ asociada. Los pares transformados se obtienen aplicando la ecuación (1) de definición de la transformada de Laplace (ver Tabla A.2.2). Cuando no puede encontrarse la transformada de la respuesta temporal en las tablas, el procedimiento general es el de expresar $F(s)$ como suma de fracciones parciales con coeficientes constantes. Las fracciones parciales tendrán un factor de primer o de segundo orden en su denominador y se encontrarán fácilmente en la tabla de transformadas. La transformada inversa completa es la suma de las transformadas inversas de cada fracción.

La transformada de la respuesta temporal $F(s)$ puede expresarse en general como el cociente de dos polinomios $P(s)$ y $Q(s)$. Considérese que estos polinomios son de orden m y n , respectivamente, y están ordenados según potencias decrecientes de la variable s así:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (92)$$

los coeficientes a y b son reales y constantes. El primer paso en el desarrollo en fracciones parciales es poner la función racional en forma propia. Se dice que una *función racional es propia cuando el grado del polinomio numerador es menor que el grado del polinomio denominador*. Si la función $F(s)$ no es propia por ejemplo si el grado de $P(s)$ es mayor o igual que el de $Q(s)$, se divide $P(s)$ por $Q(s)$ y obtenemos:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = B(s) + \frac{R(s)}{Q(s)} \quad (93)$$

en la ecuación anterior, $B(s)$ es el coeficiente y $R(s)$ es el resto; de esta forma $R(s)$ tiene un grado menos que $Q(s)$ y la nueva fracción racional $R(s)/Q(s)$ es propia; $B(s)$ será un polinomio cuya transformada inversa (en el dominio del tiempo) será una combinación lineal de funciones $\delta(t)$, $\delta'(t)$, $\delta''(t)$, $\delta'''(t)$, etc., por lo tanto, será suficiente analizar la función propia $R(s)/Q(s)$. A partir de ahora, se supondrá que las fracciones que aparezcan en el texto son propias.

Si se considera la fracción propia $F(s) = P(s)/Q(s)$, al calcular las raíces del numerador y denominador se obtiene el desarrollo de los productos binómicos siguientes:

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (94)$$

donde $\prod$ indica un producto de factores; $z_1, z_2, \dots, z_m$ son las m raíces del numerador y se denominan **ceros**; $p_1, p_2, \dots, p_n$ son raíces (o ceros) del denominador y se denominan **polos** de la fracción parcial. En general $F(s)$ puede expresarse como una serie de fracciones, cuyo número es igual al número de polos que tiene. Dependiendo del tipo de polos, hay tres formas básicas de descomposición en fracciones parciales o combinaciones de ellas, a saber: a) que $F(s)$ tenga polos reales y de primer orden o simples; b) que los polos sean múltiples o repetidos; c) que los polos sean conjugados y complejos.

a) Polos reales y de primer orden

Si todas las raíces de $Q(s) = 0$, son simples, entonces el desarrollo en fracciones parciales es:

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_j)} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n} \quad (95)$$

es decir de la forma:

$$F(s) = \sum_{j=1}^n \frac{K_j}{s - p_j} \quad (96)$$

los valores $K_1, K_2, \dots, K_n$ se denominan **residuos**. Para evaluar un coeficiente típico K_j se multiplican ambos miembros de (95) o (96) por el factor $(s - p_j)$, el resultado es:

$$(s - p_j)F(s) = K_1 \frac{s - p_j}{s - p_1} + K_2 \frac{s - p_j}{s - p_2} + K_j + \cdots + K_n \frac{s - p_j}{s - p_n} \quad (97)$$

haciendo $s = p_j$ resulta:

$$K_j = [(s - p_j)F(s)]_{s=p_j} \quad (98)$$

expresión que permite evaluar los residuos de las fracciones. Una vez conocidos los residuos de las fracciones, la transformada inversa de Laplace de (95) es inmediata, ya que cada sumando representará un término exponencial, de acuerdo con la solución:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + K_3 e^{p_3 t} + \cdots + K_n e^{p_n t} \quad (99)$$

b) Polos reales de orden múltiple

Supóngase ahora que $F(s)$ tiene en p_j un polo de orden r (es decir r raíces repetidas). El desarrollo es ahora de la forma:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{K_1}{(s - p_j)^r} + \frac{K_2}{(s - p_j)^{r-1}} + \cdots + \frac{K_i}{(s - p_j)^{r-i+1}} + \cdots + \frac{K_r}{(s - p_j)} \quad (100)$$

multiplicando cada miembro de la ecuación (100) por $(s - p_j)^r$ se obtiene:

$$(s - p_j)^r F(s) = K_1 + K_2(s - p_j) + \dots + K_i(s - p_j)^{i-1} + \dots + K_r(s - p_j)^{r-1} \quad (101)$$

Al hacer $s = p_j$ se anulan todos los términos del segundo miembro de la ecuación anterior excepto K_1 , que sí se puede evaluar, resultando:

$$K_1 = [(s - p_j)^r F(s)]_{s=p_j} \quad (102)$$

A continuación se deriva la ecuación (101) una vez con respecto a s . El término K_1 desaparecerá, pero permanecerá K_2 sin que quede multiplicado por una función de s . Una vez más se puede evaluar K_2 , haciendo $s = p_j$, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [(s - p_j)^r F(s)] &= K_2 + K_3 2(s - p_j) + \dots + K_r(r - 1)(s - p_j)^{r-2} \Rightarrow \\ \Rightarrow K_2 &= \frac{d}{ds} [(s - p_j)^r F(s)]_{s=p_j} \end{aligned} \quad (103)$$

el proceso se puede repetir para determinar la siguiente constante K_3 y se obtiene:

$$K_3 = \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d^2}{ds^2} [(s - p_j)^r F(s)] \right\}_{s=p_j} \quad (104)$$

para el término general K_i se tiene la siguiente expresión:

$$K_i = \frac{1}{(i - 1)!} \left\{ \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [(s - p_j)^r F(s)] \right\}_{s=p_j} \quad (105)$$

Una vez conocidos los residuos, la transformada inversa de (100) será:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \left[\frac{K_1 t^{r-1}}{(r - 1)!} + \frac{K_2 t^{r-2}}{(r - 2)!} + \dots + \frac{K_i t^{r-i}}{(r - i)!} + \dots + K_r \right] e^{p_j t} \quad (106)$$

c) Polos complejos conjugados simples

Los dos métodos anteriores son válidos para cualquier tipo de polos, bien sean reales o complejos, sin embargo, si existen polos complejos, los residuos son en general complejos y puede hacerse una simplificación debido a que estos polos aparecerán en forma de pares conjugados. Vamos a suponer en este epígrafe que se tienen polos conjugados simples; en particular vamos a considerar un único par de polos, en los que se cumple:

$$p_0 = \alpha + j\beta \quad ; \quad p_0^* = \alpha - j\beta \quad (107)$$

donde p_0^* indica el conjugado de p_0 . La descomposición en fracciones parciales de $F(s)$ será:

$$F(s) = \frac{K_1}{s - p_0} + \frac{K_2}{s - p_0^*} \quad (108)$$

y el valor de los residuos K_1 y K_2 , teniendo en cuenta (98) es:

$$K_1 = [(s - p_0)F(s)]_{s=p_0} \quad ; \quad K_2 = [(s - p_0^*)F(s)]_{s=p_0^*} \quad (109)$$

como quiera que $F(s)$ es una función racional de s con coeficientes reales, al ser los polos complejos conjugados, los coeficientes K_1 y K_2 son también conjugados complejos, es decir:

$$K_2 = K_1^* \quad (110)$$

si se supone que el valor exponencial de K_1 es de la forma $A e^{j\theta}$ se tendrá:

$$K_1 = A e^{j\theta} \quad ; \quad K_2 = A e^{-j\theta} \quad (111)$$

llevando estos valores a (108) y tomando la transformada inversa, resulta:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = A e^{j\theta} e^{p_0 t} + A e^{-j\theta} e^{p_0^* t} \quad (112)$$

y teniendo en cuenta (107) se tiene:

$$f(t) = A e^{j\theta} e^{\alpha t} e^{j\beta t} + A e^{-j\theta} e^{\alpha t} e^{-j\beta t} \quad (113)$$

es decir:

$$f(t) = A e^{\alpha t} [e^{j(\beta t + \theta)} + e^{-j(\beta t + \theta)}] \quad (114)$$

o de un modo equivalente más compacto:

$$f(t) = 2A e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \quad (115)$$

Para un correcto empleo de la solución anterior, obsérvese que es preciso que todos los parámetros que aparecen en la fórmula se refieran al polo con parte imaginaria positiva ($\alpha + j\beta$) y a su correspondiente residuo ($A e^{j\theta}$). Es suficiente por consiguiente para aplicar (107) obtener el polo imaginario positivo y su residuo.

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 2

Calcular la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \frac{2s^2 + 8s - 3}{s^2 + 7s + 10}$$

Solución

La fracción anterior es impropia y habrá que proceder a la división:

$$F(s) = 2 + \frac{-6s - 23}{s^2 + 7s + 10} = 2 + F_1(s)$$

Vamos a descomponer la fracción propia $F_1(s)$ en fracciones parciales; para ello deben calcularse los polos de $F_1(s)$ que son raíces del denominador, es decir:

$$s^2 + 7s + 10 = 0 \Rightarrow s_1 = -2 \quad ; \quad s_2 = -5$$

y por consiguiente:

$$F_1(s) = \frac{-6s - 23}{s^2 + 7s + 10} = \frac{K_1}{s + 2} + \frac{K_2}{s + 5}$$

los valores de los residuos se calculan aplicando (98) resultando ser:

$$K_1 = [(s + 2)F_1(s)]_{s=-2} = \left[\frac{-6s - 23}{s + 5} \right]_{s=-2} = \frac{12 - 23}{-2 + 5} = -\frac{11}{3}$$

$$K_2 = [(s + 5)F_1(s)]_{s=-5} = \left[\frac{-6s - 23}{s + 2} \right]_{s=-5} = \frac{30 - 23}{-5 + 2} = -\frac{7}{3}$$

de acuerdo con estos valores el desarrollo de $F(s)$ será:

$$F(s) = 2 + F_1(s) = 2 + \frac{-11/3}{s + 2} + \frac{-7/3}{s + 5}$$

cuya transformada inversa es:

$$f(t) = 2\delta(t) - \frac{11}{3}e^{-2t} - \frac{7}{3}e^{-5t}$$

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 3

Calcular la transformada inversa de Laplace de la función propia:

$$F(s) = \frac{4s^2 + 11s + 9}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Solución

Los polos de $F(s)$ son las raíces del denominador:

$$s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = 0 \Rightarrow s_1 = -1 \quad ; \quad s_2 = -1 \quad ; \quad s_3 = -2$$

lo que supone un polo doble en $s_1 = s_2 = -1$ y un polo simple en $s_3 = -2$.

El desarrollo en fracciones parciales de $F(s)$ nos da:

$$F(s) = \frac{4s^2 + 11s + 9}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{A_1}{(s + 1)^2} + \frac{A_2}{(s + 1)} + \frac{B}{(s + 2)}$$

y los valores de los residuos son:

$$A_1 = [(s + 1)^2 F(s)]_{s=-1} = 2 \quad ; \quad A_2 = \left\{ \frac{d}{ds} [(s + 1)^2 F(s)] \right\}_{s=-1} = 1 \quad ; \quad B = [(s + 2)F(s)]_{s=-2} = 3$$

y por consiguiente se tiene:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)} + \frac{3}{(s+2)}$$

cuya transformada inversa es:

$$f(t) = 2te^{-t} + e^{-t} + 3e^{-2t}$$

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 4

Calcular la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 7}{s^3 + 5s^2 + 12s + 8}$$

Solución

Las raíces del denominador son:

$$s^3 + 5s^2 + 12s + 8 = 0 \Rightarrow s_1 = -2 + j2 \quad ; \quad s_3 = -1$$

es decir existen dos raíces complejas conjugadas y una raíz real. El desarrollo en fracciones parciales de $F(s)$ es:

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 7}{(s+2-j2)(s+2+j2)(s+1)} = \frac{K_1}{s+2-j2} + \frac{K_1^*}{(s+2+j2)} + \frac{K_2}{(s+1)}$$

El residuo K_1 en la raíz compleja con parte imaginaria positiva vale:

$$K_1 = [(s+2-j2)F(s)]_{s=-2+j2} = j \frac{1}{4} = 0,25 \angle 90^\circ = 0,25e^{j90^\circ} = A e^{j\theta}$$

el residuo K_2 vale:

$$K_2 = [(s+1)F(s)]_{s=-1} = 1$$

y teniendo en cuenta (115) resulta:

$$f(t) = 2 \cdot 0,25e^{-2t} \cos(2t + 90^\circ) + 1e^{-t} = -0,5e^{-2t} \sin 2t + e^{-t}$$

■ A.2.9. La integral de convolución

La integral de convolución apareció por primera vez probablemente en la solución Euler de una ecuación diferencial lineal. Parece ser que Poisson (1826) y Duhamel (1833) la emplearon en la resolución de ecuaciones diferenciales. Borel en 1899 dio una prueba rigurosa de esta integral y por ello en algunos textos aparece con el nombre de teorema de Borel.

Esta integral encuentra muchas aplicaciones en la ingeniería, incluyendo la teoría de circuitos y el control automático. En el teorema que nos ocupa, la integral de convolución permite en algunos casos obtener con sencillez la transformada inversa de algunas funciones. Sin embargo su mejor y más importante aplicación proviene del hecho de poder evaluar la respuesta de una red a una entrada arbitraria, conociendo la respuesta a un impulso $\delta(t)$ de la red.

Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones que se pueden transformar por el método de Laplace y que tienen transformadas $F_1(s)$ y $F_2(s)$. El producto de $F_1(s)$ y $F_2(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ que se obtiene de la **convolución** de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ como lo establece la ecuación:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau \quad (116)$$

en donde τ es una variable ficticia de t . Las integrales de estas ecuaciones se conocen **como integrales de convolución**. La convolución de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se designa mediante la notación especial:

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \quad (117)$$

De acuerdo con esta notación, se puede escribir:

$$F(s) = \mathcal{L}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \mathcal{L}[f_2(t) \cdot f_1(t)] = F_1(s) F_2(s) \quad (118)$$

Se puede deducir la ecuación (116), teniendo en cuenta (118) y la definición de transformada de Laplace. Y así se puede poner:

$$F(s) = \int_0^\infty f_1(u) e^{-su} du \int_0^\infty f_2(v) e^{-sv} dv \quad (119)$$

donde u y v son variables de paso. La ecuación anterior se puede escribir también del siguiente modo:

$$F(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f_1(u) f_2(v) du dv \quad (120)$$

la integración se realiza en el primer cuadrante del plano (u, v) . Haciendo el cambio de variable:

$$t = u + v \quad ; \quad \tau = u \quad (121)$$

el elemento de área $du dv$ se transforma, utilizando el Jacobiano correspondiente al cambio de variable, de la forma siguiente:

$$du dv = J \begin{pmatrix} u & v \\ t & \tau \end{pmatrix} dt d\tau = \begin{vmatrix} u'_t & u'_\tau \\ v'_t & v'_\tau \end{vmatrix} dt d\tau = dt d\tau \quad (122)$$

Para completar el cambio de variables, deben determinarse los nuevos límites de la integración. En la Figura A.2.14a se muestra el recinto de integración primitivo extendido al primer cuadrante. Nótese que como $t = u + v = \tau + v$, al variar v de 0 a ∞ (valores positi-

vos), t no puede ser nunca inferior a τ . La recta $t = \tau$ del plano (t, τ) es la bisectriz del primer cuadrante (Figura A.2.14b); por lo tanto el área de integración buscada es el área comprendida entre esta recta y el eje vertical. Para cubrir este área, se integrará primero respecto de τ desde $\tau = t$ y después se integrará respecto de t desde 0 a ∞ .

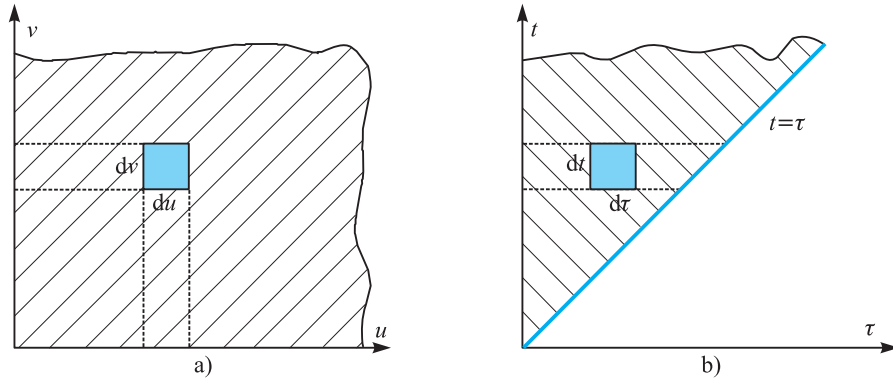


Figura A.2.14 Transformación de recintos de integración

Con el cambio de variables mostrado en (121) y los límites de integración transformados de esta manera, la ecuación (120) se convierte en:

$$F(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-st} dt \quad (123)$$

la expresión del segundo miembro de la ecuación anterior es la transformada de Laplace de la función encerrada entre corchetes y teniendo en cuenta que $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$ se podrá escribir:

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) = \mathcal{L} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] \quad (124)$$

o de otro modo:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_1 * f_2 \quad (125)$$

que es la ecuación (116) que se quería demostrar.

Una interpretación interesante de la integral de convolución se tiene en la Ingeniería de Control. Considérese por ejemplo, el sistema representado en la Figura A.2.15a por un diagrama de bloques con una función de transferencia $G(s) = F_2(s)$. Teniendo en cuenta el Epígrafe 4.8 del Capítulo 4, la función de transferencia relaciona la entrada con la salida y se cumplirá:

$$F(s) = F_1(s) F_2(s) \quad (126)$$

Ahora bien, de acuerdo con las ecuaciones (4.127) y (4.128) del Capítulo 4, la función de transferencia $F_2(s)$ se interpreta como la transformada de Laplace de la respuesta a un impulso del sistema. En la Figura A.2.15a se ha representado esta idea. Si $f_1(t) = \delta(t)$ entonces se cumple que $F_1(s) = 1$, por lo que la salida $F(s)$ es igual a $F_2(s)$, o traducido al plano tiempo, significa que $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$.

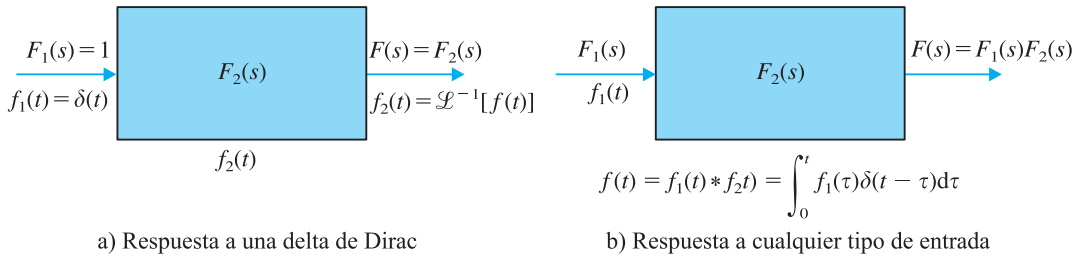


Figura A.2.15 Respuesta de un sistema

Teniendo en cuenta lo anterior, el teorema de convolución expresado en (125) indica que si se conoce $f_2(t)$, que es la respuesta de la red a una entrada en impulso de Dirac $\delta(t)$, se puede calcular entonces la respuesta del sistema a cualquier señal de entrada $f_1(t)$, con tal de *convolucionar* esa entrada $f_1(t)$ con $\delta(t)$ de acuerdo con la expresión:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * \delta(t) = \int_0^t f_1(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (127)$$

que corresponde en el plano de Laplace a:

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (128)$$

Lo cual se muestra en el diagrama de bloques de la Figura A.2.15b. Debe destacarse claramente el significado de las expresiones (127) y (128). La ecuación (128) indica que en el plano de Laplace, la respuesta $F(s)$ es el producto algebraico de $F_1(s)$ por $F_2(s)$. Sin embargo la ecuación (127) significa que en el plano tiempo **la respuesta de sistema $f(t)$ a una excitación de entrada genérica $f_1(t)$, se obtiene de la convolución de la función de excitación $f_1(t)$ con la respuesta del sistema (o red) a un impulso de Dirac $\delta(t)$.**

■ A.2.10. Interpretación gráfica de la convolución

La integral de convolución (116) puede calcularse analíticamente para la mayor parte de las funciones a las que se suele aplicar, pero a veces resulta más cómodo resolver la integral por un procedimiento gráfico, que se revela como un auxiliar eficaz cuando se trata de conocer la respuesta de una red a excitaciones de entrada, cuya descripción analítica no es sencilla. Téngase en cuenta que de la definición (116) se tiene:

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (129)$$

Para ver el significado gráfico de la ecuación anterior, supóngase que se parte de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ representadas en la Figura A.2.16a.

Como quiera que en la ecuación (129), la integración se realiza respecto a τ , se hace primeramente un cambio de variable y $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se convierten en $f_1(\tau)$ y $f_2(\tau)$. En el siguiente paso $f_1(\tau)$ se deja igual y $f_2(\tau)$ se transforma en $f_2(-\tau)$ de acuerdo con el esquema de la Figura A.2.16b. A continuación se realiza una traslación de $f_2(-\tau)$ convirtiéndolo-

se en $f_2(t - \tau)$, manteniéndose la función $f_1(\tau)$ (Figuras A.2.16c a A.2.16f). El valor de t se ha tomado igual a 0 en la Figura A.2.16b, y se ha ido variando consecutivamente a valores $t = 1$ (Figura A.2.16c); $t = 2$ (Figura A.2.16d); $t = 3$ (Figura A.2.16e); $t = 4$ (Figura A.2.16f) y así sucesivamente. Para cada uno de estos valores de t , se ha calculado el producto $f_1(\tau)f_2(t - \tau)$ realizándose la integración expresada en (129) que representa el área de curva producto $f_1(\tau)f_2(t - \tau)$ y mostrada a la derecha de cada figura. El valor del área de esta curva producto nos da el valor de $f(t)$ para cada valor específico de t , como así se observa en la Figura A.2.16g. La curva entera $f(t)$ de la Figura A.2.16g es el resultado de este proceso, al hacer un barrido del tiempo. Por ejemplo $f_2(t - \tau)$ pasa por $t = 0$ (Figura A.2.16b), el área de la curva producto es cero, lo que se ha representado por un punto en

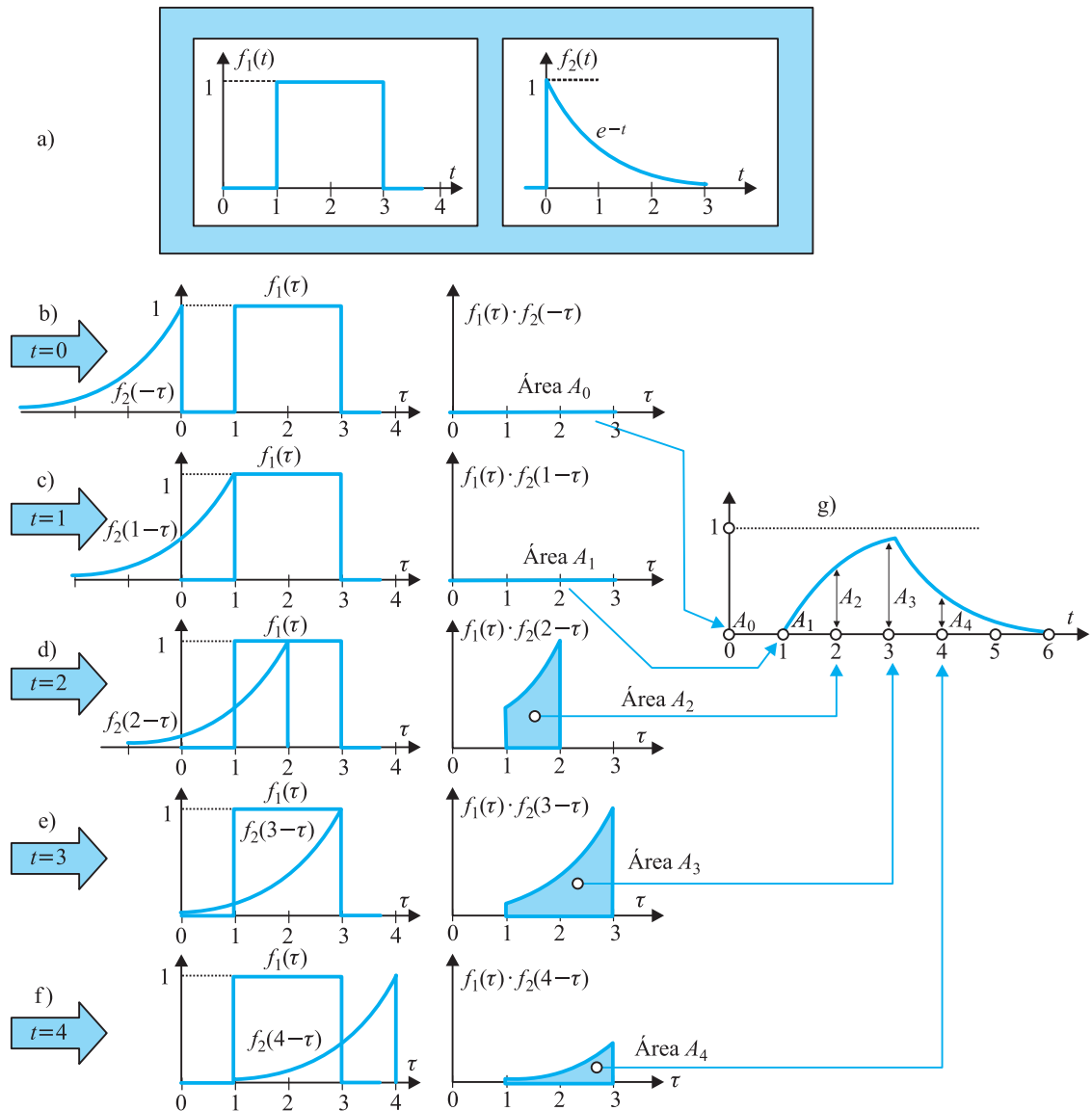


Figura A.2.16 Interpretación gráfica de la convolución

$t = 0$ en la curva $f(t)$ de la Figura A.2.16g. Conforme va aumentando el tiempo, la curva $f_2(t - \tau)$ se va deslizando sobre la curva $f_1(\tau)$ y el área que cubre la curva producto va cambiando, por lo que va modificándose el valor de $f(t)$. La función $f_2(t - \tau)$ que se desliza o va *barriendo* $f_1(\tau)$ se denomina por ello **función de barrido**.



EJEMPLO DE APLICACIÓN 5

Resolver analíticamente la convolución de las señales mostradas en la Figura A.2.16a y comprobar que el resultado coincide con el resultado gráfico mostrado en esta figura.

Solución

La señal $f_1(t)$ es un pulso rectangular trasladado 1 segundo, de anchura 2 segundos y de amplitud unidad. La función $f_2(t)$ es una señal exponencial decreciente cuyo valor inicial es la unidad. La transformada de Laplace del producto de ambas señales es:

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

donde $F_1(s)$ y $F_2(s)$ representan las transformadas de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ respectivamente y que es inmediato comprobar que valen respectivamente:

$$F_1(s) = \frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-3s} \quad ; \quad F_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

por consiguiente el producto de ambas funciones es:

$$F(s) = F_1(s)F_2(s) = \frac{1}{s(s+1)} e^{-s} - \frac{1}{s(s+1)} e^{-3s}$$

que puede escribirse de una forma equivalente del siguiente modo:

$$F(s) = \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] e^{-s} - \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] e^{-3s}$$

como quiera que la transformada inversa de la expresión entre corchetes es:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] = (1 - e^{-t})\varepsilon(t)$$

y teniendo en cuenta la propiedad:

$$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \Phi(s) \Rightarrow \mathcal{L}[\varphi(t-a)] = e^{-as}\Phi(s)$$

resulta:

$$f(t) = [1 - e^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1) - [1 - e^{-(t-3)}]\varepsilon(t-3)$$

cuya representación se muestra en la Figura A.2.17.

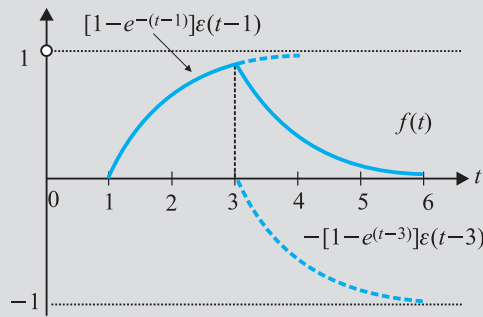


Figura A.2.17 Convolución de las señales de la Figura A.2.16

■ A.2.11. Propiedades de la integral de convolución

Aparte de las propiedades conmutativa, distributiva y asociativa que presenta la convolución y que puede demostrar el lector por simple aplicación del método de Laplace a la definición, la integral de convolución tiene otras propiedades de gran utilidad para el ingeniero. Y así se tiene:

1) Derivada de $f(t)$

Sabemos que por definición se cumple:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \Rightarrow F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (130)$$

esto significa que:

$$[sF(s)] = [sF_1(s)] \cdot [F_2(s)] = F_1(s) \cdot [sF_2(s)] \quad (131)$$

o lo que es lo mismo, en el dominio del tiempo:

$$f'(t) = f_1'(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2'(t) \quad (132)$$

ya que de acuerdo con (14), si las condiciones iniciales son nulas, se cumple:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) \quad (133)$$

2) Integral de $f(t)$

De forma análoga a (131), pero dividiendo ahora por s , se puede escribir la siguiente igualdad:

$$\frac{F(s)}{s} = \left[\frac{F_1(s)}{s} \right] \cdot F_2(s) = F_1(s) \cdot \left[\frac{F_2(s)}{s} \right] \quad (134)$$

y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[f^{-1}(t)] = F(s)/s$ (para condiciones iniciales nulas), la ecuación (134) da lugar a:

$$f^{-1}(t) = f_1^{-1}(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2^{-1}(t) \quad (135)$$

donde se ha denominado $f_1^{-1}(t) = \int f(t) dt$.

3) Convolución de la derivada de una función con la integral de otra

De la igualdad:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \Rightarrow F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (136)$$

se puede escribir:

$$F(s) = [sF_1(s) \cdot \frac{F_2(s)}{s}] = \left[\frac{F_1(s)}{s} \right] \cdot [sF_2(s)] \quad (137)$$

expresión que traducida al dominio temporal es:

$$f(t) = f_1'(t) * f_2^{-1}(t) = f_1^{-1}(t) \cdot f_2'(t) \quad (138)$$

Esta ecuación tiene una implicación trascendental. Téngase en cuenta que si $f_2(t)$ es la respuesta a un impulso de un sistema dinámico en general (o una red eléctrica en particular), la función $f_2^{-1}(t)$ es la integral de la respuesta al impulso, o de otro modo representa la respuesta a un escalón unidad. De este modo (138) indica que la respuesta del sistema $f(t)$ a una excitación $f_1(t)$, *se puede obtener por la convolución de la derivada de la función de excitación $f_1(t)$ con la respuesta del sistema (o red) a un escalón unidad $f_2^{-1}(t)$.*

La ecuación (138) puede generalizarse a un orden de derivación e integración n , resultando:

$$f(t) = f_1^n(t) * f_2^{-n}(t) = f_1^{-n}(t) * f_2^n(t) \quad (139)$$

4) Convolución con el impulso unidad

La convolución de una función $f_2(t)$ con el impulso unidad $\delta(t)$, reproduce la misma función $f_2(t)$, es decir:

$$f(t) = \delta(t) * f_2(t) = f_2(t) \quad (140)$$

téngase en cuenta que como se cumple:

$$F_1(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad ; \quad F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (141)$$

se tendrá:

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) = 1 \cdot F_2(s) \quad (142)$$

y por consiguiente:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = f_2(t) \quad (143)$$

Aplicando la definición de integral de convolución (127) a nuestro caso resulta:

$$f(t) = \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (144)$$

conforme la variable t incluida en $\delta(t - \tau)$ varía desde 0 a $t = \infty$, se reproduce $f(t) = f_2(t)$. Aunque esa es una operación inútil, permite identificar a $\delta(t - \tau)$ como una función de muestreo. En la Figura A.2.18b el impulso para $\tau = t$ se ha sustituido por una pantalla con una rendija vertical estrecha, que es más ilustrativa de la operación de *muestreo o exploración*.

ción. Conforme la rendija barre eje de abscisas o tiempos, de 0 a ∞ , se va reproduciendo la función $f(t)$. En la Figura A.2.19 se muestra el resultado de esta operación.

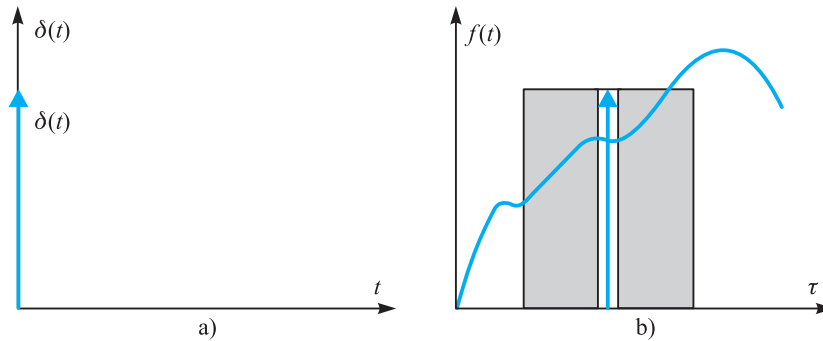


Figura A.2.18 El impulso de Dirac como función de muestreo

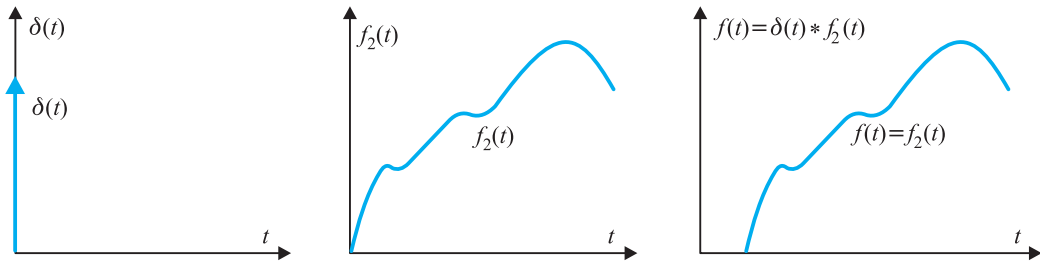


Figura A.2.19 La convolución del impulso de Dirac a una función reproduce esa función

Si la convolución de $f(t) = f_2(t)$ se realiza con el impulso unidad desplazado t_1 segundos es decir $\delta(t - t_1)$ se obtiene la misma señal original desplazada t_1 segundos en el mismo sentido, es decir:

$$\delta(t - t_1) * f(t) = f(t - t_1) \quad (145)$$

Téngase en cuenta que se cumple:

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_1)] = e^{-st_1} \cdot \mathcal{L}[\delta(t)] = e^{-st_1} \cdot 1 = e^{-st_1} \quad (146)$$

y como quiera que se puede escribir:

$$F(s) = F_1(s)F_2(s) = e^{-st_1}F_2(s) \quad (147)$$

se tendrá:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[e^{-st_1}F_2(s)] = f_2(t - t_1) = f(t - t_1) \quad (148)$$

En la Figura A.2.20 se muestra el significado de (148), comprobando el efecto de desplazamiento provocado por $\delta(t - t_1)$ al aplicarlo sobre $f(t)$, reproduce esta función pero trasladada t_1 segundos.

De un modo análogo se puede demostrar:

$$f(t - t_2) * \delta(t - t_1) = f(t - t_1 - t_2) \quad (149)$$

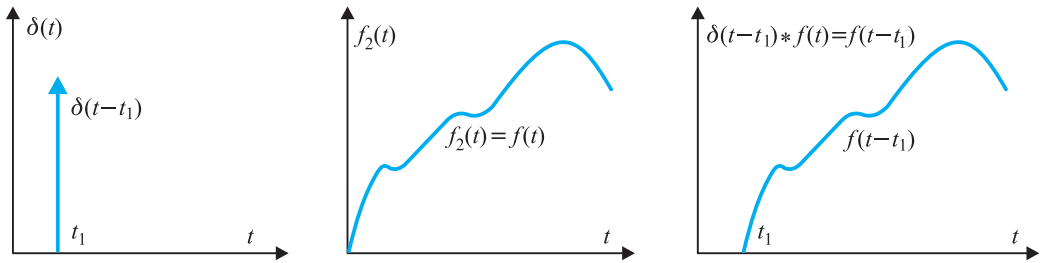


Figura A.2.20 La convolución de una función con el impulso de Dirac trasladado, traslada esa función

téngase en cuenta para ello que se cumple:

$$\mathcal{L}[f(t - t_2)] = e^{-st_2} \cdot \mathcal{L}[f(t)] = e^{-st_2} \cdot F(s) \quad (150)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_1)] = e^{-st_1} \cdot \mathcal{L}[\delta(t)] = e^{-st_1}$$

y por consiguiente se deduce:

$$f(t - t_2) * \delta(t - t_1) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-s(t_1+t_2)}F(s)] = f(t - t_1 - t_2) \quad (151)$$

que demuestra la igualdad (149). En la Figura A.2.21 se muestra el significado de la expresión anterior, observando el efecto de la traslación provocada por $\delta(t - t_1)$ al aplicarse sobre $f(t - t_2)$.

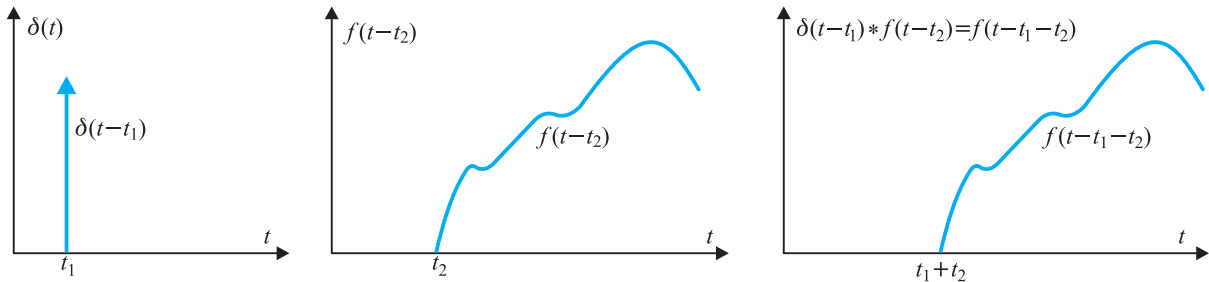


Figura A.2.21 La convolución de una función trasladada con el impulso de Dirac trasladado

▶▶ EJEMPLO DE APLICACIÓN 6

Resolver el Ejemplo de Aplicación 5, teniendo en cuenta la propiedad de convolución representada por la ecuación (138).

Solución

En la Figura A.2.22a y b se representan las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$. La función derivada $f'_1(t)$ representa un impulso de intensidad (+1) en $t = 1$, es decir $\delta(t - 1)$ y un impulso de intensidad (-1) en $t = 3$ es decir $-\delta(t - 3)$.

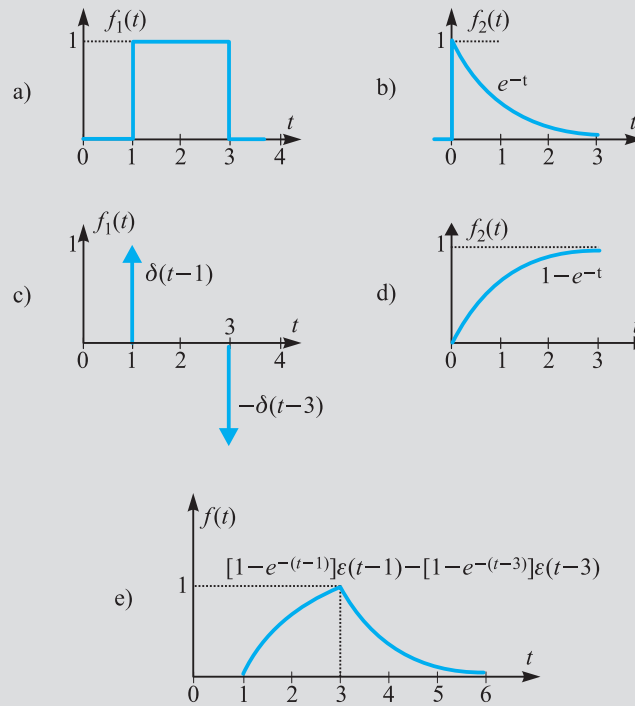


Figura A.2.22 La convolución de la derivada de una función con la integral de otra

La integral $f_2^{-1}(t)$ vale:

$$f_2^{-1}(t) = \int_0^t e^{-t} dt = (1 - e^{-t})\varepsilon(t)$$

De acuerdo con (138) se tiene:

$$f(t) = f_1'(t) * f_2^{-1}(t) = \delta(t-1) * f_2^{-1}(t) - \delta(t-3) * f_2^{-1}(t)$$

y teniendo en cuenta (145) y el resultado de la integral de la función exponencial calculada anteriormente se puede escribir:

$$\delta(t-1) * f_2^{-1}(t) = f_2^{-1}(t-1) = [1 - e^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

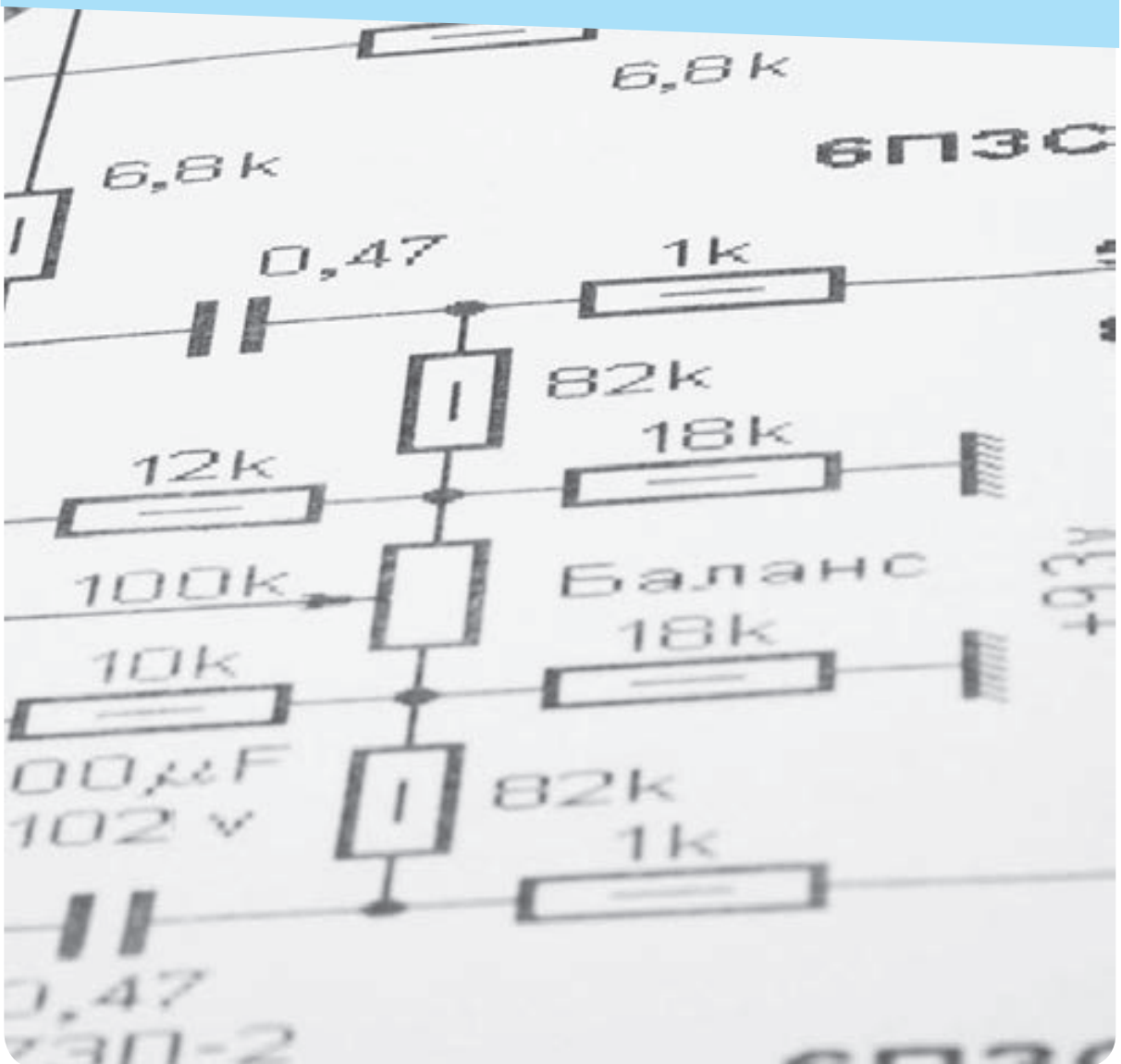
$$\delta(t-3) * f_2^{-1}(t) = f_2^{-1}(t-3) = [1 - e^{-(t-3)}]\varepsilon(t-3)$$

la curva $f(t)$ se ha representado en la Figura A.2.22e, y su expresión matemática completa es:

$$f(t) = [1 - e^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1) - [1 - e^{-(t-3)}]\varepsilon(t-3)$$

■ ÍNDICES

- Índice analítico
- Índice biográfico



Índice analítico

A

Acoplamiento magnético, 116
Adaptación de impedancias, 230
Admitancia
 compleja, 165
 mutua, 74
 operacional, 29
Amortiguador, 27
Amortiguamiento, factor de, 429
Amplificador
 diferencial, 114
 integrador, 115
 inversor, 112
 no inversor, 113
 operacional, 110
 sumador, 115
Analogías, electromecánicas, 26
Anchura de banda, 233
Ángulo
 de desplazamiento, 251-252
 de fase, 146
Árbol, 31
Armónicos, 243
Aron, conexión, 335
Asociación
 de fuentes, 43
 elementos pasivos, en c.a., 175
Autoadmitancias, 74
Autoimpedancias, 62

B

Banda extensométrica, 19

Barrido, función de, 543
Bobina, 21

C

Cálculo
 operacional, 510
 de faltas, 357
Cambios de escala, 182
Campo cuasiestacionario, 188
Capacidad, 24
Circuito
 abierto, 19
 con amortiguamiento crítico, 426
 equivalente monofásico, 293
 R-C, respuesta transitoria, 406
 R-L, respuesta transitoria, 400
 RLC, respuesta transitoria, 423
 sobreamortiguado, 424
 subamortiguado, 427
Componentes simétricas, 346
Condensador, 23
Condiciones iniciales, 395
Conductancia, 18
Conductores, identificación de, 291
Conexión
 Aron, 335
 en estrella desequilibrada, 305
 en estrella equilibrada, 285
 en paralelo, 50
 en serie, 49
 en triángulo desequilibrado, 315
 en triángulo equilibrado, 296

Constante

- de atenuación, 191
- de fase, 191
- de propagación, 191
- de tiempo, 403

Convolución

- integral de, interpretación gráfica, 541
- propiedades de la integral de, 544

Corrección del f.d.p., trifásica, 329

Corriente

- eléctrica, 4
- de fase, 288
- de línea, 288

Cortocircuito, 18

Cuadripolos

- definición, 102
- matriz de admitancias, 103
- matriz de impedancias, 102
- matriz de transición, 103

Culombio, 4

D

Deformaciones, medida de, 40

Delta de Dirac, 526

Derivada de una sinusoidal, 155

Desfase, 147

Desplazamiento

- ángulo de, 251-252
- del neutro, tensión de, 307

Diagrama

- de bloque, 440
- de polos y ceros, 440

Diferencia de potencial, 4

Dipolo, 5

Dirac, delta de, 526

Directo, sistema, 348

Distorsión

- armónica, 253
- factor de, 252

Distribución trifásica, tipos de, 319

Divisor

- de corriente, regla de, 49, 51
- de tensión, regla del, 49

Dominio

- de la frecuencia, 156
- del tiempo, 156

Dualidad, 74

E

Ecuación característica, 442

Ecuaciones de los telegrafistas, 191

Electromecánicas, analogías, 26

Elementos

- activos, ideales, 9
- pasivos, 15
- asociación de, en c.a., 175

Encendido automóvil, sistema de, 455

Equivalencia

- de generadores, 46
- estrella-triángulo, 52

Equivalente monofásico de un sistema trifásico, 293

Escalera, red en, 57

Escalón de Heaviside, 519

Eslabón, 32

Espacio de estados, 461

Esquema

- IT, 320
- TN, 319
- TT, 319

Estado, variables de, 460

Estrella

- desequilibrada, conexión en, 305
- equilibrada, conexión en, 285

F

Factor

- de amortiguamiento, 429
- de calidad, 233
- de distorsión, 252
- de galga, 20
- de potencia, 209
- corrección de, 213

Faltas, cálculo de, 357

Faradios, 24

Fase, 146

- secuencia de, 283

Fasor, 151

Fenómeno de Gibbs, 246

Filtros eléctricos, 237

Frecuencias

- críticas, 442
- naturales, 442

Fuentes, asociación de, 43

Función

- de barrido, 543
- de transferencia, 440
- impulso, 526
- rampa, 521

G

Galga

- extensométrica, 19
- factor de, 20

Generador

- de corriente, ideal, 10
- de tensión, ideal, 10
- monofásico, 280
- polifásico, 280

Generadores

- dependientes, 11
- equivalencia de, 46

Gibbs, fenómeno de, 246

Girador, 106

Grafo, 31

Grupo de corte, 33

H

Heaviside, escalón de, 519

Homopolar, sistema, 349

I

Identificación de conductores, 291

Impedancia(s)

- adaptación de, 230
- a diferentes secuencias, 355
- característica, 192
- compleja, 165
- mutuas, 62
- normalizada, 182
- operacional, 28
- por unidad, tabla de, 356

Impulso, función, 526

Indicador, secuencia de fases, 310

Inductancia, 21

Iniciales, condiciones, 395

Integral

- de convolución, 538
- de una sinusoidal, 155

Inverso, sistema, 349

K

Kennelly, teorema de, 52

Kirchhoff lemas de, 32

- en c.a., 168-169

L

Laplace transformada de, 438

- definición, 510
- inversa de, 532
- teoremas, 511

Lazo, 31

Lemas de Kirchhoff, 32

- en c.a., 168-169

Línea larga de A.T., 189

M

Magnitudes por unidad, 183

Malla, 31

- método de la, 60

Masa, 26

Matriz de transición de estado, 467

Medida

- de deformaciones, 40
- de la potencia en sistemas trifásicos, 333

Memristor, 106

Método

- de las mallas, 60
- de los nudos, 71
- simbólico, 142

Millman, teorema de, 97

Movilidad

- fuentes de corriente, 70
- fuentes de tensión, 80

Muelle, 27

N

Natural

- pulsación, 429
- respuesta, 394

No sinusoidales, señales, 241
 Normalización de parámetros, 182
 Norton, teorema de, 88
 en c.a., 187
 Nudo, 30

O

Ohmio, 18
 Onda(s)
 sinusoidal, 144
 bidireccionales, 12
 no periódicas, 13
 periódicas, 12
 unidireccionales, 12
 Operacional, cálculo, 510
 Operador trifásico, 347

P

Paralelo, conexión en, 50
 Parámetros distribuidos, circuitos con, 188
 Polifásicos, sistemas, 359
 Polos y ceros, diagrama de, 440
 Potencia
 activa, 195
 aparente, 196
 compleja, 202
 principio de conservación de la, 204
 de distorsión, 249
 deformante, 249
 eléctrica, 7
 instantánea, 194
 en c.a.
 definición, 193
 medida de la, 223
 en sistemas trifásicos, 321
 factor de, 209
 reactiva, 195
 sistemas trifásicos equilibrados, 322
 transferencia máxima de, 228
 triángulo de, 203
 Potencial eléctrico, 4
 Primer orden, sistemas de, 400
 Principio
 de reciprocidad, 103
 de superposición, 82
 en c.a., 183

Puente de Wheatstone, 39
 Pulsación natural, 429
 Pulso
 de barrido, 525
 rectangular, 523
 triangular, 523

R

Rama, 31
 Rampa, función, 521
 Reactancia, 166
 Reciprocidad
 principio de, 103
 teorema de, 96
 Red
 en escalera, 57
 plana, 31
 Redes
 de primer orden, solución sistemática, 409
 de secuencia, 356
 Régimen
 permanente, 157
 transitorio, 391
 Regla del divisor
 de corriente, 49, 51
 de tensión, 49
 Representación compleja, 149
 Resistencia, 16
 código de colores, 17
 Resonancia en c.a., 231
 Resorte, 27
 Respuesta
 forzada, 157
 natural, 394
 sinusoidal, 161
 de una capacidad, 164
 de una inductancia, 163
 de una resistencia, 162
 transitoria circuito R - C , 406
 transitoria circuito R - L , 400
 transitoria circuito RLC , 423
 Rosen, teorema de, 59

S

Secuencia de fases, 283
 indicador de, 310

Sensor de temperatura, 19
 Señales no sinusoidales, 241
 Serie
 conexión en, 49
 de Fourier, 242
 Siemens, 18
 Simbólico, método, 142
 Simétricas, componentes, 346
 Síntesis de ondas, 523
 Sinusoidal
 derivada de una, 155
 integral de una, 155
 Sistema(s)
 de primer orden, 400
 directo, 348
 encendido automóvil, 455
 homopolar, 349
 inverso, 349
 polifásicos, 359
 trifásicos, medida de la potencia, 333
 Solución sistemática, redes de primer orden, 409
 Superposición, principio de, 82
 en c.a., 183
 Susceptancia, 167
 Sustitución, teorema de, 94

T

Tasa de distorsión armónica, 253
 Telegrafistas, ecuaciones de los, 191
 Tellegen, teorema de, 99
 Tensión
 de desplazamiento del neutro, 307
 eléctrica, 4
 transitoria de restablecimiento, 458
 Tensiones
 compuestas, 286
 de fase, 286
 de línea, 286
 simples, 286
 Teorema
 de Kennelly, 52
 de Millman, 97
 de Norton, 88
 en c.a., 187

de reciprocidad, 96
 de Rosen, 59
 de sustitución, 94
 de Tellegen, 99
 de Thévenin, 86
 en c.a., 187
 del valor inicial, 517
 del valor final, 518
 Thévenin, teorema de, 86
 en c.a., 187
 Topología de redes, 30
 Transferencia
 función de, 440
 máxima de potencia, 93, 228
 Transformación
 estrella-triángulo, 54
 triángulo-estrella, 53
 Transformada de Laplace, 438
 Transición de estado, matriz de, 467
 Transitorio
 régimen, 391
 sistemas de primer orden, 400
 Transporte de energía, 345
 Triángulo
 de potencias, 203
 desequilibrado, 315
 equilibrado, 296

V

Valor
 eficaz, 14
 final, teorema del, 518
 inicial, teorema del, 517
 medio, 14
 Variables de estado, 460
 Varímetro, 224
 Vatímetro, 223
 Vatio, 7
 Ventaja, sistemas trifásicos, 345
 Voltamperios, 196
 reactivos, 196
 Voltio, 5

W

Weber, 21
 Wheatstone, puente de, 39

Índice biográfico

Ampère, André Marie, 135
Aron, Hermann, 387
Bellman, Richard, 483
Boucherot, Paul, 387
Bush, Vannevar, 483
Campbell, George, 275
Carson, John R., 483
Cauchy, Augustin, 275
Euler, Leonhard, 135
Evans, Robert, 388
Fourier, Jean Baptiste, 275
Galvani, Luigi, 136
Gerard, Eric, 484
González Echarte, Antonio, 484
Guillemin, Ernst, 275
Heaviside, Oliver, 484
Helmholtz, Hermann, 136
Janet, Paul, 388
Jenkin, Fleeming, 276
Joule, James, 388
Kalman, Rudolf, 484
Kennelly, Arthur, 276
Kirchhoff, Gustav, 136
Laplace, Pierre, 485
Madariaga y Casado, J. M., 485
Norton, Edward, 136
Pérez del Pulgar, José Agustín, 485
Plante, Gaston, 137
Rojas y Caballero Infante, Francisco, 485
Siemens, William, 276
Steinmetz, Charles, 276
Tellegen, Bernard, 137
Terman, Frederick E., 486
Tesla, Nikola, 388
Thévenin, León, 137
Thomson, William, Lord Kelvin, 277
Van Valkenburg, Mac, 137
Varley, Cromwell F., 388
Volta, Alessandro, 138
Wagner, Charles, 389
Wheatstone, Charles, 138
Zadeh, Lotfi, 486

Circuitos Eléctricos, se publica bajo el patrocinio de la editorial Pearson y está adaptado a los nuevos planes de estudio que se están implantando en España en los últimos años, como consecuencia de la armonización de las enseñanzas universitarias españolas con el Espacio Europeo de Enseñanza Superior. Dirigido a estudiantes de Ingeniería, es el texto ideal para un curso de circuitos eléctricos, como preludeo a una asignatura de Electrotecnia, materia que se incluye en la mayoría de las enseñanzas de las nuevas titulaciones de Grado, que se van estableciendo progresivamente en las diversas Escuelas Técnicas de Ingeniería Superior e Ingeniería Técnica en España.

El libro se compone de cuatro grandes capítulos que abarcan todo el análisis clásico de los circuitos eléctricos: 1) Introducción, en la que se explican los circuitos de c.c.; 2) Circuitos de c.a. sinusoidal; 3) Circuitos trifásicos, y 4) Régimen transitorio de los circuitos eléctricos. Se incorporan al final del texto dos apéndices, el primero se dedica a la historia de los circuitos eléctricos, y el segundo explica la transformada de Laplace como referencia para el estudio del régimen transitorio de los circuitos.

A lo largo del texto se plantean gran cantidad de ejemplos de aplicación totalmente resueltos y, en cada lección, se incluyen de treinta a sesenta problemas propuestos, en los que únicamente se da la respuesta final, lo que supone un total de casi trescientos problemas que facilitan el autoaprendizaje del estudiante. El libro intercala con frecuencia anécdotas, comentarios prácticos y secciones de ampliación de conocimientos, que son puntos sugerentes de reflexión, que incentivan la lectura del texto. Asimismo, al final de cada capítulo, se han escrito las biografías de científicos e ingenieros, que contribuyeron con sus teorías al avance de estas disciplinas y a los que la humanidad les debe por ello respeto y gratitud.

PEARSON

www.pearson.es

ISBN: 978-84-8322-795-4



9 788483 227954